УДК 517.927.25

А. С. МАКИН

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОДНОМЕРНОМУ ОПЕРАТОРУ ШРЕДИНГЕРА

В данной работе устанавливаются достаточные условия сходимости средних Рисса биортогональных разложений по собственным и присоединенным функциям оператора (1)

$$Lu = u'' + q(x)\,u, \tag{1}$$

рассматриваемого на произвольном интервале G действительной прямой.

Следуя В. А. Ильину, под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественно нулю комплекснозначную функцию $\overset{0}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу C^2 и является решением уравнения $L\overset{0}{u} + \lambda\overset{0}{u} = 0$.

Аналогично под присоединенной функцией порядка l ($l = 1, 2, \ldots$), отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{l}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу C^2 и является решением уравнения $L\overset{l}{u} + \lambda\overset{l}{u} = \overset{l-1}{u}$.

Краевые условия, которым удовлетворяют собственные и присоединенные функции, совершенно произвольны.

Рассмотрим произвольную полную в $L_2(G)$ и минимальную систему $\{u_n\}$ собственных и присоединенных функций оператора (1). Тогда существует и притом единственная биортогонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{v_n\}$.

Обозначим через μ_n такой квадратный корень из λ_n, действительная часть которого неотрицательна. Считая, что числа μ_n не имеют конечных точек сгущения, занумеруем их в порядке неубывания $|\mu_n|$ и для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ составим частичную сумму порядка μ ($\mu > 0$) риссовских средних порядка α ($\alpha \geqslant 0$) биортогонального ряда

$$\sigma_\mu^\alpha(x, f) = \sum_{|\mu_n| < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^\alpha (f, v_n)\, u_n(x).$$

Функции

$$\theta^\alpha(x, y, \mu) = \sum_{|\mu_n| < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^\alpha v_n(y)\, u_n(x)$$

будем называть средними Рисса порядка α спектральной функции, отвечающей разложению по системе $\{u_n\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что общее число присоединенных функций в системе $\{u_n\}$ конечно. Введем обозначение

$$T^\alpha(x, y, \mu) = 2^\alpha (2\pi)^{-1/2}\,\Gamma(\alpha + 1)\, \frac{J_{\alpha+1/2}(\mu|x-y|)}{\mu^{\alpha-1/2}\,|x-y|^{\alpha+1/2}}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что $|\operatorname{Im}\mu_n| \leqslant c_1$, $\sum\limits_{t \leqslant |\mu_n| \leqslant t+1} 1 \leqslant c_2$ для любого $t \geqslant 0$;

2) существует $s \geqslant 0$ такое, что для любого компакта K интервала G справедливо неравенство $\|u_n\|_{L_2(K)} \|v_n\|_{L_2(G)} \leqslant C(K)\,(|\mu_n| + 1)^s$;

3) функция $q(x)$ принадлежит классу $C^{[s]+1}(G)$. Тогда для любого $\alpha \geqslant s$ равномерно относительно x на любом компакте K интервала G имеет место оценка

$$\|\theta^\alpha(x, y, \mu) - T^\alpha(x, y, \mu)\|_{L_2(G)} \leqslant c\mu^{\max(s-\alpha, -3/2)}, \tag{2}$$

в которой норма $L_2(G)$ берется по координате y.

Составим теперь для произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ средние Рисса ее разложения в интеграл Фурье

$$S_\mu^\alpha(x, f) = \int_G T^\alpha(x, y, \mu)\, f(y)\, dy.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для любого $\alpha \geqslant s$ и произвольной функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ справедлива равномерная относительно x на любом компакте K интервала G оценка*

$$\left|\sigma_\mu^\alpha(x, f) - S_\mu^\alpha(x, f)\right| = o(1)\|f\|_{L_2(G)}\, \mu^{\max(s-\alpha, -3/2)}.$$

Замечание. Теоремы 1, 2 при дополнительном условии $\alpha < 1$ доказаны для обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка В. А. Ильиным и В. В. Тихомировым в работе [1]. Случай $\alpha = s = 0$ решен В. А. Ильиным [2], причем без предположения о конечности числа присоединенных функций в системе $\{u_n\}$. В работах Я. Ш. Салимова [3, 4] были получены оценка средних Рисса спектральной функции, отвечающей разложению по системе собственных и присоединенных функций оператора Лапласа, и оценка разности средних Рисса биортогонального разложения произвольной функции $f(x)$ и средних Рисса ее разложения в N-кратный интеграл Фурье. При этом оказалось, что точность полученных оценок неограниченно возрастает при соответствующем увеличении порядка средних Рисса.

Ниже приводится пример, показывающий, что в случае $q(x) \not\equiv 0$, $s - \alpha < -3/2$ показатель степени $-3/2$ в правой части оценки (2) нельзя уменьшить. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u'' + q(x)\,u + \lambda u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

где $q(x)$ — непрерывно дифференцируемая не равная тождественно нулю вещественнозначная функция. Данная задача имеет полную ортонормированную систему собственных функций $\{u_n\}$. Пусть $\alpha > 3/2$. Рассуждая аналогично теореме 1, получим, что равномерно по x на любом компакте K справедлива оценка

$$\|\theta^\alpha(x, y, \mu) - q(x)\,\theta^{\alpha-1}(x, y, \mu)/\mu^2 - T^\alpha(x, y, \mu)\|_{L_2(0,1)} \leqslant c_1\mu^{\max(-\alpha, -2)}. \quad (3)$$

Из теоремы 1 следует, что равномерно по x на любом компакте K выполнено неравенство

$$\|\theta^{\alpha-1}(x, y, \mu) - T^{\alpha-1}(x, y, \mu)\|_{L_2(0,1)} \leqslant c_2\mu^{\max(1-\alpha, -3/2)}. \quad (4)$$

Из (3), (4) вытекает, что

$$\|\theta^\alpha(x, y, \mu) + q(x)\,T^{\alpha-1}(x, y, \mu)/\mu^2 - T^\alpha(x, y, \mu)\|_{L_2(0,1)} \leqslant c_3\mu^{\max(-\alpha, -2)}. \quad (5)$$

Легко показать, что при любом x_0, таком, что $q(x_0) \neq 0$

$$|q(x_0)|\,\|T^{\alpha-1}(x_0, y, \mu)\|_{L_2(0,1)}/\mu^2 \geqslant c_4\mu^{-3/2}. \quad (6)$$

Из (5), (6) следует, что $\|\theta^\alpha(x_0, y, \mu) - T^\alpha(x_0, y, \mu)\|_{L_2(0,1)} \geqslant c_5\mu^{-3/2}$.

В качестве примера применения теорем 1, 2 укажем краевую задачу

$$\begin{cases} u'' + 16xu + \lambda u = 0, \\ u(0) = 0, \ u'(0) = u'(1). \end{cases} \quad (7)$$

Исходя из асимптотических формул для собственных значений и собственных функций (см. [5]), легко получить, что характеристическое уравнение задачи (7) имеет вид

$$1 - \cos\mu + \frac{4}{\mu}\sin\mu + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) имеет две серии корней: $\mu_n = 2\pi n + \delta_n$ $(n = 2k-1,\ k = 1, 2, \ldots)$, $\mu_n = 2\pi n - 2/(\pi n) + \delta_n$ $(n = 2k,\ k = 1, 2, \ldots)$, где $|\delta_n| < c_0 n^{-3/2}$. Отсюда следует, что все корни уравнения (8), за исключением, может быть, конечного числа, однократные, таким образом, общее число присоединенных функций задачи (7) конечно. Собственные функции задачи (7) имеют вид

$$u_n(x) = \sin\mu_n x + \frac{4x^2}{\mu_n}\cos\mu_n x + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (9)$$

биортогонально сопряженную систему образуют функции

$$\bar{v}_n(x) = c_n\left(\cos\mu_n x - \frac{4x^2}{\mu_n}\sin\mu_n x + \left(\sin\mu_n\cos\mu_n + \frac{4}{\mu_n}\right)\times\right.$$
$$\left.\times(\sin\mu_n x + i\cos\mu_n x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \quad (10)$$

где $c_1 n < c_n < c_2 n$ $(c_1 > 0,\ c_2 > 0)$. Из (9), (10) вытекает, что для любого связного компакта K интервала (0, 1) справедливо неравенство $C_1(K)|\mu_n| \leqslant \|u_n\|_{L_2(K)}\|v_n\|_{L_2(0,1)} \leqslant C_2(K)|\mu_n|$.

Интересно отметить, что задача

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(0) = u'(1), \end{cases} \tag{11}$$

впервые рассмотренная А. А. Самарским и Н. И. Ионкиным, имеет бесконечно много присоединенных функций, причем система собственных и присоединенных функций задачи (11) образует безусловный базис на отрезке [0, 1] (см. [6, 7]).

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину за внимание к работе.

Литература

1. Ильин В. А., Тихомиров В. В. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2098—2126.
2. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 6. С. 980—1009.
3. Салимов Я. Ш. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 2. С. 277—280.
4. Салимов Я. Ш. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 2. С. 291—295.
5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
6. Ильин В. А. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048—1053.
7. Ионкин Н. И. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294—304.

Всесоюзный заочный машиностроительный институт

Поступила в редакцию 16 апреля 1987 г.

УДК 517.977.5

С. А. МИНЮК

К ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

В данной статье приводятся алгоритмы построения множеств полной управляемости и достижимости линейных стационарных систем с запаздыванием.

1. Постановка основных задач. Рассмотрим объект управления

$$\dot{x}(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t-h) + bu(t) + f(t),\quad t \in T = [0,\ t_1], \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t),\quad t \in [-h,\ 0),\quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь $C_1 = [c_{ij}^1,\ i,\ j = \overline{1,\ n}]$, $C_2 = [c_{ij}^2,\ i,\ j = \overline{1,\ n}]$ — постоянные $n \times n$-матрицы, $b' = [1,\ 0,\ \ldots,\ 0]$ (это всегда достигается с помощью невырожденного преобразования, когда b—n-вектор), в общем случае $t_1 > nh$, $\varphi(\tau)$, $\tau \in [-h,\ 0)$, —непрерывная функция, x_0—заданный n-вектор, $x' = [x_1,\ \ldots,\ x_n]$, $f' = [f_1,\ \ldots,\ f_n]$, $\varphi' = [\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n]$, штрих—операция транспонирования матрицы.

Через F обозначим множество всех кусочно-непрерывных функций, заданных на отрезке T и таких, что для каждой $f \in F$ найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, дающее решение задачи

$$C_2 x(\tau) \equiv 0,\quad t_1 - h \leqslant \tau < t_1;\quad x(t_1) = 0. \tag{3}$$

Задача I. Указать алгоритм построения множества F.

Пусть теперь $f(t)$ — произвольная фиксированная кусочно-непрерывная функция, заданная на отрезке T. Обозначим через Θ множество всех абсолютно непрерывных функций $\theta(\tau)$, заданных на отрезке $[t_1 - h,\ t_1]$ и таких, что для каждой $\theta \in \Theta$ существует кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, такое, что

$$x(\tau) = \theta(\tau),\quad \tau \in [t_1 - h,\ t_1]. \tag{4}$$

Задача II. Указать алгоритм построения множества Θ.

В случае $f(t) \equiv 0$, $t \in T$, и $n = 2$ задача II полностью решена в [1]. Из формулы Коши представления решения системы (1), (2) вытекает, что задача I является обобщением известной задачи полной управляемости однородной системы (1), которая изучалась многими авторами, причем наиболее существенные результаты получены в работах [2—5].