

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 7 номер 11 год 1995

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

К ТЕОРИИ КИНЕТИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

© Ан. В. Лукшин, Б. Н. Четверушкин

Институт Математического Моделирования РАН, Москва

Работа выполнена в Институте Математического Моделирования РАН и франко-русском центре им. А. М. Ляпунова при поддержке РФФИ (проект N 94011526)

Рассматриваются новые подходы к построению и анализу кинетически согласованных разностных схем для газодинамических течений и течений разреженного газа с использованием разностных аналогов кинетического уравнения Больцмана.

ON A THEORY OF KINETICALLY CONSISTENT DIFFERENCE SCHEMES

An. V. Lukshin, B. N. Chetverushkin

Institute for Mathematical Modelling, Moscow

New approaches for derivation and analysis of kinetically consistent difference schemes for gas dynamics and rarefied gas flows by use of difference analogs of kinetic Boltzmann equation are considered.

Введение

Кинетически согласованные разностные схемы (к.с.р.с.) расчета газодинамических течений и течений разреженного газа непосредственно опираются на использование кинетического уровня описания среды [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Основной динамической характеристикой газа при кинетическом описании является функция распределения числа частиц $f(x, \xi, t)$, имеющая смысл плотности распределения частиц по координатам x и скоростям ξ в момент времени t . При всем различии подходов к построению кинетически согласованных алгоритмов, принципиально общим для всех них является условие существования квазимаксвелловского (равновесного) представления для функции распределения f в расчетной ячейке и прямое (явное) влияние на формирование f значений квазимаксвелловского распределения в ближайшей пространственной окрестности. При этом мы различаем истинное локально максвелловское распределение как асимптотическое решение кинетического уравнения Больцмана и квазимаксвелловские функции, используемые для моделирования только газодинамических течений [11, 12, 13].

В настоящей работе рассматривается взаимная связь между различными вариантами к.с.р.с., включая квазигидродинамическую систему уравнений. Кроме того, в работе продолжаются [4, 9, 10] обсуждения возможности использования

различных вариантов к.с.р.с., в том числе и на прямоугольных сетках, для моделирования течений разреженного газа с числом Кнудсена $\epsilon \sim 10^{-2}$. Как известно, данная область параметров плохо описывается на основе уравнений Навье–Стокса даже с учетом условий скольжения и температурного скачка. Известно, что переход от кинетического к навье–стоксовскому описанию реализуется обычно при малых значениях безразмерной средней длины свободного пробега, т.е. при $\epsilon \rightarrow 0$.

Отличие полученных на базе к.с.р.с. моделей от описаний на основе локальных асимптотических разложений также обсуждаются в настоящей работе.

1. Сравнительный анализ кинетических схем

В качестве базовой модели мы рассмотрим кинетическое уравнение Больцмана в следующей форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\xi f) = \epsilon^{-1} Q(f, f), \quad (1.1)$$

где

$$\xi = \{\xi_i | i = \overline{1, 3}\}, \quad x = \{x_i | i = \overline{1, 3}\}.$$

Оператор $Q(f, f) = Q(f, f)(x, \xi, t)$, называемый интегралом столкновений, представляет собой билинейный оператор, действующий только по переменной ξ и ортогональный для достаточно "хороших" f в смысле скалярного произведения в $L_2(R_\xi^3)$ так называемым сумматорным инвариантам

$$\varphi_0(\xi) = 1; \quad \varphi_j(\xi) = \xi_j, \quad 1 \leq j \leq 3; \quad \varphi_4(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2.$$

Уравнение (1.1) может быть представлено в следующем интегральном виде:

$$f(x, \xi, t + \Delta t) = f(X_{-\Delta t}, \xi, t) + \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\Delta t} Q(f, f)(X_{\tau-\Delta t}, \xi, t + \tau) d\tau, \quad (1.2)$$

$$t \geq 0, \Delta t > 0, \quad X_s = X_s(x, \xi) = x + s\xi.$$

Уравнение (1.2) не учитывает взаимодействий с границами.

Будем считать, что в R^3 введена сетка, состоящая из выпуклых многогранников $V_k, k \geq 1$, с центрами в точках x_k и границей S_k , причем

$$(i) V_k \cap V_m = \emptyset, \quad k \neq m.$$

$$(ii) R^3 \subseteq \bigcup_k V_k.$$

Обозначим символом $\chi_k = \chi(V_k)$ характеристическую функцию множества V_k . Ясно, что

$$(i) \chi_k(x) \cdot \chi_m(x) = \delta_{km};$$

$$(ii) \sum_k \chi_k(x) = 1, \quad \forall x \in R^3,$$

где δ_{km} – символ Кронекера.

Следуя стандартному предположению метода частиц в ячейках [8], будем считать, что

$$f(x, \xi, t) = f_k(\xi, t) \quad \text{при } x \in V_k. \quad (1.3)$$

Это означает, что решение (1.2) ищется в виде

$$f(x, \xi, t) = \sum_k f_k(\xi, t) \chi_k(x), \quad x \in \cup_k (V_k \setminus S_k), \quad (1.4)$$

при $x \in S_k$ определены

$$\begin{aligned} f^+(x, \xi, t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(x + \alpha n, \xi, t), \quad n \cdot n_k > 0; \quad n \in S^{(2)}, \\ f^-(x, \xi, t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} f(x + \alpha n, \xi, t), \quad n \cdot n_k < 0, \\ (\cdot, \cdot) &\text{ — скалярное произведение в } R^3, \quad S^{(2)} \text{ — единичная сфера в } R^3, \end{aligned}$$

где символом $n_k = n_k(x)$ мы обозначили внешнюю по отношению к x_k нормаль к поверхности S_k в точке x (ребра выпуклых многогранников исключим из области определения функции f). Условия на $f_k(\xi, t)$ пока уточнять не будем, отметим лишь, что

$$f_k(\xi, t) = \int_{V_k} \frac{1}{\text{mes}(V_k)} f(x, \xi, t) dx.$$

Как следует из (1.2), изменение функции распределения за время Δt происходит за счет "перетекания" в ячейку V_k значений функции распределения в соседних ячейках в зависимости от знака (ξ, n_k) , и процесса перемешивания (вдоль траектории), характеризующегося присутствием в (1.2) интеграла столкновений.

Приближая интеграл в правой части (1.2) по формуле трапеций, имеем следующее кинетическое уравнение, которое будем считать основным при исследовании и построении классов к.с.р.с.:

$$\begin{aligned} f(x, \xi, t + \Delta t) &= f(X_{-\Delta t}, \xi, t) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} [Q(f, f)(x, \xi, t + \Delta t) + \\ &+ Q(f, f)(X_{-\Delta t}, \xi, t)]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В нашу задачу не входит сейчас исследование качества приближения (1.5), отметим только, что остаточные члены в (1.5) формально имеют порядок $O((\Delta t)^3)$.

Обозначим через $f_M^{(k)}$ максвелловскую функцию распределения с параметрами, отвечающими функции $f_k(\xi, t)$, так что

$$P_j (f_M^{(k)} - f_k) = 0, \quad k \geq 1, \quad 0 \leq j \leq 4,$$

где

$$P_j f = \int_{R_t^3} \varphi_j(\xi) f(\xi) d^3 \xi,$$

$\varphi_j(\xi)$, $0 \leq j \leq 4$, суть сумматорные инварианты.
Ясно, что

$$f_M^{(k)}(\xi, t) = f_M[f_k(\xi, t)].$$

Учтем в (1.5) представление (1.4), получим

$$\begin{aligned} \sum_k f_k(\xi, t + \Delta t) \chi_k(x) &= \sum_k f_k(\xi, t) \chi_k(X_{-\Delta t}) + 0.5\varepsilon^{-1} \Delta t \times \\ &\times \sum_k [Q(f_k, f_k)(\xi, t + \Delta t) \chi_k(x) + Q(f_k, f_k)(\xi, t) \chi_k(X_{-\Delta t})]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу условий *i*, *ii*)

$$Q(f, f)(x, \xi, t) = \sum_k Q(f_k, f_k)(\xi, t) \chi_k(x).$$

Пользуясь стандартным обозначением для величин на верхнем слое $t + \Delta t$, перепишем соотношение (1.6) в виде

$$\begin{aligned} \sum_k \{ \hat{f}_k \chi_k(x) - f_k \chi_k(X_{-\Delta t}) - \\ - 0.5\varepsilon^{-1} \Delta t [Q(\hat{f}_k, \hat{f}_k) \chi_k(x) + Q(f_k, f_k) \chi_k(X_{-\Delta t})] \} = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Следуя стандартным рассуждениям математической теории уравнения Больцмана, положим

$$\begin{aligned} f_k(\xi, t) &= f_M^{(k)}(\xi, t) + \varepsilon F_k(\xi, t), \\ P_j F_k &= 0, \quad k \geq 1, \quad 0 \leq j \leq 4. \end{aligned}$$

Из (1.7) получаем

$$\begin{aligned} \sum_k \left\{ [\hat{f}_M^{(k)} \chi_k(x) - f_M^{(k)} \chi_k(X_{-\Delta t}) - \Delta t (L^k \hat{F}_k \chi_k(x) + \right. \\ \left. + (L^k F_k) \chi_k(X_{-\Delta t}))] + \varepsilon [\hat{F}_k \chi_k(x) - F_k \chi_k(X_{-\Delta t}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \Delta t (Q(\hat{F}_k, \hat{F}_k) \chi_k(x) + Q(F_k, F_k) \chi_k(X_{-\Delta t}))] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из этого соотношения имеем следующее приближение в первом порядке по ε :

$$\sum_k \left\{ \left[\hat{f}_M^{(k)} - \Delta t L^k \hat{F}_k \right] \chi_k(x) - \left[f_M^{(k)} + \Delta t L^k F_k \right] \chi_k(X_{-\Delta t}) \right\} = 0. \quad (1.9)$$

Здесь символом L^k обозначен линеаризованный (вокруг абсолютной максвелловской функции распределения с параметрами $P_j f_k$) оператор столкновений

$$L^k f = Q(f_M^{(k)}, f).$$

Фиксируем некоторую ячейку V_I с соседями V_{iI} , $1 \leq i \leq k$, и осредним (1.9) по V_I :

$$\hat{f}_M^{(I)} - \Delta t L^I \hat{F}_I = \sum_k \left(f_M^{(k)} + \Delta t L^k F_k \right) C_I^k(\xi \Delta t), \quad (1.10)$$

где

$$C_I^k(\xi s) = \int_{R^3} \frac{1}{\text{mes}(V_I)} \chi_I(x) \chi_k(x - \xi s) dx,$$

причем $C_I^k(0) = \delta_{kI}$ и при любом фиксированном k функция $C_I^k(\xi s)$ финитна по ξ . В силу свойства ii)

$$\sum_k C_I^k(\xi s) = \int_{R^3} \frac{1}{\text{mes}(V_I)} \chi_I(x) dx = 1 \quad \text{для любого } \xi.$$

Учитывая полученное выше тождество, приходим на основании (1.10) к следующему основному соотношению:

$$\hat{f}_M^{(I)} - \Delta t L^I \hat{F}_I = f_M^{(I)} + \sum_k \left(f_M^{(k)} - f_M^{(I)} + \Delta t L^k F_k \right) C_I^k(\xi \Delta t). \quad (1.10a)$$

В рамках нашего подхода в наиболее общей форме класс к.с.р.с. можно представить в виде

$$P_j \hat{f}_M^{(I)} = P_j f_M^{(I)} + \sum_k P_j \left[C_I^k(\xi \Delta t) \left[f_M^{(k)} - f_M^{(I)} + \Delta t L^k F_k \right] \right],$$

$$\Delta t > 0, \quad 0 \leq j \leq 4, \quad (1.11)$$

что представляет собой условие разрешимости (1.10) относительно значения на верхнем слое \hat{F}_k :

$$L^I \hat{F}_I = \frac{1}{\Delta t} \left(\hat{f}_M^{(I)} - f_M^{(I)} \right) - \sum_k \left[\frac{1}{\Delta t} \left(f_M^{(k)} - f_M^{(I)} \right) + L^k F_k \right] C_I^k(\xi \Delta t), \quad (1.11a)$$

или

$$\begin{aligned} \hat{F}_I &= \frac{1}{\Delta t} (L^I)^{-1} (E - P) \left(\hat{f}_M^{(I)} - f_M^{(I)} \right) - \\ &- \sum_k \left[\frac{1}{\Delta t} (L^I)^{-1} (E - P) \left[C_I^k(\xi \Delta t) \left(f_M^{(k)} - f_M^{(I)} \right) \right] + \right. \\ &\left. + (L^I)^{-1} (E - P) \left[C_I^k(\xi \Delta t) L^k F_k \right] \right], \end{aligned}$$

где E – единичный оператор,

$$P = \sum_{j=0}^4 P_j.$$

Отметим, что соотношения (1.11) и (1.11а) соответствуют первым членам разложения Чепмена-Энскога для разностного аналога уравнения Больцмана. При этом варианты к.с.р.с. различаются способами аппроксимации величин $C_I^k(\xi\Delta t)$ и, соответственно, правой части (1.11а). Интересно, что аналогичное соотношение будет выполнено и в случае, если вместо интеграла столкновений Больцмана рассматривается сглаженный по пространственной переменной интеграл столкновений типа Моргенштерна с форм - фактором, соответствующим разбиению V_k [3]. Величины $C_I^k(\xi s)$ могут быть вычислены точно, если задано разбиение V_k . Например, в пространственно-одномерном случае при разбиении $\omega_h = \{x_k = -h/2 + kh, k \in Z\}$ имеем

$$\begin{aligned} C_I^k(\xi s) &= h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[(I-1)h, Ih]}(x) \chi_{[(k-1)h, kh]}(x - \xi_1 s) dx = \\ &= h^{-1} \max \{0, h - |\xi_1 s + (I - k)h|\}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

что следует из непосредственно проверяемого соотношения

$$\int_{R^1} \chi_{[a,b]} \chi_{[c,d]} dx = 0.5(p + |p|),$$

где

$$p = 0.5(b - a + d - c) - 0.5(|b - d| + |a - c|).$$

При более сложных разбиениях, а также в многомерном случае в принципе также возможно аналитическое представление для $C_I^k(\xi s)$ или их вычисление на основании метода частиц, однако более эффективны для построения и анализа к.с.р.с. так называемые аппроксимации коэффициентов $C_I^k(\xi\Delta t)$. Для иллюстрации этого положения обратимся к исследованию простейшей ситуации (1.12).

Выпишем коэффициенты разностной схемы в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} C_I^I(\xi\Delta t) &= \max \{0, 1 - |\xi_1| \Delta t h^{-1}\}, \\ C_I^{\pm m}(\xi\Delta t) &= \max \{0, 1 - |m \mp \xi_1 \Delta t h^{-1}|\}, \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Напомним, что в одномерной пространственной ситуации $\xi = \xi_x$ - координата вектора ξ вдоль оси x . Из соотношений (1.13) следует, что коэффициент C_I^{I+1} равен нулю при $\xi_x < 0$, так как в этом случае

$$1 - |1 - \xi_x \Delta t h^{-1}| < 0.$$

Аналогично, $C_I^{I-1} = 0$ при $\xi_x > 0$, что полностью соответствует обычным представлениям об аппроксимации направленными разностями. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} C_I^I(\xi\Delta t) &= \max \{0, 1 - |\xi_x| \Delta t h^{-1}\}, \\ C_I^{I+m}(\xi\Delta t) &= \chi_{[(m-1)h\Delta t^{-1}, (m+1)h\Delta t^{-1}]} \times [1 - |m - \xi_1 \Delta t h^{-1}|], \\ C_I^{I-m}(\xi\Delta t) &= \chi_{[-(m+1)h\Delta t^{-1}, -(m-1)h\Delta t^{-1}]} \times [1 - |m + \xi_1 \Delta t h^{-1}|], \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из соотношений (1.14) следует, что коэффициенты $C_I^j(\xi\Delta t)$ отличны от нуля только при $1 - |\xi_x|\Delta th^{-1} \geq 0$, а среди коэффициентов C_I^{I+m} при любом $\Delta t > 0$ существует бесконечное число отличных от нуля. Не останавливаясь пока на качестве соответствующих приближений и строгой формулировке утверждений, перечислим возможные подходы к решению этой задачи. Прежде всего отметим, что, как следует из (1.11), аппроксимацию коэффициентов $C_I^k(\xi\Delta t)$ следует понимать в смысле аппроксимации выражения

$$\sum_k P_j \left[C_I^k(\xi\Delta t) \left[f_M^{(k)} + \Delta t L^k F_k \right] \right], \quad 0 \leq j \leq 4, \quad (1.15)$$

т.е. наряду с аппроксимацией $C_I^k(\Delta t\xi)$ следует говорить и о соответствующих свойствах операторов L^k . Применительно к рассмотренной выше одномерной ситуации простейший выбор коэффициентов ориентирован на использование трехточечной схемы, а именно

$$\begin{aligned} C_I^1(\xi\Delta t) &= 1 - |\xi_x|\Delta th^{-1}, \\ C_I^{\pm 1}(\xi\Delta t) &= 0,5(|\xi_x| \mp \xi_x)\Delta th^{-1}, \\ C_I^{\pm m}(\xi\Delta t) &= 0, \quad m > 1. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При таком выборе коэффициентов в рамках используемой точности можно пренебречь величиной (обозначения стандартные)

$$P_j \left[\sum_k C_I^k(\xi\Delta t) W_k \right] = (\Delta t)^2 P_j \left[-\xi_x W_{x,I} + 0,5|\xi_x|W_{\bar{x},I} \right], \quad \text{где } W_k = L^k F_k.$$

Соответствующая к.с.р.с. (1.11) принимает вид

$$P_j \hat{f}_M^{(I)} = \sum_{-1 \leq k \leq 1} P_j \left[C_I^{I+k}(\xi\Delta t) f_M^{(k)} \right], \text{ или}$$

$$(\hat{\rho} - \rho) / \Delta t + (\rho u)_x = \frac{h}{2} \left(\rho u \cdot \operatorname{erf}(\beta u) + \frac{\rho \cdot \exp(-\beta^2 u^2)}{\beta \pi^{1/2}} \right)_{\bar{x}}, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} (\hat{\rho} u - \rho u) / \Delta t + (\rho u^2 + p)_x &= \frac{h}{2} \left((\rho u^2 + p) \cdot \operatorname{erf}(\beta u) + \right. \\ &\left. + \frac{\rho u \cdot \exp(-\beta^2 u^2)}{\beta \pi^{1/2}} \right)_{\bar{x}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} (\hat{E} - E) / \Delta t + ((E + p) \cdot u)_x &= \frac{h}{2} \left((E + p) u \cdot \operatorname{erf}(\beta u) + \right. \\ &\left. + \frac{(E + 0,5p) \cdot \exp(-\beta^2 u^2)}{\beta \pi^{1/2}} \right)_{\bar{x}}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $\rho = \rho(x)$ – плотность, $u = u(x)$ – макроскопическая скорость, $E = E(x)$ – полная энергия, $T = T(x)$ – температура, $p = p(x)$ – давление газа, $\beta = (2RT)^{-1/2}$, $\operatorname{erf}(x)$ – функция ошибок.

Все разностные выражения в (1.17)–(1.18) взяты в точке x_I . Обобщение уравнений (1.17)–(1.19) на случай неравномерной сетки приведены в [9]. Эти уравнения фактически являются следствием аппроксимации первого порядка точности с направленными разностями для пространственно-одномерного уравнения Больцмана

$$f_t + \xi_x f_x^\circ = \left(\frac{h|\xi_x|}{2} f_{\bar{x}} \right)_x + Q(f, f). \quad (1.20)$$

Наличие члена $|\xi_x|$ в правой части (1.20) приводит, как следует из (1.17)–(1.19), к сложным соотношениям при интегрировании по скоростям с сумматорными инвариантами, чем при осреднении обычных степенных выражений по ξ_1 . Поэтому представляется оправданным вместо члена $(0.5h|\xi_x|f_{\bar{x}})_x$ в правой части (1.20) использовать $(0.5\xi_x^2\tau_u f_{\bar{x}})_x$, где $\tau_\xi = h|\xi_x|$ имеет смысл времени пролета ячейки размером h частицей со скоростью ξ_x . Введем характерное время, не зависящее от скорости частицы:

$$\tau_u = \frac{h}{(|u|^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где $c(x)$ – локальная скорость звука, и заменим τ_ξ на величину τ_u . Мы использовали тот факт, что при естественных ограничениях на функцию f выполняется

$$\langle \xi_1^2 \rangle_f = \langle (\xi_1 - u)^2 \rangle_f + u^2 = u^2 + c^2,$$

где символом $\langle \cdot \rangle_f$ обозначено усреднение по ξ_1 относительно функции f . При этом вместо (1.17)–(1.19) будем иметь

$$(\hat{\rho} - \rho) / \Delta t + (\rho u)_x^\circ = (\tau_u (\rho u^2 + p)_{\bar{x}})_x, \quad (1.21)$$

$$((\hat{\rho}\hat{u}) - \rho u) / \Delta t + (\rho u^2 + p)_x^\circ = (\tau_u (\rho u^3 + 3up)_{\bar{x}})_x, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} (\hat{E} - E) / \Delta t + ((E + p) \cdot u)_x^\circ = \\ + (\tau_u ((E + 2p)u^2)_{\bar{x}})_x + (\tau_u (p\rho^{-1}(E + p))_{\bar{x}})_x. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Нетрудно видеть, что выбранное приближение соответствует следующей аппроксимации коэффициентов C_I^k (обозначения стандартные):

$$\begin{aligned} C_I^I &\Rightarrow 1 - 0.5 \left(\tau_u^{I+\frac{1}{2}} + \tau_u^{I-\frac{1}{2}} \right) \Delta th^{-2} \xi_x^2, \\ C_I^{I\pm 1} &\Rightarrow 0.5 \Delta th^{-2} \left[\tau_u^{I\pm\frac{1}{2}} \xi_x^2 \mp h \xi_1 \right], \\ C_I^{I\pm m} &\Rightarrow 0, \quad m > 1. \end{aligned} \quad (1.24)$$

При таком выборе коэффициентов мы пренебрегаем величиной

$$P_j \left[\sum_k C_I^k W_k \right] = \Delta t^2 P_j \left[-\xi_1 W_{x,I}^\circ + 0.5 \xi_1^2 (\tau W_{\bar{x}})_{x,I} \right], \quad 0 \leq j \leq 4,$$

Таким образом, как и в случае (1.16), мы ограничиваемся аппроксимацией первого порядка по Δt . Для использования аппроксимации второго порядка, следует учесть влияние членов $\sum_k P_j C_I^k W_k$, т.е. влияние непосредственно интеграла столкновений.

Из (1.24) отчетливо видно, как наряду с шагом Δt появляется новая величина τ_u , имеющая смысл характерного времени, напрямую связанного с размером ячейки. Заметим, что расчеты с помощью уравнений (1.17) – (1.19) и (1.21) – (1.23) для достаточно плотных газов, естественно, давали близкие результаты.

Дифференциальное приближение для разностных уравнений (1.17) – (1.19) представимо в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_u \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) \right) \quad , \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_u \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3up) \right) \quad , \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} ((E + p)u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_u \frac{\partial}{\partial x} ((E + 2p)u^2) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_u \frac{\partial}{\partial x} (p\rho^{-1}(E + p)) \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Эти уравнения носят также названия квазигидродинамических [6], которые успешно используются в расчетах. Нетрудно заметить, что к квазигидродинамической системе уравнений приводит учет, в частности, и только бесстолкновительного переноса с последующим разложением членов вида $f^M(X_{-\Delta t}, \xi, t)$ по формуле Тейлора в точке t вплоть до членов с Δt^2 включительно и осреднением по ξ с сумматорными инвариантами. Конечно, этому простейшему выводу соответствует безхитростный выбор $\tau_u = 0.5\Delta t$, непригодный для практических расчетов. Более удачный выбор возможен только в зависимости от свойств интеграла столкновений и подразумевает более сложную процедуру, включающую в себя в том числе анализ структуры оператора столкновений $Q(f, f)$. В частности, возможен выбор [15, 16]

$$\tau_u \sim \frac{\mu(T)}{p},$$

где $\mu(T)$ – коэффициент вязкости. Двумерный аналог квазигидродинамической системы, как это следует и из разложения Тейлора, будет содержать смешанные пространственные производные. Вопрос же об отношении этой системы при $d = 2$ к дифференциальному приближению для разностной задачи (1.11) зависит от характера разбиения $\{V_k\}$. В частности, если

$$\chi_k(x) = \chi_k^{(1)}(x_1)\chi_k^{(2)}(x_2), \quad x = (x_1; x_2) \in R^2, \quad k \geq 1,$$

т.е. при аппроксимации на прямоугольной сетке со сторонами, параллельными осям координат, коэффициенты $C_I^k(\xi\Delta t)$ легко вычисляются по формулам, являющимся естественным обобщением (1.16), (1.24). Соответствующее дифференциальное приближение не будет содержать смешанных производных. В случае произвольных многоугольных сеток анализ коэффициентов не так тривиален. Один

из возможных подходов к построению к.с.р.с. на прямоугольных сетках, а тем самым и к вычислению соответствующих коэффициентов $C_I^k(\xi\Delta t)$, не приводящий к появлению смешанных пространственных производных, обсуждается ниже.

Формальный переход от соотношений (1.14) к (1.16) и, далее, к (1.24) оправдан при определенных предположениях относительно $|\xi_1|$ и Δt . Из (1.11a) следует

$$P_j \hat{f}_M^{(I)} = P_j f_M^{(I)} + \sum_k P_j \left[C_I^k(\xi\Delta t) \left(f_M^{(k)} - f_M^{(I)} + \Delta t L^k F_k \right) \right]. \quad (1.28)$$

В одномерном случае здесь можно было воспользоваться также простым соотношением

$$\sum_{k \geq 0} \max \{0, 1 - |k - a|\} = 1, \quad a \geq 0.$$

Нетрудно видеть, что аппроксимация коэффициентов $C_I^{I \pm 1}$ выражением (1.16) оправдана при условии малости $|u(x_I)/c(x_I)|$. Более удачным представляется выбор аппроксимации (1.24), обуславливающий малость $|\xi_1 - u^1|/c^I$.

Сделаем важные с нашей точки зрения замечания.

Замечание 1. Ступенчатый характер функции распределения существенен для вывода балансного соотношения (1.7). При этом значение $f_k(\xi, t)$ функции распределения в центре ячейки V_k может быть функцией, непрерывно меняющейся с изменением положения центра ячейки.

Замечание 2. Переход к рассмотрению максвелловских функций распределения в (1.10) является важнейшим этапом построения замкнутых к.с.р.с. . Он приводит, как будет показано в третьем параграфе, к появлению естественного масштаба пространственной структуризации – длины свободного пробега. На этом расстоянии в среднем происходит по крайней мере одно столкновение. Эти столкновения и обуславливают переход к максвелловскому распределению. В другой формулировке это будет означать присутствие в к.с.р.с. в явном виде соответствующего временного масштаба – среднего времени между столкновениями.

Замечание 3. Структура выражения (1.28) приводит к мысли о возможности использования вместо максвелловских функций распределения так называемых квазиравновесных функций распределения, финитных по переменной ξ . Примеры таких функций приведены, например, в [12, 13] и используются для построения кинетических алгоритмов решения задач газовой динамики. Однако с нашей точки зрения, при исследовании задач динамики разреженного газа более естественен выбор именно максвелловской функции.

2. Общая схема построения к.с.р.с.

Перейдем к реализации сформулированного выше принципа построения кинетических схем в общем виде. Рассмотрим прямоугольную регулярную структуризацию пространственной области, см. рис. 1. Обращаясь к простейшему разностному аналогу уравнения Больцмана на временной сетке и осредняя по ячейке V_I , имеем

$$\Delta t^{-1} (\hat{f}_I - f_I) = -[\text{mes}(V_I)]^{-1} \left[\int_{S_I} (\xi, n_I) f(x, \xi, t) d\sigma(n_I) \right] + q_I,$$

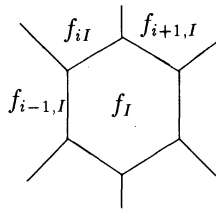


Рис.1. Сотовая структура функции распределения

где

$$q_I = q_I(\xi, t) = \varepsilon^{-1} [\text{mes}(V_I)]^{-1} \int_{V_I} Q(f, f)(x, \xi, t) dx. \quad (2.1)$$

Напомним, что $Q(f_M^{(k)}, f_M^{(k)})(x, \xi, t) \equiv 0, \forall k$. Воспользуемся представлением (1.4), из которого следует, что при $x \in S_I$ естественно считать, что

$$\begin{aligned} f(x, \xi, t) &= f_I(\xi, t) \quad \text{при} \quad (\xi \cdot n_{iI}) > 0 \quad \text{и} \\ f(x, \xi, t) &= f_{iI}(\xi, t) \quad \text{при} \quad (\xi \cdot n_{iI}) < 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь f_{iI} суть значения функции распределения в ячейках, непосредственно окружающих выделенную, S_{iI} ; $1 \leq i \leq k$, суть поверхности, ограничивающие ячейку V_I ; n_{iI} – внешняя по отношению к V_I нормаль к поверхности S_{iI} . Условие (2.2) в определенном смысле эквивалентно учету только соседних с V_I ячеек, влияние так называемых ” прострельных частиц ” не рассматривается.

Из (2.1) с учетом (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_I} |(\xi, n_I)| f(x, \xi, t) d\sigma(n_I) &= \sum_{i=1}^k \left[\int_{S_{iI}} |(\xi, n_{iI})| \chi \{(\xi, n_{iI}) \geq 0\} \times \right. \\ &\quad \left. \times f_I(\xi, t) d\sigma(n_{iI}) - \int_{S_{iI}} |(\xi, n_{iI})| \chi \{(\xi, n_{iI}) < 0\} f_{iI}(\xi, t) d\sigma(n_{iI}) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^k \left[\int_{S_{iI}} |(\xi, n_{iI})| \chi \{(\xi, n_{iI}) \geq 0\} \left(\frac{1}{2} (f_I + f_{iI}) + \frac{1}{2} (f_I - f_{iI}) \right) d\sigma(n_{iI}) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{S_{iI}} |(\xi, n_{iI})| \chi \{(\xi, n_{iI}) < 0\} \left(\frac{1}{2} (f_I + f_{iI}) - \frac{1}{2} (f_I - f_{iI}) \right) d\sigma(n_{iI}) \right], \\ (\Delta t)^{-1} (\hat{f}_I - f_I) &= - [\text{mes}(V_I)]^{-1} \sum_{i=1}^k \left[\int_{S_{iI}} |(\xi, n_{iI})| \frac{1}{2} (f_I + f_{iI}) d\sigma(n_{iI}) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{S_{iI}} |(\xi, n_{iI})| (f_I - f_{iI}) d\sigma(n_{iI}) \Big] + q_I, \quad (2.3)$$

где мы воспользовались очевидным соотношением, верным для любого a :

$$\begin{aligned} \chi\{a \geq 0\} + \chi\{a < 0\} &\equiv 1, \\ a\chi\{a \geq 0\} - a\chi\{a < 0\} &\equiv |a|. \end{aligned}$$

Соотношение (2.3) может служить основой для получения аналогов к.с.р.с. для произвольного регулярного разбиения пространственной области.

Отметим, что наиболее удобными для построения расчетных формул являются ячейки Дирихле, когда отрезки, соединяющие центры соответствующих ячеек, перпендикулярны граням, их разделяющим. В этом случае окончательные разностные выражения для газодинамических параметров получаются в виде суммы разностных формул по отдельным граням. В свою очередь, разностное выражение для каждой грани получается аналогично разностному выражению к.с.р.с. для грани прямоугольной ячейки. При этом вводятся направления скоростей, перпендикулярные и касательные каждой грани ячейки. В окончательном выражении для газодинамических параметров макроскопические скорости, перпендикулярные и касательные граням ячейки, заменяются через их проекции на направления исходной декартовой системы координат.

Дальнейшей целью рассуждений в этом параграфе будет выяснение связи между интегральным выражением для к.с.р.с. и возможными дифференциальными формами, имеющими смысл при выполнении определенных условий гладкости. Доопределим значение f на границе ячейки равным $(f_I + f_{iI})/2$, и предполагая f в ячейке достаточно гладкой - в смысле замечания 2, перейдем от первого поверхностного интеграла к объемному. Кроме того, вернемся от разностного аналога производной по времени к дифференциальному представлению. При этом получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\xi f) = -\frac{1}{2\operatorname{mes}(V_I)} \sum_{i=1}^k \int_{S_{iI}} |(\xi, n_{iI})| (f_I - f_{iI}) d\sigma(n_{iI}) + q_I. \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) является базовым для построения к.с.р.с. . В нем выделена левая часть, которая при интегрировании с сумматорными инвариантами в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к уравнениям Эйлера. Правая диссипативная часть связана с имеющейся пространственной структуризацией и присутствием интеграла столкновений. Причем минимальный физический размер структуры - длина свободного пробега - связан с условием существования локально-максвелловского распределения.

Проведем дальнейшие преобразования выражения (2.4) с целью получения из него различных дифференциальных форм для к.с.р.с. в том числе и квазигидродинамической системы уравнений, предполагая достаточную гладкость функции f вдоль траектории частиц. Перепишем (2.4) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\xi f) = \frac{1}{2\operatorname{mes}(V_I)} \sum_{i=1}^k \int_{S_{iI}} |(\xi, n_{iI})| h_{\xi_i}(\operatorname{grad} f, x_{\xi}) d\sigma(n_{iI}) + q_I, \quad (2.5)$$

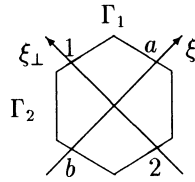


Рис.2. Схема интегрирования по ячейке.

где h_{ξ_i} – расстояние между центрами ячеек V_I и V_{iI} , $df/dx_{\xi} = (\text{grad } f, x_{\xi})$ – производная вдоль единичного вектора x_{ξ} , совпадающего с направлением скорости. Умножим и разделим подынтегральную функцию в правой части (2.5) на $|\xi|$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\xi f) = \frac{1}{2\text{mes}(V_I)} \sum_{i=1}^k \int |\xi|^2 |(x_{\xi}, n_{iI})| \frac{h_{\xi_i}}{|\xi|} \frac{df}{dx_{\xi}} d\sigma(n_{iI}) + q_I, \quad (2.6)$$

где величина $|(x_{\xi}, n_{iI})| h_{\xi_i} |\xi|^{-1} = \tau_{\xi}$ имеет смысл времени.

Предполагая, что соотношение между характерным расстоянием и скоростью является постоянным для всех направлений и скоростей полета молекул, усредним τ_{ξ} по единичной сфере. Тогда имеем

$$\tau_u = \frac{h_{\xi_i}}{2|\xi|}. \quad (2.7)$$

Перепишем выражение (2.6) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\xi f) = \frac{1}{2\text{mes}(V_I)} \sum_{i=1}^k \int \tau_u |\xi|^2 \frac{df}{dx_{\xi}} d\sigma(n_{iI}) + q_I. \quad (2.8)$$

Не останавливаясь на вопросах численной реализации уравнения (2.8), которое может оказаться весьма удобным для моделирования течений умеренно разреженных газов, преобразуем его к дифференциальному виду. Для этого при каждом направлении скорости ξ интеграл по объему V_I представим в виде произведения повторных интегралов (предполагаем, что это можно сделать) по направлениям вдоль вектора ξ и ему перпендикулярному, см. рисунок 2.

Представим значение производной df/dx_{ξ} в точке a на части поверхности границы в виде

$$\tau_u \xi_l \xi_m \frac{df}{dx_{\xi}} \Big|_a = \int_b^a \frac{d}{dx_{\xi}} \left(\tau_u \xi_l \xi_m \frac{df}{dx_{\xi}} \right) dx_{\xi} + \tau_u \xi_l \xi_m \frac{df}{dx_{\xi}} \Big|_b, \quad 1 \leq l, m \leq 3. \quad (2.9)$$

Следует отметить, что производная в точке b в выражении (2.9) берется с обратным знаком к производной в соответствующей точке поверхности с противоположной стороны. Для выпуклой области для каждого направления полета молекулы ξ

вся граница $S = \sum_{i=1}^k S_{iI}$ будет состоять из двух частей, Γ_1 и Γ_2 , задаваемых двумя точками пересечения, 1 и 2, вектора имеющего направление вдоль ξ_{\perp} с границей области. Тогда из (2.9) следует, что для любого фиксированного ξ , имеем

$$\int_{\Gamma_1: (\xi, n) > 0} \tau_u |\xi|^2 \frac{df(1)}{dx_{\xi}} d\sigma(n) - \int_{\Gamma_2: (\xi, n) < 0} \tau_u |\xi|^2 \frac{df(1)}{dx_{\xi}} d\sigma(n) = \int dx_{\xi_{\perp}} \int_b^a \frac{d}{dx_{\xi}} \tau_u |\xi|^2 \frac{df}{dx_{\xi}} dx_{\xi}. \quad (2.10)$$

Учитывая смену знака производной при изменении направления полета молекулы на противоположный, для поверхностного интеграла, стоящего в правой части (2.8), выпишем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\text{mes}(V_I)} \sum_{i=1}^k \int_{S_{iI}} \tau_u |\xi|^2 \frac{df}{dx_{\xi}} d\sigma(n_{iI}) &= \frac{1}{2\text{mes}(V_I)} \int_{S_I} \tau_u |\xi|^2 \frac{df}{dx_{\xi}} d\sigma(n) = \\ &= \frac{1}{2\text{mes}(V_I)} \int_{V_I} \frac{d}{dx_{\xi}} \tau_u |\xi|^2 \frac{df}{dx_{\xi}} dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Правую часть соотношения (2.11) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\text{mes}(V_I)} \int_{V_I} L \tau_u L f dx, \quad \text{где } L f = |\xi|(x_{\xi}, \text{grad } f) = (\xi, \text{grad } f).$$

Переходя к пределу для малых объемов, перепишем уравнение (2.7) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\xi f) = L \frac{\tau_u}{2} L f + q_I. \quad (2.12)$$

В свою очередь, интегрируя уравнение (2.12) с сумматорными инвариантами и используя для замыкания локально-максвелловское распределение, придем к квазигидродинамической системе уравнений, см. (1.17) - (1.19).

Таким образом, переход от оригинальных к.с.р.с. к квазигидродинамической системе уравнений связан с заменой интегральной формы записи на дифференциальную, а также с пространственной структуризацией области и естественным образом связанной с ней структуризацией по времени.

3. Моделирование течений умеренно разреженных газов

В работах [4, 9, 14, 15, 16] приводились примеры успешного применения алгоритмов, построенных на базе кинетических моделей, для расчета течений умеренно разреженных газов. В настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые теоретические аспекты, связанные с расширением газодинамического описания посредством к.с.р.с. Мы обсудим также некоторые вычислительные аспекты применения к.с.р.с. для моделирования течений умеренно разреженных газов.

Естественно задать вопрос, до каких пределов оправдано с физической точки зрения уменьшение типичного размера h рассматриваемой пространственной структуры? Это связано с существованием локально-максвелловского распределения в ячейке, которое реализуется при прохождении молекулой расстояния, не меньшего, чем длина свободного пробега l , или нахождением частицы в ячейке в течение времени $[t, t + \Delta t]$, не меньшего, чем время столкновения.

Следует отметить, что при расчете необходимо принимать во внимание эффективное увеличение длины свободного пробега, связанного с ненулевой макроскопической скоростью

$$l_{\text{эф}} = l \left(1 + \frac{|u_k|}{c} \right), \quad (3.1)$$

где u_k – макроскопическая скорость в соответствующем направлении.

Для физического восприятия газодинамических полей в каждом пространственном направлении необходимо порядка десяти опорных точек. Учитывая, что размеры каждой ячейки должны быть не меньше длины свободного пробега, можно сказать, что к.с.р.с. должны описывать газодинамические течения с числом Кнудсена $\varepsilon \leq 0.1$. Жесткая привязка шага расчетной сетки к длине свободного пробега делает алгоритм неудобным с вычислительной точки зрения. Поэтому в выражении (2.4), являющемся базовым для к.с.р.с., введем следующее ограничение: если $h_{\xi} < l_{\text{эф}}^{(\xi)}$, то полагаем $h_{\xi} = l_{\text{эф}}^{(\xi)}$.

В принципе можно опираться только на минимально возможный масштаб структурного разбиения – длину свободного пробега $l_{\text{эф}}$, используя в качестве базового уравнения вместо (2.4) или (2.5) уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} \xi f = \frac{1}{2 \text{mes}(V_I)} \int_{S_I} |(\xi, n)| l_{\text{эф}}^{(\xi)} \frac{df}{dx_{\xi}} d\sigma(n). \quad (3.2)$$

Следует отметить, что в этом случае могут возникнуть вычислительные трудности при масштабе пространственного разбиения, существенно превышающем длину свободного пробега. Эти вычислительные трудности аналогичны проблемам, появляющимся при численном решении уравнений Навье-Стокса на подобных сетках. Впрочем, эти трудности вряд ли являются существенными для моделирования течений умеренно разреженных газов с $\varepsilon \sim 0.01$, где шаг расчетной сетки достаточно близок к длине свободного пробега.

Рассмотрим, в каком конкретном виде произойдет для умеренно разреженных газов переход от базового уравнения (2.4) к уравнению (2.8), то есть при переходе от построения кинетических алгоритмов на основе пространственного масштаба разбиения к связанному с ним временному масштабу. В этом случае уравнение (2.8) запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} \xi f = \frac{1}{2 \text{mes}(V_I)} \int_{S_I} \tau_{\text{col}} |\xi|^2 \frac{df}{dx_{\xi}} d\sigma(n),$$

где τ_{col} – время между столкновениями частиц.

В самом деле, выбирая в правой части уравнения (2.6) вместо h_{ξ} , величину $l_{\text{эф}}^{(\xi)}$ с учетом поправки на газодинамический перенос (3.1), а в качестве эффективного значения $|\xi_n| = |(\xi, n)|$ – значение $c + |u_n|$ [9], придем к выводу, что в случае

малых и больших по сравнению со скоростью звука макроскопических скоростей, масштаб времени τ_u , стоящий в правой части уравнения (2.8), будет определяться

$$\tau_u = \frac{l}{c} = \tau_{col}.$$

Таким образом, в квазигидродинамической системе уравнений (1.17) - (1.19), являющейся дифференциальным следствием уравнения (2.8), в качестве характерного масштаба времени для умеренно разреженных газов следует выбрать время между столкновениями.

Заключение

В завершение обсудим отличия рассматриваемого подхода от традиционного подхода Чепмена-Энскога, используемого для получения газодинамических уравнений. Классическое приближение Навье-Стокса, использующее два члена этого разложения, имеет вид

$$f_{NS}(x, \xi, t) = f_M(x, \xi, t) + \varepsilon F(x, \xi, t),$$

где f_M - локально-максвелловское распределение, а F - функция, зависящая от газодинамических параметров и их пространственных производных. Это разложение локально по пространственной переменной.

В отличие от него разложение, используемое в данной работе, опирается в основном на понятие максвелловского распределения, причем это распределение уже не локально. Оно вместе с точкой формального "приложения" включает область с диаметром порядка длины свободного пробега, на которой это распределение однородно по пространству. Диссипативные процессы в среде описываются посредством потоков, возникающих на границах структур за счет различия в максвелловском описании по обе стороны границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *М.И. Волчинская, А.Н. Павлов, Б.Н. Четверушкин.* Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики. - М.: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 113, 1983, 21с.
2. *Т.Г. Елизарова, Б.Н. Четверушкин.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений. Доклады АН СССР, т.279, № 1, с.80-84.
3. *А.В. Лукшин.* Разностные аналоги уравнения Больцмана и уравнения макроскопической динамики. Дифференциальные уравнения, т.21, № 7, 1985, с.1202-1209.
4. *Н.В. Демина, А.В. Лукшин.* Кинетически согласованный алгоритм решения задач динамики разреженного газа в переходном режиме. Препринт Института Прикладной Математики АН СССР, № 111, 1985 г., 19 с.
5. *Т.Г. Елизарова, Б.Н. Четверушкин.* Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений. В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. - М.: Наука, 1986, с.261-278.
6. *Т.Г. Елизарова, Б.Н. Четверушкин.* Кинетически-согласованные разностные схемы для моделирования течений вязкого теплопроводного газа. // ЖВМ и МФ, 1988, т.28, № 11, с.1695-1710.
7. *С.В. Богомолов.* Стохастическая модель гидродинамики. // Математическое моделирование, т.2, № 11, 1990, с.85-88.

8. *А.В. Лушкин*. Стохастические алгоритмы математической теории пространственно неоднородного уравнения Больцмана. // Математическое моделирование, т.1, №7, с.146-159.
9. *И.В. Абалакин, Б.Н. Четверушкин*. Применение кинетически-согласованных разностных схем для моделирования течений умеренно разреженного газа. // Математическое моделирование, т.4, №11, 1992, с.20-35.
10. *И.В. Абалакин, Б.Н. Четверушкин*. О расширении возможности газодинамического описания с помощью кинетически-согласованных разностных схем. Математическое моделирование, т.6, N 7, 1994, с.3-14.
11. *B. Perthame*. Second Order Boltzmann Schemes for Compressible Euler Equations. Rapport de Recherche BP 6749, Universite d'Orleans, Orleans Cedex 2 France, 1989.
12. *B. Perthame*. Boltzmann Type Schemes for Gas Dynamics and the Entropy Property. SIAM J. Numer. Anal, v.27, №6, 1990, p.1405-1421.
13. *W. Schreiner*. Partikelverfahren für kinetische Schemata zu den Eulergleichungen. Dissertation. Universität Kaiserslautern, 1994.
14. *I.V. Abalakin, B.N. Chetverushkin*. Using kinetically consistent difference schemes for predictions of moderately rarefied gas flows. Proceedings of the II European computational fluid dynamics conference. Stuttgart. Wiley, 1994, p.397-401.
15. *I.A. Graur, T.G. Elizarova, A. Chpoun, J.C. Lengrand*. Rarefied Gas Flow Simulation Based on Quasi gas Dynamic Equations. Preprint "Laboratoire d'Aerothermique du CNRS", Meudou, N 4, 1994.
16. *I.A. Graur, T.G. Elizarova, A. Chpoun, J.C. Lengrand*. Comparison of Continuum and Molecular Approaches for Gas Flows, 19 RGD Symposium, Oxford.

Поступила в редакцию
06.03.95.