M. I. Gordin, Martingale-coboundary representation for a class of stationary random fields, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2009, Volume 364, 88–108

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 364, 2009 г.

М. И. Гордин

МАРТИНГАЛ–КОГРАНИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Введение

Мартингальная аппроксимация является одним из методов доказательства предельных теорем для стационарных случайных последовательностей. В своём простейшем виде этот метод основывается на представлении исходной последовательности в виде суммы двух других: последовательности мартингал-разностей и последовательности кограниц. Во Введении мы даём краткий очерк этого подхода. Целью настоящей работы является обобщение мартингального метода на некоторый класс случайных полей. Этот материал излагается в следующих двух разделах.

Пусть $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – стационарная (в узком смысле) случайная последовательность. При определённых условиях [4] имеет место представление

$$\xi_n = \eta_n + \zeta_n,$$

где $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – стационарная последовательность мартингал-разностей (это означает, что $E(\eta_n|\eta_{n-1}, \eta_{n-2}, \dots) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$), а $\zeta = (\zeta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – так называемая кограница (или кограничная последовательность), представимая в виде $\zeta_n = \theta_n - \theta_{n-1}, n \in \mathbb{Z}$, с помощью некоторой стационарной последовательности $\theta = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Здесь имеется в виду, что случайные последовательности ξ, η, θ стационарно связаны, то есть что последовательность случайных векторов $\big((\xi_n, \eta_n, \theta_n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ стационарна. Сразу заметим, что вкладом последовательности ζ при изучении поведения распределений сумм $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi_k$ можно пренебречь и что для возможности пренебречь этим вкладом ζ не обязана быть кограницей: известны условия [13, 14] обеспечивающие достаточную для применимости ряда предельных теорем точ-

Настоящая работа частично поддерживалась грантом НШ 638.2008.1 .

ность аппроксимации сумм последовательности ξ суммами последовательности мартингал-разностей η, но не гарантирующие, что их разность ζ является кограницей. Мы, однако, рассмотрим в настоящей работе более узкую ситуацию, в которой "пренебрежимое слагаемое" имеет форму кограницы, поскольку именно этот случай допускает наиболее явное описание.

Условия предельных теорем, доказываемых методом мартингальной аппроксимации, обычно формулируются с помощью фильтрации, заданной на основном вероятностном пространстве и стационарно связанной с последовательностью ξ (это означает, что фильтрация образована последовательностью $\sigma-$алгебр прошлого некоторой вспомогательной стационарной последовательности, стационарно связанной с ξ). Вообще говоря, не предполагается, что ξ адаптирована к этой фильтрации. Адаптированный случай, однако, заслуживает особого внимания, так как в этой ситуации на многие вопросы можно дать более простой и ясный ответ. Предпочтителен этот случай и для знакомства с методом. Если осуществить ещё и "обращение времени" (что не сказывается в стационарной ситуации на справедливости утверждений, связанных со сходимостью по вероятности или сходимостью распределений: такие утверждения верны или неверны для исходной и обращённой последовательностей одновременно), то ситуацию, к которой мы приходим, удобно рассматривать, считая, что все интересующие нас стационарные последовательности порождены одним (необратимым, если исключить тривиальный случай) сохраняющим вероятностную меру преобразованием. Упоминавшаяся выше фильтрация возникает в этой обстановке естественным образом как последовательность $\sigma-$алгебр прообразов измеримых множеств относительно степеней преобразования. Именно эту ситуацию мы взяли за образец при обсуждении многомерных обобщений мартингальной аппроксимации. Заметим, что возможны различные определения многомерных мартингал-разностей (см., например, [1], 2). Наши предположения с неизбежностью приводят нас к одному из них (см. Замечание 2), которое тесно связано с одним из определений, приводимых в [2]. Мы не обсуждем подробно в настоящей работе тему сравнения различных определений (хотя она слегка затрагивается в Замечании 2), поскольку эта тема самым тесным образом связана с предельными теоремами и будет рассмотрена отдельно.

В оставшейся части Введения мы напоминаем, как формулируется в подобной обстановке простейший результат о мартингальной аппроксимации для случайной последовательности. В следующих разделах работы показано, как выглядит аналогичное представление для случайных полей.

Пусть T – сохраняющее меру преобразование вероятностного пространства $(X, \mathcal{F}, P)$. Случайные последовательности, которые мы будем рассматривать, имеют вид $(f \circ T^n)_{n \geqslant 0}$, где f – вещественнозначная измеримая функция на X. Введём необходимые обозначения. Положим для $f \in L_2 = L_2(X, \mathcal{F}, P)$ $Uf = f \circ T$, и пусть $U^* : L_2 \to L_2$ – оператор, сопряжённый оператору U. Операторы U и U^* являются, соответственно, изометрией и коизометрией в L_2, сохраняющими значения постоянных функций и переводящими неотрицательные функции в неотрицательные. Если принять оператор U^* за переходный оператор, то для соответствующей марковской последовательности со значениями в X и стационарным распределением P текущее состояние определяет предшествующее посредством преобразования T. Пусть $E^{\mathcal{G}}$ обозначает оператор условного математического ожидания относительно некоторой $\sigma-$алгебры $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Между операторами U и U^* выполняются соотношения

$$(U^*)^n U^n = I,\, U^n (U^*)^n = E^{T^{-n}\mathcal{F}},\, n \geqslant 0,$$

где I – тождественный оператор.

Предположим теперь, что для функции $f \in L_2$ функция $g \in L_2$ является решением *уравнения Пуассона*

$$f = g - U^* g. \tag{1.1}$$

Тогда, положив $h_1 = U^* g$, мы получим

$$U^* f = h_1 - U^* h_1.$$

Отсюда

$$E^{T^{-1}\mathcal{F}}(f - Uh_1 + h_1) = UU^*(f - Uh_1 + h_1) = U(U^* f - h_1 + U^* h_1) = 0.$$

Поскольку

$$f - Uh_1 + h_1 = g - U^* g - UU^* g + U^* g = g - UU^* g,$$

то мы получаем представление

$$f = h + (U - I)h_1, \tag{1.2}$$

в котором
$$h = g - UU^*g, h_1 = U^*g. \tag{1.3}$$

Ясно, что слагаемые правой части (1.2) порождают стационарные последовательности $(U^n h)_{n\geqslant 0}$ и $(U^{n+1}h_1 - U^n h_1)_{n\geqslant 0}$ обращённых мартингал-разностей и кограниц, соответственно. Представление (1.2) служит основой для применения мартингальной аппроксимации к доказательству центральной предельной теоремы и некоторых других предельных теорем. Известны и основанные на статистической эргодической теореме для оператора U^* условия разрешимости уравнения (1.1).

Замечание 1. Применяя результаты о стационарных мартингал-разностях, полезно располагать выражениями для условной и безусловной дисперсий отдельной мартингал-разности. В связи с этим заметим, учитывая первое из соотношений (1.3), что (ср. [6, 12])

$$E^{T^{-1}\mathcal{F}}|h|^2 = UU^*|g - UU^*g|^2 = UU^*|g|^2 - U|U^*g|^2 \tag{1.4}$$

или
$$E^{T^{-1}\mathcal{F}}|h|^2 = E^{T^{-1}\mathcal{F}}|g|^2 - |E^{T^{-1}\mathcal{F}}g|^2. \tag{1.5}$$

Из (1.4), в частности, следует, что

$$E|h|^2 = E|g|^2 - E|U^*g|^2. \quad \square \tag{1.6}$$

В предлагаемой работе мы рассматриваем многомерный аналог описанной выше ситуации. Мы исследуем условия, обеспечивающие справедливость представления только что описанного типа для некоторого класса случайных полей, и вопрос о единственности такого представления, но мы не затрагиваем приложений к предельным теоремам. Хотя основной интерес представляет собой случай квадратично интегрируемых случайных величин, наши рассмотрения ведутся в пространствах L_p, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$ или $1 \leqslant p < \infty$. В Предложении 1 приводится многомерное обобщение (2.3) представления (1.2) и соотношений (1.3). При этом предполагается разрешимость уравнения (2.2), являющегося обобщением уравнением Пуассона. Условия разрешимости уравнения (2.2) приводятся в Предложениях 2 и 3. Обсуждение используемого в работе определения многомерных мартингал-разностей и пояснения к представлению (2.3), объясняющие его полезность при исследовании асимптотики, содержатся в Замечаниях 2 и 3, соответственно.

Применения к предельным теоремам осуществляются в отдельных публикациях, подготавливаемых автором совместно с М. Вебером [11] и с Х. Делингом и М. Денкером [9]. В первой из них речь идёт о применении специального случая представления, описываемого в настоящей работе, к рассмотренной в [10] задаче, связанной с так называемыми последовательностями Бейкера. Применение мартингального подхода позволяет дать полный анализ возможных в этой задаче вырождений. Во второй работе, посвящённой вводимым в ней U- и V-статистикам сохраняющих меру преобразований, формализм, параллельный развиваемому в настоящей статье, применяется к некоторым функциональным пространствам (отличным от пространств L_p), выбор которых определяется особенностями рассматриваемой в этой работе ситуации.

2. Обозначения и формулировки результатов

Пусть $T_1,\ldots,T_d$ – попарно перестановочные сохраняющие меру преобразования вероятностного пространства $(X,\mathcal{F},P)$. Обозначим через $\mathbb{Z}_+^d$ аддитивную полугруппу $d-$мерных векторов с неотрицательными целыми компонентами. Задание преобразований $T_1,\ldots,$ T_d с указанными свойствами эквивалентно заданию соотношением $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_d)\mapsto T^{\mathbf{n}}=T_1^{n_1}\cdots T_d^{n_d}$, $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d$, сохраняющего меру действия полугруппы $\mathbb{Z}_+^d$ на пространстве $(X,\mathcal{F},P)$.

Пусть $\mathcal{S}_d$ $(\mathcal{S}_{r,d})$ обозначает множество всех (соответственно, всех r-элементных) подмножеств множества $\mathbb{N}(d)=\{1,\ldots,d\}$. Определим для каждого $S\in\mathcal{S}_d$ подполугруппу $\mathbb{Z}_+^{d,S}\subseteq\mathbb{Z}_+^d$ соотношением

$$\mathbb{Z}_+^{d,S}=\{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{Z}_+^d : n_k=0 \text{ для всех } k\notin S\}.$$

Пусть $p\in[1,\infty]$. Для всех $f\in L_p=L_p(X,\mathcal{F},P)$ и $k\in\mathbb{N}(d)$ положим

$$U_kf=f\circ T_k.$$

Для $p\in[1,\infty)$ и $k\in\mathbb{N}(d)$ обозначим через U_k^* сопряжённый оператору U_k оператор, действующий в пространстве L_q, где $q=p/(1-p)\in(1,\infty]$. Тем же символом U_k^* обозначим оператор в L_1, сопряжённым которому является оператор $U_k: L_\infty\to L_\infty$ (существование такого оператора легко выводится из того, что T_k сохраняет меру). Каждый оператор U_k действует во всех пространствах L_p как изометрия, сохраняющая значения постоянных функций и переводящая неотрицательные функции в неотрицательные. Следовательно, U_k^* действует во всех этих пространствах как сжатие, сохраняющее неотрицательность и значения постоянных. Далее, для каждого $k \in \mathbb{N}(d)$ и $n \geqslant 0$ мы имеем, как отмечалось во Введении,

$$U_k^{*n} U_k^n = I, U_k^n U_k^{*n} = E^{T_k^{-n}\mathcal{F}}. \tag{2.1}$$

Если для всех $i, j \in \mathbb{N}(d)$, $i \neq j$, мы имеем также

$$U_i U_j^* = U_j^* U_i,$$

то мы будем говорить, что преобразования $T_1, \ldots, T_d$ являются *вполне перестановочными*. Это свойство, в отличие от перестановочности, зависит от вероятностной меры P. Из него следует, что попарно перестановочны условные ожидания

$$\left(E^{T_k^{-n}\mathcal{F}}\right)_{n\geqslant 0, k\in\mathbb{N}(d)}.$$

Введём для $n \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{N}(d)$ обозначения

$$\mathcal{F}_k^n = T_k^{-n}\mathcal{F}, E_k^n = E^{\mathcal{F}_k^n}$$

и положим

$$\mathcal{F}_k^\infty = \cap_{n=0}^\infty \mathcal{F}_k^n, E_k^\infty = E^{\mathcal{F}_k^\infty}.$$

Отмеченная выше перестановочность предельным переходом распространяется на семейство

$$\left(E_k^n\right)_{0\leqslant n\leqslant\infty,\, k=1,\ldots,d}.$$

Далее, пусть $\overline{\mathbb{Z}_+^d}$ – пополнение $\mathbb{Z}_+^d$, компоненты $n_1, \ldots, n_d$ элементов $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ которого принимают значения $0, 1, \ldots, \infty$. Для каждого $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \overline{\mathbb{Z}_+^d}$, положив

$$\mathcal{F}^{\mathbf{n}} = \bigcap_{k=1}^d \mathcal{F}_k^{n_k},\ E^{\mathbf{n}} = E^{\mathcal{F}^{\mathbf{n}}},$$

мы получаем, что

$$E^{\mathbf{n}} = \prod_{k=1}^{d} E_k^{n_k}.$$

Замечание 2. Пусть для $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \overline{\mathbb{Z}_+^d}$, соотношение $\mathbf{m} \leqslant \mathbf{n}$ по определению означает, что $m_1 \leqslant n_1, \dots, m_d \leqslant n_d$. Ясно, что $\mathcal{F}^{\mathbf{n}} \subseteq \mathcal{F}^{\mathbf{m}}$, если $\mathbf{m} \leqslant \mathbf{n}$. Иными словами, $\left(\mathcal{F}^{\mathbf{n}}\right)_{\mathbf{n} \in \overline{\mathbb{Z}_+^d}}$ – это убывающая фильтрация, параметризованная частично упорядоченным множеством $\overline{\mathbb{Z}_+^d}$. Вероятностный смысл отмеченной выше перестановочности условных ожиданий таков: если $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \overline{\mathbb{Z}_+^d}$ и $\mathbf{n} = \mathbf{l} \bigvee \mathbf{m}$, то $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}^{\mathbf{l}}$ и $\mathcal{F}^{\mathbf{m}}$ условно независимы относительно $\mathcal{F}^{\mathbf{n}}$ (здесь $\bigvee$ – операция взятия покоординатного максимума в $\overline{\mathbb{Z}_+^d}$). Подобное условие на фильтрацию (обычно возрастающую, а не убывающую, как в нашем случае) хорошо известно (см., например, [2]).

Теперь мы коснёмся определения обращённых мартингал-разностей, к которому приводит нижеследующее Предложение 1. Мы будем называть семейство $\left(\xi_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}^{\mathbf{n}}\right)_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^d}$ случайных величин, определённых на $(X, \mathcal{F}, P)$, и $\sigma-$алгебр, содержащихся в $\mathcal{F}$, семейством *обращённых мартингал-разностей*, если

(1) для любого $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^d$ случайная величина $\xi_{\mathbf{n}}$ измерима относительно $\mathcal{F}^{\mathbf{n}}$;

(2) $E^{\mathcal{F}^{\mathbf{m}}} \xi_{\mathbf{n}} = 0$ всякий раз, когда $\mathbf{m} \not\leq \mathbf{n}$.

Это определение без изменений переносится на любое частично упорядоченное множество. Подобное определение также встречается в литературе. В работе [2], посвящённой мартингалам в $\mathbb{R}^2$, вводятся, среди прочих, понятия 1- и 2-мартингала. Приведённое выше определение при $d = 2$ является аналогом (для дискретного и обращённого "времени") свойства процесса быть одновременно 1- и 2-мартингалом. Можно также заметить, что сформулированное выше определение по налагаемым им требованиям располагается между более ограничительным, принятым в [1], и более широким, использованным в [7]. При этом мы не касаемся вопроса о требованиях, предъявляемых к фильтрации. Как указывалось выше, в рассматриваемой нами ситуации имеет место (в общем, довольно специальное) свойство условной независимости. □

В дальнейшем мы на протяжении всей работы предполагаем, что преобразования $T_1, \dots, T_d$ являются вполне перестановочными.

Пусть для $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$

$$U^{\mathbf{n}} = U_1^{n_1} \cdots U_d^{n_d}, \ U^{*\mathbf{n}} = (U^{\mathbf{n}})^*.$$

Для каждого $S \in \mathcal{S}_d$ обозначим через $\mathcal{I}_S$ σ-алгебру тех $A \in \mathcal{F}$, для которых $T_k^{-1} A = A$ при всех $k \in S$, и через $E^{\mathcal{I}_S}$ – соответствующее условное ожидание. Заметим, что для пустого множества $\varnothing$ мы имеем $\mathcal{I}_\varnothing = \mathcal{F}$ и $E^{\mathcal{I}_\varnothing} = I$. Мы будем писать $\mathcal{I}_k$ вместо $\mathcal{I}_{\{k\}}$ для $k \in \mathbb{N}(d)$. Пусть $\mathbf{1}_d = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}_+^d$. Положим для $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_d) \in \mathbb{Z}_+^d$

$$S_{\mathbf{N}} = \sum_{0 \leqslant \mathbf{n} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} U^{\mathbf{n}}, \ S_{\mathbf{N}}^* = \sum_{0 \leqslant \mathbf{n} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} U^{*\mathbf{n}},$$

если $\mathbf{1}_d \leqslant \mathbf{N}$, и

$$S_{\mathbf{N}} = 0, \ S_{\mathbf{N}}^* = 0$$

в противном случае.

Следующее утверждение представляет собой многомерный аналог представления в виде суммы мартингал-разности и кограницы, обсуждавшегося во Введении. Пояснения к этому представлению даются ниже в Замечании 3.

Предложение 1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и пусть для функции $f \in L_p$ функция $g \in L_p$ является решением уравнения*

$$f = \Big(\prod_{k=1}^{d} (I - U_k^*) \Big) g. \tag{2.2}$$

Тогда f может быть представлена в виде

$$f = \sum_{S \in \mathcal{S}_d} \Big(\prod_{k \in S} (U_k - I) \prod_{l \notin S} (I - U_l U_l^*) \Big) h_S, \tag{2.3}$$

где $h_S \in L_p$ определяются соотношениями

$$h_S = \Big(\prod_{m \in S} U_m^* \Big) g, \ S \in \mathcal{S}_d. \tag{2.4}$$

Обратно, если для некоторой $g \in L_p$ функция $f \in L_p$ допускает представление (2.3) с функциями h_S, определёнными соотношениями (2.4), то g является решением уравнения (2.2).

Если функция $f \in L_p$ *допускает два представления вида* (2.3) *с функциями* $(h_S)_{S\in\mathcal{S}_d}$ *и* $(h'_S)_{S\in\mathcal{S}_d}$, *соответственно (при этом выполнение соотношений типа* (2.4) *заранее не предполагается), то тогда для всех* $S \in \mathcal{S}_d$

$$\Big(\prod_{k\in S}(U_k - I)\prod_{l\notin S}(I - U_lU_l^*)\Big)h'_S = \Big(\prod_{k\in S}(U_k - I)\prod_{l\notin S}(I - U_lU_l^*)\Big)h_S.$$

Замечание 3. Здесь поясняется смысл разложения (2.3) и роль его компонент в асимптотике сумм

$$S_{\mathbf{N}}f = \sum_{0\leqslant\mathbf{n}\leqslant\mathbf{N}-\mathbf{1}_d} U^{\mathbf{n}}f. \tag{2.5}$$

Пусть $S \in \mathcal{S}_{r,d}$. Слагаемое

$$A_S = \Big(\prod_{k\in S}(U_k - I)\prod_{l\notin S}(I - U_lU_l^*)\Big)h_S$$

правой части формулы 2.3 удовлетворяет равенствам

$$E_l^1 A_S = 0, l \notin S. \tag{2.6}$$

Чтобы проверить этот факт, нужно, пользуясь перестановочностью, записать A_S в виде $A_S = \big(\prod_{l\notin S}(I - U_lU_l^*)\big)B_S$ и применить соотношения $U_lU_l^*(I - U_lU_l^*) = 0$. Отсюда следует, что для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^d$ семейство $\big(U^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}A_S, \mathcal{F}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}\big)_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^{d,\mathbf{N}(d)\setminus S}}$ является $(d-r)$-мерным стационарным случайным полем обращённых мартингал-разностей (в смысле Замечания 2.) Последнее означает, что для $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{d,\mathbf{N}(d)\setminus S}$ случайная величина $U^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}A_S$ измерима относительно $\mathcal{F}^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$ и удовлетворяет соотношениям

$$E^{\mathbf{m}+\mathbf{n}+\mathbf{e}_l}U^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}A_S = 0, l \notin S.$$

Здесь $\mathbf{e}_l = (\delta_{l,1}, \ldots, \delta_{l,d})$, где $\delta_{l,m} = 1$, если $l = m$, и $\delta_{l,m} = 0$, если $l \neq m$.

Далее, для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^d$ семейство $(U^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}A_S)_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^{d,S}}$ является r-мерным стационарным случайным полем r−кограниц, то есть имеет форму $\big(U^{\mathbf{n}}\big(\prod_{k\in S}(U_k-I)\big)C_{S,\mathbf{m}}\big)\big)_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^{d,S}}$ Из этого, в частности, следует, что суммы

$$\sum_{\{\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{Z}_+^{d,S}:\, n_k\in[0,N_k-1] \text{ для всех } k\in S\}} U^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}A_S$$

ограничены в L_p. Оставляя анализ распределений сумм (2.5) до другого случая, опишем на эвристическом уровне роль разложения (2.3) в этом вопросе. Мы имеем, в силу (2.3),

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{N}}f &= S_{\mathbf{N}}\Big(\sum_{S\in\mathcal{S}_d}\big(\prod_{k\in S}(U_k-I)\prod_{l\notin S}(I-U_lU_l^*)\big)h_S\Big) \\ &= S_{\mathbf{N}}\sum_{S\in\mathcal{S}_d}A_S=\sum_{S\in\mathcal{S}_d}S_{\mathbf{N}}A_S. \end{aligned} \tag{2.7}$$

При фиксированном S поведение сумм $S_{\mathbf{N}}A_S$ при $\mathbf{N}=(N_1,\dots,N_d)\to\infty$ зависит от наличия моментов и некоторых дополнительных обстоятельств. Если $p\geqslant 2$, то упоминавшиеся выше кограничные свойства A_S гарантируют ограниченность L_2-норм случайных величин

$$\big(\prod_{l\notin S}N_l\big)^{-1/2}S_{\mathbf{N}}A_S. \tag{2.8}$$

Более того, если действие $(T^{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d}$ является перемешивающим и $\big(\prod_{l\notin S}(I-U_lU_l^*)\big)h_S\neq 0$ (будем называть это свойство функции f S-*невырожденностью*), то L_2-нормы этих величин имеют положительный предел (отметим, хотя нам это не понадобится, что к ним применима центральная предельная теорема, в которой квадрат упомянутого предела является дисперсией предельного гауссовского распределения). В случае $\emptyset-$невырожденности слагаемое

$$S_{\mathbf{N}}A_{\varnothing}=S_{\mathbf{N}}\big(\prod_{l=1}^{d}(I-U_lU_l^*)\big)g$$

играет доминирующую роль в сумме $\sum_{S\in\mathcal{S}_d}S_{\mathbf{N}}A_S$. Действительно, обозначая через $|\cdot|_2$ L_2-норму, мы имеем

$$\sigma_{\varnothing}^2(f)=\big|\big(\prod_{l=1}^{d}(I-U_lU_l^*)\big)g\big|_2^2\ \Big(=\sum_{r=0}^{d}(-1)^r\sum_{S\in\mathcal{S}^{r,d}}\big|\prod_{k\in S}U_k^*g\big|_2^2\Big). \tag{2.9}$$

Поскольку обращённые мартингал-разности $\left(U^{\mathbf{n}}\left(\prod_{l=1}^{d}(I-U_l U_l^*)\right)g\right)_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d}$ взаимно ортогональны, для $\mathbf{N}=(N_1,\dots,N_d)$ мы получаем

$$\left|S_{\mathbf{N}}A_\varnothing\right|_2^2=\Bigl(\prod_{k=1}^{d}N_k\Bigr)\sigma_\varnothing^2(f).$$

Сравнивая эту величину с (2.8) при $S\neq\varnothing$, мы убеждаемся в доминировании $S_{\mathbf{N}}A_\varnothing$ в сумме $S_{\mathbf{N}}f$ при $\mathbf{N}\to\infty$, если $\sigma_\varnothing^2(f)>0$. На этом обстоятельстве основано доказательство предельных теорем для сумм $S_{\mathbf{N}}f$ посредством сведения вопроса к случаю мартингал-разностей. Оно же показывает, что $\sigma_\varnothing^2(f)$ не зависит от выбора представления типа (2.3) и что принятое обозначение корректно. Более того, ясно, что порождающая d-мерное поле обращённых мартингал-разностей величина $A_\varnothing$ определена однозначно. Этот анализ асимптотики можно продолжить, чтобы получить утверждение о единственности слагаемых в представлении типа (2.3) способом, отличным от использованного в доказательстве Предложения 1. □

В остальной части настоящего раздела обсуждаются условия разрешимости уравнения (2.2) и вопрос об описании множества его решений.

Следующее замечание понадобится нам в ходе доказательства Предложения 2 при идентификации предела в статистической эргодической теореме для операторов U_k^*.

Замечание 4. Здесь мы резюмируем некоторые общие свойства рассматриваемых действий. Из перестановочности преобразований $T_1,\dots,T_d$ следует перестановочность условных ожиданий $E^{\mathcal{I}_S}$, $S\in\mathcal{S}_d$. Заметим, что для каждого $k\in\mathbb{N}(d)$

$$\mathcal{I}_k\subseteq\mathcal{F}_k^\infty. \tag{2.10}$$

Теперь мы желаем выяснить взаимоотношение между инвариантными элементами операторов U_k и U_k^*. Если для некоторых $k\in\mathbb{N}(d)$ и $f\in L_p$ мы имеем $U_kf=f$, то, применяя U_k^* к обеим частям последнего равенства, мы видим, с учётом соотношения $U_k^*U_k=I$, что $U_k^*f=f$. Обратно, пусть $U_k^*f=f$. Тогда для всех $n\geqslant 0$ $U_k^{*n}f=f$, $U_k^nU_k^{*n}f=U_k^nf$ и, следовательно, $E_k^nf=U_k^nf$. Поскольку U_k – изометрия, а условное ожидание сохраняет L_p-норму функции только если оно действует на эту функцию тождественно, то отсюда следует, что

f измерима относительно $\mathcal{F}_k^n$, а, значит, ввиду произвольности n, и относительно $\mathcal{F}_k^\infty$. Далее, из соотношений между U_k и U_k^* следует, что на пространстве L_p-функций, измеримых относительно $\mathcal{F}_k^\infty, U_k$ и U_k^* действуют как взаимно обратные изометрии, откуда вытекает, что $U_k f = f$. Итак, операторы U_k и U_k^* имеют одни и те же инвариантные элементы в пространствах L_p. Это же заключение справедливо при любом $S \in \mathcal{S}_d$ и для инвариантных элементов двух групп операторов $\{U_k\}_{k\in S}$ и $\{U_k^*\}_{k\in S}$. Таким образом, для любого $S \in \mathcal{S}_d$ и любого $p \in [1,\infty]$ мы имеем $\{f \in L_p : U_k^* f = f, k \in S\} = \{f \in L_p : U_k f = f, k \in S\} = \{f \in L_p : f \text{ измерима относительно } \mathcal{I}_S\}$. $\square$

Функцию $g \in L_p$ назовём *нормальной*, если

$$g = \Big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k}) \Big)\, g.$$

Нормальность $g \in L_p$ равносильна выполнению соотношений

$$E^{\mathcal{I}_k} g = 0, k \in \mathbb{N}(d).$$

Обозначим через $\mathrm{Ker}(A)$ и $\mathrm{Ran}(A)$, соответственно, ядро и область значений линейного оператора A.

Предложение 2. *Пусть $p \in [1,\infty]$.*

(1) *Всякая $f \in L_p$, для которой уравнение* (2.2) *имеет решение $g \in L^p$, нормальна.*

(2) *Функция $g \in L_p$ тогда и только тогда является решением уравнения* (2.2), *когда она может быть представлена в виде $g = g' + e$, где g' – нормальное решение уравнения* (2.2), *а $e \in \mathrm{Ker}\big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k})\big)$. Уравнение* (2.2) *имеет не более одного нормального решения.*

(3) *Пусть теперь $p < \infty$ и $f \in L_p$ нормальна. Уравнение* (2.2) *имеет решение из L^p тогда и только тогда, когда существует по норме пространства L_p предел*

$$\lim_{\mathbf{N}=(N_1,\dots,N_d)\to\infty} (N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0\leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N}-\mathbf{1}_d} S_{\mathbf{M}}^* f. \qquad (2.11)$$

Этот предел даёт нормальное решение уравнения (2.2).

Усилив условие нормальности, можно упростить критерий разрешимости уравнения (2.2) и процедуру построения его решения. Назовём функцию $f \in L_1$ *строго нормальной*, если $f = \prod_{k\in\mathbb{N}_d} (I - E_k^\infty) f$

(равносильное свойство: для всех $k \in \mathbb{N}(d)$ $E_k^\infty f = 0$.) Строгая нормальность сильнее нормальности, поскольку $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{F}_k^\infty$ (напомним, что $E_k^\infty = E^{\mathcal{F}_k^\infty}$). Строгая нормальность $f \in L_p$ характеризуется любым из свойств

$$E^{(n_1,\dots,n_d)} f \underset{\max(n_1,\dots,n_d)\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.12}$$

и

$$U^{*(n_1,\dots,n_d)} f \underset{\max(n_1,\dots,n_d)\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.13}$$

Предложение 3. *Пусть $p \in [1, \infty)$.*

(1) *Если функция $f \in L_p$ может быть представлена в виде (2.2), где $g \in L_p$ строго нормальна, то f строго нормальна, а g представима в виде*

$$g = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d} U^{*\mathbf{n}} f \ \Big(\overset{\text{def}}{=} \lim_{\mathbf{N}=(N_1,\dots,N_d)\to\infty} S_{\mathbf{N}}^* f\Big), \tag{2.14}$$

причём ряд сходится по норме пространства L_p. Уравнение (2.2) имеет не более одного строго нормального решения из L_p.

(2) *Обратно, пусть для некоторой строго нормальной $f \in L_p$ ряд (2.14) сходится по L_p-норме. Тогда сумма ряда (2.14) является строго нормальным решением уравнения (2.2).*

(3) *Для всякой строго нормальной $f \in L_p$ из сходимости ряда (2.14) следует сходимость всех рядов*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^{d,S}} U^{*\mathbf{n}} f \ \Big(\overset{\text{def}}{=} \lim_{N_k\to\infty,\, k\in S} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^{d,S}} U^{*\mathbf{n}} f\Big), S \in S_d, \tag{2.15}$$

где $\mathbb{Z}_+^{d,S} = \{(n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{Z}_+^d : n_k = 0$ для всех $k \notin S\}$.

Замечание 5. Для $d \geqslant 2$ сходимость ряда (2.14) при принятом в Предложении 3 понимании этой сходимости не гарантирует справедливости (2.13), то есть строгой нормальности f. Если, однако, в утверждениях (2) и (3) Предложения 3 в дополнение к сходимости ряда (2.14) потребовать ещё сходимость рядов (2.15) для одноэлементных множеств S, то требование строгой нормальности f в (2) и (3) можно опустить. □

Замечание 6. Предложения 2 и 3 можно распространить на случай пространства L_∞, если вместо сходимости рядов по норме пространства L_∞ рассматривать их сходимость в L_1−топологии этого пространства. Далее, в Предложении 2 при $1 < p < \infty$ требование существования предела (2.11) как достаточное условие разрешимости уравнения (2.2) можно ослабить до требования ограниченности в L_p соответствующей последовательности.

Пример 2.1. *Пусть $d = 2$. Если для строго нормальной функции $f \in L_p$ ряд $\sum\limits_{n_1,n_2=0}^{\infty} U_1^{*n_1} U_2^{*n_2} f$ сходится по L_p-норме, то f допускает представление вида*

$$f = C_\varnothing + (U_1 - I)C_1 + (U_2 - I)C_2 + (U_1 - I)(U_2 - I)C_{1,2},$$

где $C_\varnothing, C_1, C_2, C_{1,2} \in L_p$ строго нормальны и

$$E^{T_i^{-1}\mathcal{F}} C_\varnothing = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$E^{T_2^{-1}\mathcal{F}} C_1 = 0, E^{T_1^{-1}\mathcal{F}} C_2 = 0.$$

Если каждое из преобразований T_1, T_2 эргодично, то строго нормальные функции $C_\varnothing, C_1, C_2, C_{1,2}$ определены однозначно. □

3. Доказательства

Доказательствам Предложений 1–3 предпошлём следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любого $S \in \mathcal{S}_d$ имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}&\Big(\prod_{k\in S}(I - E^{\mathcal{I}_k})\Big)\Big(\prod_{k\in S}(I - U_k^*)\Big)\\ &= \Big(\prod_{k\in S}(I - U_k^*)\Big)\Big(\prod_{k\in S}(I - E^{\mathcal{I}_k})\Big) = \prod_{k\in S}(I - U_k^*),\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}&\Big(I - \prod_{k\in S}(I - E^{\mathcal{I}_k})\Big)\Big(\prod_{k\in S}(I - U_k^*)\Big)\\ &= \Big(\prod_{k\in S}(I - U_k^*)\Big)\Big(I - \prod_{k\in S}(I - E^{\mathcal{I}_k})\Big) = 0,\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\mathrm{Ker}\Big(\prod_{k\in S}(I - U_k^*)\Big) = \mathrm{Ker}\Big(\prod_{k\in S}(I - U_k)\Big) = \mathrm{Ker}\Big(\prod_{k\in S}(I - E^{\mathcal{I}_k})\Big). \tag{3.3}$$

Доказательство Леммы 1. При любом $k \in \mathbb{N}(d)$ мы имеем $E^{\mathcal{I}_k} U_k^* = E^{\mathcal{I}_k}$ (это следует, например, из очевидного равенства $U_k E^{\mathcal{I}_k} = E^{\mathcal{I}_k}$, применённого к двойственному пространству). Отсюда $(I - E^{\mathcal{I}_k})(I - U_k^*) = I - U_k^*$. Перемножение этих соотношений для всех $k \in S$ (порядок сомножителей не имеет значения вследствие перестановочности) даёт (3.1). Вычитая из оператора $\prod_{k \in S}(I - U_k^*)$ части равенства (3.1), получаем (3.2).

Докажем (3.3). Согласно Замечанию 4 для всех $k \in \mathbb{N}(d)$ имеют место соотношения $\operatorname{Ker}(I - U_k^*) = \operatorname{Ker}(I - U_k) = \operatorname{Ker}(I - E^{\mathcal{I}_k})$. Равенства (3.3) следуют из этих соотношений для $k \in S$ и того факта, что ядро произведения перестановочных ограниченных операторов является замыканием суммы их ядер. $\square$

Доказательство Предложения 1. Поскольку для g выполнено (2.2), мы имеем

$$
\begin{aligned}
f =& \Big(\prod_{k=1}^{d}(I - U_k^*)\Big)g = \Big(\prod_{k=1}^{d}[(I - U_k U_k^*) + (U_k - I)U_k^*)]\Big)g \\
=& \sum_{S \in \mathcal{S}_d} \Big(\prod_{k \in S}(U_k - I)\prod_{l \notin S}(I - U_l U_l^*)\prod_{m \in S} U_m^*\Big)g \\
=& \sum_{S \in \mathcal{S}_d} \Big(\prod_{k \in S}(U_k - I)\prod_{l \notin S}(I - U_l U_l^*)\Big)h_S,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где $h_S = \big(\prod_{m \in S} U_m^*\big)g$.

Обращая эту цепочку равенств, мы убеждаемся, что из (2.3) и (2.4) следует, что g удовлетворяет соотношению (2.2).

Перейдём к доказательству утверждения об однозначной определённости слагаемых в представлении (2.3). Положим $H_S = h'_S - h_S$. Беря разность имеющихся представлений, мы получаем соотношение

$$
\sum_{S \in \mathcal{S}_d} \Big(\prod_{k \in S}(U_k - I)\prod_{l \notin S}(I - U_l U_l^*)\Big)H_S = 0, \tag{3.5}
$$

и нам достаточно вывести из него, что для каждого $S \in \mathcal{S}_d$

$$
\Big(\prod_{k \in S}(U_k - I)\prod_{l \notin S}(I - U_l U_l^*)\Big)H_S = 0. \tag{3.6}
$$

На нулевом шаге применим оператор $\prod\limits_{k\in\mathbb{Z}_d} U_k^*$ к обеим частям равенства (3.5), учитывая перестановочность операторов с различными индексами и соотношения $U_l^*(I-U_lU_l^*)=0, U_l^*(U_l-I)=I-U_l^*, l\in\mathbb{Z}(d)$. Ясно, что оператор аннулирует слагаемые левой части (3.5), соответствующие всем $S\neq\mathbb{Z}(d)$. Отсюда

$$\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}_d}(I-U_k^*)\Big)H_{\mathbb{Z}(d)}=0,$$

что в силу первого из равенств (3.3) даёт

$$\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}_d}(U_k-I)\Big)H_{\mathbb{Z}(d)}=0.$$

Мы получили, тем самым, соотношение (3.6) для $S=\mathbb{Z}(d)$. Вычитая полученное соотношение “уровня d” из (3.5), мы получаем

$$\sum_{r=0}^{d-1}\sum_{S\in\mathcal{S}_{r,d}}\Big(\prod_{k\in S}(U_k-I)\prod_{l\notin S}(I-U_lU_l^*)\Big)H_S=0. \tag{3.7}$$

На шаге номер 1 мы последовательно применяем к полученному равенству d произведений

$$U_2^*\cdots U_d^*,\, U_1^*U_3^*\cdots U_d^*,\dots,\, U_1^*\cdots U_{d-1}^*,$$

в каждом из которых перемножается $d-1$ оператор. Это даёт равенства

$$\Big(\prod_{k\in S}(I-U_k^*)\prod_{l\notin S}(I-U_lU_l^*)\Big)H_S=0, S\in\mathcal{S}_{d-1,d}.$$

Снова пользуясь (3.3), мы видим, что

$$\Big(\prod_{k\in S}(U_k-I)\prod_{l\notin S}(I-U_lU_l^*)\Big)H_S=0, S\in\mathcal{S}_{d-1,d}.$$

Мы получили, таким образом, все d равенств уровня $d-1$ из (3.6). Вычтем их из (3.7) и продолжим процесс. На r-ом шаге мы получим все те C_d^r соотношений из (3.6), которые соответствуют $S\in\mathcal{S}_{d-r,d}$. Процесс завершается на шаге номер d получением соотношения (3.6) для $S=\varnothing$. $\square$

Доказательство Предложения 2. Из соотношений (2.2) и (3.1) следует, что

$$
\begin{aligned}
f &= \Big(\prod_{l=1}^{d}(I - U_l^*)\Big) g = \Big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k})\Big)\Big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - U_k^*)\Big) g \\
&= \Big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k})\Big) f,
\end{aligned}
$$

что доказывает (1).

Пусть теперь $g \in L_p$ – некоторое решение уравнения (2.2). Положим $g' = \big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k})\big) g$ и $e = \big(I - \prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k})\big) g$. Из (3.1) при $S = \mathbb{N}(d)$ следует, что g' – решение (2.2). Это решение нормально, поскольку $\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k}) g' = g'$. Пусть g_1 и g_2 – нормальные решения уравнения (2.2). Тогда $g_2 - g_1 \in \operatorname{Ker}\big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - U_k^*)\big)$, что, с учётом (3.3), даёт $g_2 - g_1 \in \operatorname{Ker}(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k}))$. С другой стороны, вследствие нормальности решений g_1 и g_2 мы имеем $g_2 - g_1 \in \operatorname{Ran}\big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - E^{\mathcal{I}_k})\big)$. Отсюда $g_2 - g_1 = 0$, чем доказывается (2).

Пусть f имеет представление (2.2). Согласно только что доказанному пункту (2), мы можем (и будем) считать функцию g в этом представлении нормальной. Положим $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_d)$ и $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_d)$. Тогда мы имеем

$$
S_{\mathbf{M}}^* f = \sum_{0 \leqslant \mathbf{n} \leqslant \mathbf{M} - \mathbf{1}_d} U^{*\mathbf{n}} f = \Big(\prod_{k=1}^{d}\Big(\sum_{n=0}^{M_k - 1} U_k^{*n}\Big)\Big) f = \Big(\prod_{k=1}^{d}\big(I - U_k^{*M_k}\big)\Big) g
$$

и

$$
\begin{aligned}
&(N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} S_{\mathbf{M}}^* f \\
&= (N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} \Big(\prod_{k=1}^{d}\big(I - U_k^{*M_k}\big)\Big) g \\
&= (N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S \in \mathcal{S}_{r,d}} \Big(\prod_{l \in S} U_l^{*M_l}\Big) g
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S \in \mathcal{S}_{r,d}} (N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} \Big(\prod_{l \in S} U_l^{*M_l} \Big) g$$

$$= \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S \in \mathcal{S}_{r,d}} \Big(\prod_{l \in S} \Big(N_l^{-1} \sum_{M_l=0}^{N_l-1} U_l^{*M_l} \Big) \Big) g$$

$$\underset{\mathbf{N}\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S \in \mathcal{S}_{r,d}} E^{\mathcal{I}_S} g, \tag{3.8}$$

где на последнем этапе мы воспользовались многопараматрической статистической эргодической теоремой. В силу нормальности g $E^{\mathcal{I}_S} g = 0$ для всех непустых S, в то время как $E^{\mathcal{I}_\varnothing} g = g$.

Обратно, пусть для нормальной $f \in L_p$ существует по L_p−норме предел

$$\lim_{\mathbf{N}=(N_1,\ldots,N_d)\to\infty} (N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} S^*_{\mathbf{M}} f = g. \tag{3.9}$$

Операторы $U_1^*, \ldots, U_d^*$ переводят нормальные функции в нормальные. Поэтому g нормальна, как предел нормальных функций. Далее, действуя как в (3.8), мы получаем

$$\Big(\prod_{k \in \mathbb{N}(d)} (I - U_k^*) \Big) g$$

$$= \lim_{\mathbf{N}=(N_1,\ldots,N_d)\to\infty} (N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} S^*_{\mathbf{M}} \Big(\prod_{k \in \mathbb{N}(d)} (I - U_k^*) \Big) f$$

$$= \lim_{\mathbf{N}=(N_1,\ldots,N_d)\to\infty} (N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} \Big(\prod_{k=1}^{d} \big(I - U_k^{*M_k} \big) \Big) f$$

$$= \lim_{\mathbf{N}=(N_1,\ldots,N_d)\to\infty} (N_1 \cdots N_d)^{-1} \sum_{0 \leqslant \mathbf{M} \leqslant \mathbf{N} - \mathbf{1}_d} \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S \in \mathcal{S}_{r,d}} \Big(\prod_{l \in S} U_l^{*M_l} \Big) f$$

$$= \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \lim_{\mathbf{N}=(N_1,\ldots,N_d)\to\infty} \sum_{S \in \mathcal{S}_{r,d}} \Big(\prod_{l \in S} \Big(N_l^{-1} \sum_{M_l=0}^{N_l-1} U_l^{*M_l} \Big) \Big) f$$

$$= \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S \in \mathcal{S}_{r,d}} E^{\mathcal{I}_S} f = f. \tag{3.10}$$

Доказательство Предложения 3. Подпространство строго нормальных L_p−функций инвариантно относительно операторов $U_k^*, k = 1, \ldots, d$. Отсюда ясно, что f строго нормальна. Далее,

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leqslant \mathbf{n}\leqslant \mathbf{N}-\mathbf{1}_d} U^{*\mathbf{n}} f = \sum_{0\leqslant \mathbf{n}\leqslant \mathbf{N}-\mathbf{1}_d} U^{*\mathbf{n}} \Big(\prod_{k=1}^{d} (I - U_k^*)\Big) g \\ &= \Big(\prod_{k=1}^{d} \Big((I - U_k^*) \sum_{n_k=0}^{N_k-1} U_k^{*\,n_k}\Big)\Big) g = \Big(\prod_{k=1}^{d} \big(I - U_k^{*N_k}\big)\Big) g \\ &= \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S\in\mathcal{S}_{r,d}} \prod_{k\in S} U_k^{*N_k} g \underset{\mathbf{N}\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S\in\mathcal{S}_{r,d}} \prod_{k\in S} E_k^{\infty} g = g, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где последнее равенство следует из строгой нормальности g. Из этого представления вытекает единственность нормального решения (она следует также из Предложения (3)), и (1) доказано.

Теперь докажем (2). Пусть g обозначает сумму ряда (2.14). Строгая нормальность g следует из строгой нормальности f и того, что подпространство строго нормальных L_p-функций инвариантно относительно операторов $U_k^*, k = 1, \ldots, d$, и замкнуто. Далее, аналогично (3.11),

$$\begin{aligned}&\Big(\prod_{k=1}^{d} (I - U_k^*)\Big) g \\ &= \Big(\prod_{k=1}^{d} (I - U_k^*)\Big) \lim_{\mathbf{N}=(N_1,\ldots,N_d)\to\infty} \sum_{0\leqslant \mathbf{n}\leqslant \mathbf{N}-\mathbf{1}_d} U^{*\mathbf{n}} f \\ &= \lim_{\mathbf{N}=(N_1,\ldots,N_d)\to\infty} \Big(\prod_{k=1}^{d} \big(I - U_k^{*N_k}\big)\Big) f \\ &= \sum_{r=0}^{d} (-1)^r \sum_{S\in\mathcal{S}_{r,d}} \lim_{\mathbf{N}=(N_1,\ldots,N_d)\to\infty} \Big(\prod_{k\in S} U_k^{*N_k}\Big) f \\ &\qquad = \quad f. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Утверждение пункта (3) вытекает из пунктов (1) и (2), если сначала воспользоваться (2), затем заметить, что из $f = \big(\prod_{k\in\mathbb{N}(d)} (I - U^{*k})\big) g$

следует, что $f = \big(\prod_{k\in S}(I - U^{*k})\big)g'$ с $g' = \big(\prod_{k\notin S}(I - U^{*k})\big)g$, и, наконец, применить пункт (1) к полугруппе $\mathbb{Z}_+^{d,S}$.

Литература

1. A. K. Basu, C. C. Y. Dorea, *On functional central limit theorem for stationary martingale random fields.* — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **33** No. 3–4 (1979), 307–316.
2. R. Cairoli, J. B. Walsh, *Stochastic integrals in the plane.* — Acta Math. **134** (1975), 111–183.
3. C. M. Deo, *A functional central limit theorem for stationary random fields.* — Ann. Probab. **3** (1975), 708–715.
4. М. И. Гордин, *О центральной предельной теореме для стационарных случайных последовательностей.* — ДАН СССР **188**, No. 4 (1969), 739–741.
5. М. И. Гордин, *О поведении дисперсий сумм значений случайных величин, образующих стационарный процесс.* — Теор. вероятн. и её применен. **16** (1971), 484–494.
6. М. И. Гордин, Б. А. Лифшиц, *Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова.* — ДАН СССР, **239**, No. 4 (1978), 766–767.
7. М. М. Леоненко, *Центральная предельная теорема для одного класса случайных полей.* — Теор. вероятн. и мат. статист. (Ташкент) **17** (1977), 87–93, 165.
8. В. П. Леонов, *О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса.* — Теор. вероятн. и её применен. **6** (1961), 93–101.
9. H. Dehling, M. Denker, and M. Gordin, *$U-$ and $V-$statistics of a measure preserving transformation: central limit theorems.* — Готовится к печати.
10. K. Fukuyama, B. Petit, *Le théorème limite central pour les suites de R. C. Baker.* — Ergodic theory dynam. systems **21** (2001), 479–492.
11. M. Gordin, M. Weber, *Degeneration in the central limit theorem for a class of multidimensional actions.* — Готовится к печати.
12. N. Maigret, *Théorème de limite centrale fonctionnel pour une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris et positive.* — Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) **14**, No. 4 (1978), 425–440.
13. M. Maxwell, M. Woodroofe, *Central limit theorems for additive functionals of Markov chains.* — Ann. Probab. **28**, No. 2 (2000), 713–724.
14. M. Peligrad, S. Utev, *A new maximal inequality and invariance principle for stationary sequences.* — Ann. Probab. **33**, No. 2 (2005), 798–815.

Gordin M. I. Martingale-coboundary representation for a class of stationary random fields.

It is known that under some conditions a stationary random sequence admits a representation as the sum of two others: one of them is a martingale difference sequence and another is a so-called coboundary. Such a representation can be used for proving some limit theorems by means of the martingale approximation.

A multi-dimensional version of such a decomposition is presented in the paper for a class of random fields generated by several commuting non-invertible probability preserving transformations. In this representation summands of mixed type appear which behave with respect to some group of directions of the parameter space as reversed multiparameter martingale differences (in the sense of one of several known definitions) while they look as coboundaries relative to the other directions. Applications to limit theorems will be published elsewhere.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А Стеклова РАН

E-mail: gordin@ pdmi.ras.ru

Поступило 16 июня 2008 г.