ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-223-231

Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток — II [1]

А. В. Михляева

Анна Владимировна Михляева — аспирант, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам построения быстрых алгоритмов вычисления функции качества рациональных сеток, приближающих квадратичные алгебраические сетки в общем случае максимальной решётки целых алгебраических чисел.

Показано, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая квадратичную алгебраическую сетку, является параллелепипедальной. Как следствие построен алгоритм вычисления функции качества за $O(\ln N)$ арифметических операций.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:
А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 223–231.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 3.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-223-231

Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets[2]

A. V. Mikhlyaeva

Anna Vladimirovna Mikhlyaeva — graduate student, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

Abstract

This paper is devoted to the construction of fast algorithms for calculating the quality function of rational grids that approximate quadratic algebraic grids in the General case of the maximum lattice of integer algebraic numbers.

It is shown that the generalized parallelepipedal net approximating the quadratic algebraic net is parallelepiped.As a consequence, an algorithm for calculating the quality function for $O(\ln N)$ arithmetic operations is constructed.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 3 titles.

For citation:
A. V. Mikhlyaeva, 2020, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets — II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 223–231.

Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому
по случаю его семидесятипятилетия

1. Введение

В работе [2] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$. В работе [3] эти исследования были продолжены и была найдена форма функции качества $H(M(\Lambda_m(p)))$, которая позволяет её вычислять за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций. В данной работе будет рассмотрен общий случай квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где дискриминант поля d — произвольное бесквадратное натуральное число больше 1, или как иногда говорят d — радикал.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа. Теория показывает, что здесь имеются два принципиально различных случая:

$d = 2$ или $d \equiv 3 \pmod 4$

и другой случай, когда $d \equiv 1 \pmod 4$.

2. Основная лемма о целочисленных двумерных решётках

Рассмотрим произвольную двумерную целочисленную решётку $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$. Пусть она имеет базис $\vec{\lambda}_1 = (a, b)$ и $\vec{\lambda}_2 = (c, d)$ с детерминантом $N = \det \Lambda = |ad - bc| > 1$. Следующая лемма отвечает на вопрос, когда решётка Λ будет решёткой решений линейного сравнения $\Lambda(n, N) = \{(y, x) | x + ny \equiv 0 \pmod N\}$.

Лемма 1. *Пусть $a > c > 0$, $(a, c) = 1$ и $N = ad - bc > 1$, тогда $\Lambda = \Lambda(n, N)$, где $n = (-1)^l (Q_{l-1} b - P_{l-1} d)$ и P_{l-1} — числитель, Q_{l-1} — знаменатель $l-1$-ой подходящей дроби для разложения дроби $\frac{a}{c}$ в цепную дробь:*

$$\frac{a}{c} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_l}}} = \frac{P_l}{Q_l}.$$

Доказательство. Рассмотрим базисную матрицу A решётки Λ:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и унимодулярную матрицу B:

$$B = \begin{pmatrix} (-1)^{l-1}Q_{l-1} & (-1)^l P_{l-1} \\ -c & a \end{pmatrix},$$
$$|B| = (-1)^{l-1}Q_{l-1}a + (-1)^l P_{l-1}c = (-1)^{l-1}(P_l Q_{l-1} - Q_l P_{l-1}) = 1.$$

Для базисной матрицы $C = B \cdot A$ имеем:

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{l-1}Q_{l-1} & (-1)^l P_{l-1} \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{l-1}(Q_{l-1}b - P_{l-1}d) \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решётка $\Lambda = \{(x, -nx + Ny) | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{(x, y) | y + nx \equiv 0 \pmod N\}$, что и доказывает утверждение леммы. □

3. Первый случай для дискриминанта

Рассмотрим первый случай, тогда $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{d}$, $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{d}$ $n, k \in \mathbb{Z}$ и целые алгебраические числа $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - dk^2 = 0$.

Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{d}, -\sqrt{d})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$.

Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{\lambda}_2^* = \left(\frac{\sqrt{d}}{2d}, -\frac{\sqrt{d}}{2d}\right)$ и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{d}}{2d}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{d}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{d} = q_0 + [(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1, \ldots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m-ая подходящая дробь к $\sqrt{d}$. Таким образом,

$$\sqrt{d} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \left\{ (Q_m(n + k\sqrt{d}), Q_m(n - k\sqrt{d})) | n, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

а через $\Lambda_m(d)$ — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{d}, -Q_m\sqrt{d})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{d}$.

Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(F)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}_{m,2}^* = \left(\frac{\sqrt{d}}{2dQ_m}, -\frac{\sqrt{d}}{2dQ_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{d}}{2dQ_m^2}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(d)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(d) = 2Q_mP_m$.

Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(d)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z}^* = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(d) = \frac{1}{2P_mQ_m}$.

Рассматриваются следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1;1)^2, \quad M(\Lambda_m(d)) = \Lambda_m^*(d) \cap [0;1)^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{d}k}{2dQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{d}k}{2dQ_m} \right) \middle| \, k \in A(n), |n| \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$A(n) = \left\{ k \left| \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \dots -2Q_m + 1; \end{array} \right. \right\},$$

$$M(\Lambda_m(d)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| \, k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \left| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots 2Q_m - 1; \end{array} \right. \right\}.$$

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x,y) = 9(1-2\{x\})^2(1-2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(d))$, также как в работе [2], можно использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(d))) = \frac{9}{2P_mQ_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2 \left(1 - 2\left(\frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2,$$

которую, для краткости, будем называть функцией качества.

Положим $N_m = 2P_mQ_m$ и целое a_m зададим равенством

$$a_m = \left\{ \begin{array}{ll} 2P_mQ_{m-1} - 1, & \text{при } m\text{— нечётном} \\ 2P_m(Q_m - Q_{m-1}) - 1, & \text{при } m\text{— чётном.} \end{array} \right.$$

Теорема 1. *Справедливо равенство $M(\Lambda_m(d)) = M(a_m, N_m)$, где параллелепипедальная сетка $M(a_m, N_m)$ задаётся равенством*

$$M(a_m, N_m) = \left\{ \left(\frac{n}{N_m}, \left\{ \frac{a_m n}{N_m} \right\} \right) \middle| \, n = 0, \dots, N_m - 1 \right\}.$$

Доказательство. Дословно повторяя рассуждения из работы [3], получаем утверждение теоремы. □

Рассмотрим разложение $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную дробь:

$$\frac{a_m}{N_m} = \cfrac{1}{q_{1,m} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{l-1,m} + \cfrac{1}{q_{l,m}}}}}$$

длины $l = l(m)$.

Для дальнейшего нам потребуются скобки Эйлера $[b_1, \ldots, b_n]_{(n)}$, которые определяются рекуррентно

$$[]_{(-1)} = 0, \quad []_{(0)} = 1, \quad [b_1, \ldots, b_n]_{(n)} = b_n[b_1, \ldots, b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1, \ldots, b_{n-2}]_{(n-2)} \quad (n \geqslant 1).$$

В работе [1] для величин H_k, заданных равенствами

$$H_k = \frac{9}{Q_k} \sum_{n=0}^{Q_k - 1} \left(1 - 2\frac{n}{Q_k}\right)^2 \left(1 - 2\left\{\frac{P_k n}{Q_k}\right\}\right)^2,$$

доказана теорема

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$H_k = 1 + \frac{4}{5Q_k^2}\left(10 + 5k + \sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda^2 - \frac{3(P_k^2 + Q_{k-1}^2)}{Q_k^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{Q_k}\left(2\sum_{\lambda=1}^{k} q_\lambda (Q_\lambda T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda-1}) - 10\sum_{\lambda=1}^{k-1} Q_{\lambda-1} T_{k,\lambda+1}\right)\right).$$

Здесь через $T_{k,\nu}$ обозначены величины $T_{k,\nu} = [q_{\nu+1}, \ldots, q_k]_{(k-\nu)}$.

Теорема 3. *Для функции качества $H(M(\Lambda_m(d)))$ справедливо равенство*

$$H(M(\Lambda_m(d))) = 1 + \frac{4}{5N_m^2}\left(10 + 5l + \sum_{\lambda=1}^{l} q_{\lambda,m}^2 - \frac{3(P_{l,m}^2 + Q_{l-1,m}^2)}{Q_{l,m}^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{Q_{l,m}}\left(2\sum_{\lambda=1}^{l} q_{\lambda,m} (Q_{\lambda,m} T_{l,\lambda+1}^* + Q_{\lambda-2,m} T_{l,\lambda+1}^* + Q_{\lambda-2,m} T_{l,\lambda-1}^*) - 10\sum_{\lambda=1}^{l-1} Q_{\lambda-1,l} T_{l,\lambda+1}^*\right)\right),$$

где $\frac{P_{\lambda,m}}{Q_{\lambda,m}}$ — λ-ая подходящая дробь к числу $\frac{a_m}{N_m}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, l)$, $T_{l,\nu}^* = [q_{\nu+1,m}, \ldots, q_{l,m}]_{(l-\nu)}$.

Доказательство. Дословно повторяя рассуждения из работы [3], получаем утверждение теоремы. □

4. Второй случай для дискриминанта

Рассмотрим второй случай, тогда число $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ является целым алгебраическим числом, так как числа ω и $1 - \omega$ — корни квадратного уравнения $x^2 - x + \frac{1-d}{4} = 0$ с целыми коэффициентами в силу сравнения $d \equiv 1 \pmod 4$. Решётка

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

имеет другой целый базис $\vec{\lambda'}_1 = (1,1)$, $\vec{\lambda'}_2 = (\omega, 1-\omega)$ и является максимальной решёткой целых алгебраических чисел поля F, а детерминант решётки $\det\Lambda(F) = \sqrt{d}$. Таким образом, решётка $\Lambda_1(F)$ с базисом $\vec{\lambda}_1 = (1,1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{d}, -\sqrt{d})$ является её подрешёткой индекса 2.

Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda'}^*_1 = \left(\frac{d-\sqrt{d}}{2d}, \frac{d+\sqrt{d}}{2d}\right)$, $\vec{\lambda'}^*_2 = \left(\frac{\sqrt{d}}{d}, -\frac{\sqrt{d}}{d}\right)$ и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{d}}{d}$.

Через $\Lambda_m(F)$ во втором случае обозначается алгебраическая решётка, заданная равенствами двумя способами:

если P_m и Q_m — числа разной четности, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{(Q_m(2n + k(1+\sqrt{d})), Q_m(2n + k(1-\sqrt{d})))|n,k \in \mathbb{Z}\right\},$$

а через $\Lambda_m(d)$ — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{(2Q_m n + k(Q_m + P_m), 2Q_m n + k(Q_m - P_m))|n,k \in \mathbb{Z}\};$$

если P_m и Q_m — оба нечетные числа, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{ \left(Q_m\left(n + k\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right), Q_m\left(n + k\frac{1-\sqrt{d}}{2}\right)\right) \middle| n,k \in \mathbb{Z}\right\},$$

а через $\Lambda_m(d)$ — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \left\{ \left(Q_m n + k\frac{Q_m + P_m}{2}, Q_m n + k\frac{Q_m - P_m}{2}\right) \middle| n,k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид:

в первом случае $\vec{\lambda}_{m,1} = (2Q_m, 2Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m(1+\sqrt{d}), Q_m(1-\sqrt{d}))$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(F) = 4Q_m^2\sqrt{d}$;

а во втором случае $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = \left(Q_m\frac{1+\sqrt{d}}{2}, Q_m\frac{1-\sqrt{d}}{2}\right)$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(F) = Q_m^2\sqrt{d}$.

Базис взаимной решётки $\Lambda^*_m(F)$ имеет вид:

в первом случае

$$\vec{\lambda'}^*_{m,1} = \left(\frac{d-\sqrt{d}}{4dQ_m}, \frac{d+\sqrt{d}}{4dQ_m}\right), \quad \vec{\lambda'}^*_{m,2} = \left(\frac{\sqrt{d}}{2dQ_m}, -\frac{\sqrt{d}}{2dQ_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda^*_m(F) = \frac{\sqrt{d}}{4dQ_m^2}$;

а во втором случае

$$\vec{\lambda'}^*_{m,1} = \left(\frac{d-\sqrt{d}}{2dQ_m}, \frac{d+\sqrt{d}}{2dQ_m}\right), \quad \vec{\lambda'}^*_{m,2} = \left(\frac{\sqrt{d}}{dQ_m}, -\frac{\sqrt{d}}{dQ_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda^*_m(F) = \frac{\sqrt{d}}{dQ_m^2}$.

Отметим, что третий случай, когда числитель и знаменатель оба четные числа, невозможен, так как они взаимно простые числа.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(d)$ базис имеет вид:

в первом случае

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (2Q_m, 2Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z} = (Q_m + P_m, Q_m - P_m),$$

а детерминант решётки $\det\Lambda_m(d) = 4Q_mP_m$;

а во втором случае

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z} = \left(\frac{Q_m + P_m}{2}, \frac{Q_m - P_m}{2}\right),$$

а детерминант решётки $\det\Lambda_m(d) = Q_mP_m$.

Теорема 4. *Пусть для разложения дроби $\frac{P_m+Q_m}{2Q_m}$ в цепную дробь:*

$$\frac{P_m + Q_m}{2Q_m} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_l}}} = \frac{P'_l}{Q'_l}.$$

Для второго случая дискриминанта для решётки $\Lambda_m(d)$ справедливы следующие равенства

в первом случае, когда P_m и Q_m — числа разной четности,

$$N_m = 4Q_mP_m, \quad \Lambda_m(d) = \Lambda(n_m, N_m),$$

где $n_m = (-1)^l(Q'_{l-1}(Q_m - P_m) - P'_{l-1}2Q_m)$ и P'_{l-1} — числитель, Q'_{l-1} — знаменатель $l-1$-ой подходящей дроби;

а во втором случае, когда P_m и Q_m — оба нечетные числа,

$$N_m = Q_mP_m, \quad \Lambda_m(d) = \Lambda(n_m, N_m),$$

где $n_m = (-1)^l(Q'_{l-1}\frac{Q_m-P_m}{2} - P'_{l-1}Q_m)$ и P'_{l-1} — числитель, Q'_{l-1} — знаменатель $l-1$-ой подходящей дроби.

Доказательство. В первом случае положим в основной лемме $a = P_m+Q_m$, $b = Q_m-P_m$, $c = d = 2Q_m$ получим первое утверждение теоремы.

Во втором случае положим в основной лемме $a = \frac{P_m+Q_m}{2}$, $b = \frac{Q_m-P_m}{2}$, $c = d = Q_m$ получим второе утверждение теоремы. □

Базис взаимной решётки $\Lambda^*_m(d)$ имеет вид:

в первом случае

$$\vec{\lambda}^*_{m,1,Z} = \left(\frac{P_m - Q_m}{4P_mQ_m}, \frac{P_m + Q_m}{4P_mQ_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2,Z} = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda^*_m(d) = \frac{1}{4P_mQ_m}$;

а во втором случае

$$\vec{\lambda}^*_{m,1,Z} = \left(\frac{P_m - Q_m}{2P_mQ_m}, \frac{P_m + Q_m}{2P_mQ_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2,Z} = \left(\frac{1}{P_m}, -\frac{1}{P_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda^*_m(d) = \frac{1}{P_mQ_m}$.

Нетрудно видеть, что

в первом случае

$$M(\Lambda_m(d)) = \left\{ \left(\frac{n(P_m - Q_m)}{4P_mQ_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n(P_m + Q_m)}{4P_mQ_m} - \frac{k}{2P_m}\right) \middle| \, k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 4Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{(P_m-Q_m)n}{2Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{(P_m+Q_m)n}{2Q_m}, & \text{при } n = 1, \ldots, 2Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{(P_m+Q_m)n}{2Q_m} < k < 2P_m - \frac{(P_m-Q_M)n}{2Q_m}, & \text{при } n = 2Q_m, \ldots, 4Q_m - 1 \end{array} \right\};$$

а во втором случае

$$M(\Lambda_m(d)) = \left\{ \left(\frac{n(P_m - Q_m)}{2P_mQ_m} + \frac{k}{P_m}, \frac{n(P_m + Q_m)}{2P_mQ_m} - \frac{k}{P_m} \right) \middle| \, k \in B(n), 0 \leqslant n \leqslant 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{(P_m - Q_m)n}{2Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{(P_m + Q_m)n}{2Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots Q_m - 1, \\ -P_m + \frac{(P_m + Q_M)n}{2Q_m} < k < P_m - \frac{(P_m - Q_M)n}{2Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots 2Q_m - 1 \end{array} \right\}.$$

Для функции качества сетки $M(\Lambda_m(d))$ имеем:
в первом случае

$$H(M(\Lambda_m(d))) =$$

$$= \frac{9}{4P_mQ_m} \sum_{n=0}^{4Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2\left(\frac{n(P_m - Q_m)}{4P_mQ_m} + \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2 \left(1 - 2\left(\frac{n(P_m + Q_m)}{4P_mQ_m} - \frac{k}{2P_m}\right)\right)^2,$$

а во втором случае

$$H(M(\Lambda_m(d))) =$$

$$= \frac{9}{2P_mQ_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2\left(\frac{n(P_m - Q_m)}{2P_mQ_m} + \frac{k}{P_m}\right)\right)^2 \left(1 - 2\left(\frac{n(P_m + Q_m)}{2P_mQ_m} - \frac{k}{P_m}\right)\right)^2.$$

Доказанная теорема 4 позволяет как и в первом случае дискриминанта вычислять функцию качества для второго случая за $O(N_m)$ арифметических операций.

5. Заключение

Доказанные теоремы 3 и 4 позволяют это сделать за

$$O(\ln N(P_m, Q_m))$$

арифметических операций.

Основным моментом в нашей работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой.

На тот факт, что сетка $M(\Lambda_m(d))$ является параллелепипедальной, и что во втором случае дискриминанта надо рассматривать два случая для числителя и знаменателя подходящей дроби обратил внимание А. В. Родионов, за что выражаю ему свою благодарность.

Также выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография под редакцией Н. М. Добровольского. — Тула, 2012, 193 с.

2. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

3. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 307–312.

REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids.", monograph edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula, 193 p.

2. A. V. Mikhlyaeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.

3. A. V. Mikhlyaeva, 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

Получено 11.06.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.