ДЕКАБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 12

## *УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ*

*УДК 517.956.227*

А. С. МАКИН

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассмотрим следующую несамосопряженную краевую задачу:

$$\begin{gathered}\Delta u - q(x)u + \lambda u = 0, \quad x \in G = (0, 2\pi)^N, \\ u|_{x_j=0} = u|_{x_j=2\pi}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{x_j=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{x_j=2\pi},\end{gathered} \tag{1}$$

$j=1, \dots, N$, где $q(x) = \sum\limits_{m>0} q_m e^{-i(m, x)}$, $\sum\limits_{m>0} |q_m| = \tilde{q} < \infty$. Здесь $q_m$ — комплексные числа, $m$ — целочисленный вектор, $m = (m_1, \dots, m_N)$, $|m| = (\sum\limits_{j=1}^{N} m_j^2)^{1/2}$, $(m, x) = \sum\limits_{j=1}^{N} m_j x_j$. Запись $m > 0$ означает, что $m_j \geqslant 0$, $j = 1, \dots, N$, и $\sum\limits_{j=1}^{N} m_j > 0$.

Задача (1) при $N=2$ впервые была рассмотрена В. Б. Лидским [1]. Им было установлено, что спектр задачи (1) тот же, что и при $q(x) \equiv 0$ (доказательство этого факта без изменений остается в силе при любом $N$), т. е. он состоит из целых чисел, представимых в виде суммы $N$ квадратов целых чисел. В. Б. Лидский также показал, что коэффициенты $q_m$ могут быть подобраны таким образом, что резольвента оператора (1) имеет полюсы неограниченно возрастающих порядков, и, стало быть, в системе корневых функций задачи (1) присутствуют присоединенные функции сколь угодно высокого порядка. Задача (1) также исследовалась в работе [2].

Лемма 1. *Резольвента $R_\lambda f$ оператора (1) представляется в виде*

$$\begin{gathered}R_\lambda f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \sum_{m_1>0} q_{m_1} \dots \sum_{m_p>0} q_{m_p} \times \\ \times \sum_{n \in Z} \frac{f_{n+m_1+\dots+m_p} e^{i(n, x)}}{(|n|^2-\lambda)(|n+m_1|^2-\lambda)\cdots(|n+m_1+\dots+m_p|^2-\lambda)},\end{gathered} \tag{2}$$

*где* $f_k = \dfrac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_G e^{-i(k, y)} f(y)\,dy$. *Ряд в правой части (2) сходится в норме $L_2(G)$ при любом $\lambda$, лежащем вне спектра оператора (1).*

Доказательство. Пусть $R_\lambda^0$ — резольвента оператора (1) при $q(x) \equiv 0$. Легко видеть, что для ядра резольвенты $R_\lambda^0(x, y)$ справедливо представление

$$R_\lambda^0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{n \in Z} \frac{e^{i(n, x-y)}}{|n|^2 - \lambda}. \tag{3}$$

Решая уравнения $R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda^0 q R_\lambda$ методом последовательных приближений, получим, что

$$R_\lambda = \sum_{p=0}^{\infty} R_\lambda^0 (-qR_\lambda^0)^p \tag{4}$$

для тех $\lambda$, при которых сходится ряд в правой части (4). Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L_2(G)$. Из равенства (3) и вида функции $q(x)$ следует, что

$$\sum_{p=0}^{\infty} R_\lambda^0 (-qR_\lambda^0)^p f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \sum_{n\in Z} \sum_{m_1>0} q_{m_1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{m_p>0} q_{m_p} \frac{f_{n+m_1+\ldots+m_p} e^{i(n,\,x)}}{(|n|^2-\lambda)(|n+m_1|^2-\lambda)\cdots(|n+m_1+\ldots+m_p|^2-\lambda)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \sum_{m_1>0} q_{m_1} \cdots \sum_{m_p>0} q_{m_p} \sum_{n\in Z} f_{n+m_1+\ldots+m_p} \times \tag{5}$$

$$\times e^{i(n,\,x)} / ((|n|^2-\lambda)(|n+m_1|^2-\lambda)\cdots(|n+m_1+\ldots+m_p|^2-\lambda)).$$

Пусть $\lambda$ — произвольное комплексное число, не принадлежащее спектру оператора (1), $\rho_0$ — расстояние от точки $\lambda$ до спектра. Обозначим $F_p(\lambda) = (|n|^2-\lambda)(|n+m_1|^2-\lambda)\cdots(|n+m_1+\ldots+m_p|^2-\lambda)$.

Пусть $\min\limits_j ||n+m_1+\ldots+m_j|^2-\lambda| = \rho \geqslant \rho_0 > 0$ и достигается при $j=j_0$. Обозначим $n+m_1+\ldots+m_{j_0} = M$. Пусть $\alpha$ — произвольный вектор, удовлетворяющий неравенству $|\alpha| > (4|\lambda|+6\rho+2\tilde{q}+2)^{1/2}$. Тогда $|\alpha|^2 > 4|M|^2+2(\tilde{q}+\rho+1)$. Из последнего неравенства и очевидного неравенства $|\alpha|^2+4|M|^2 \geqslant 4|(M,\alpha)|$ вытекает, что $|\alpha|^2 > 2|(M,\alpha)| + \tilde{q}+\rho+1$. Отсюда следует, что $|M+\alpha|^2 > |M|^2+\tilde{q}+\rho+1$, откуда вытекает справедливость неравенства

$$||M+\alpha|^2-\lambda| > \tilde{q}+1. \tag{6}$$

Обозначим $L = (4|\lambda|+6\rho+2\tilde{q}+2)^{1/2}$. Из (6) и положительности всех векторов $m_j$ следует, что

$$|F_p(\lambda)| \geqslant \rho^{2L+1} (\tilde{q}+1)^{p-2L} \geqslant c_1 (\tilde{q}+1)^{p+1}, \tag{7}$$

где постоянная $c_1$ зависит лишь от $\lambda$ и $\tilde{q}$. Из (4), (5), (7) и равенства Парсеваля имеем

$$\|R_\lambda f(x)\|_{L_2(G)} \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \Big\| \sum_{m_1>0} q_{m_1} \cdots \sum_{m_p>0} q_{m_p} \times$$

$$\times \sum_{n\in Z} f_{n+m_1+\ldots+m_p} e^{i(n,\,x)} / F_p(\lambda) \Big\|_{L_2(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m_1>0} |q_{m_1}| \cdots \sum_{m_p>0} |q_{m_p}| \Big\| \sum_{n\in Z} \frac{f_{n+m_1+\ldots+m_p} e^{i(n,x)}}{F_p(\lambda)} \Big\|_{L_2(G)} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \|f(x)\|_{L_2(G)} \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{q}^p / (\tilde{q}+1)^p \leqslant c_3 \|f(x)\|_{L_2(G)}. \tag{8}$$

Лемма 1 доказана.

Обозначим через $\lambda_k (k=1,2,\ldots)$ собственные значения задачи (1), взятые в порядке возрастания и занумерованные без учета кратности.

Теорема 1. *Порядок полюса резольвенты в точке $\lambda_k$ не превосходит* $2[\sqrt{\lambda_k N}]+1$.

Доказательство. Обозначим $r=[\sqrt{\lambda_k N}]$. Из известного неравенства

$$N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} x_i\Big)^2 \tag{9}$$

вытекает, что все целочисленные решения уравнения

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2=\lambda_k \tag{10}$$

удовлетворяют неравенству $\Big|\sum\limits_{i=1}^{N} x_i\Big|<r+1$. Отсюда следует, что все решения уравнения (10) лежат на гиперплоскостях $M_j$: $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i=j$, $j=0, \pm 1, \dots, \pm r$. Из положительности векторов $m_1, \dots, m_p$ вытекает, что точки $n+m_1+\dots+m_\alpha$ и $n+m_1+\dots+m_\beta$ при $\alpha\neq\beta$ не могут принадлежать одной и той же гиперплоскости $M_j$. Это означает, что в произведении $F_p(\lambda_k)=(|n|^2-\lambda_k)(|n+m_1|^2-\lambda_k)\cdots(|n+m_1+\dots+m_p|^2-\lambda_k)$ обращается в нуль не более $2r+1$ сомножителей. Из сходимости ряда (2) следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Из теоремы 1 вытекает, что порядок присоединенных функций задачи (1), отвечающих собственному значению $\lambda_k$, не превосходит $2[\sqrt{\lambda_k N}]+1$.

Пусть $\gamma_k$ — граница прямоугольника с центром в точке $\lambda_k$ со сторонами, параллельными осям координат, длина основания которого равна 1, а высота — 2. Обозначим

$$P_{\lambda_k} f(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} R_\lambda f(x)\,d\lambda.$$

Лемма 2. *Пусть дополнительно известно, что $\tilde{q}\leqslant 1/2$. Тогда*

$$\|P_{\lambda_k} f(x)\|_{L_2(G)}\leqslant c_4(\lambda_k+1)^{1/4}\|f(x)\|_{L_2(G)}.$$

Пусть $\gamma_k=\gamma_k'\cup\gamma_k''$, где $\gamma_k'$ — объединение сторон основания прямоугольника $\gamma_k$, а $\gamma_k''$ — объединение боковых сторон. Легко видеть, что для любых $p$ и $k$

$$\Big|\int_{\gamma_k'}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\Big|\leqslant 2. \tag{11}$$

Оценим интеграл $\int\limits_{\gamma_k''}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}$. Обозначим $r_k=4[\sqrt{(\lambda_k+1)N}]+2$. Если $p\leqslant r_k$, то из [3] и формулы Стирлинга (см., например, [4]) следует, что

$$\Big|\int_{\gamma_k''}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\Big|\leqslant 4\int_0^1\frac{dt}{(1/4+t^2)^{(p+1)/2}}<4\int_0^\infty\frac{dt}{(1/4+t^2)^{(p+1)/2}}=$$
$$=\sqrt{\pi}\,2^{p+1}\Gamma(p/2)/\Gamma((p+1)/2)\leqslant c_5\cdot 2^p/\sqrt{p+1}. \tag{12}$$

Так как в силу рассуждений, проведенных в ходе доказательства теоремы 1, в каждой из точек $\lambda_k-1$, $\lambda_k$, $\lambda_k+1$ обращается в нуль не более $r_k/2$ сомножителей, входящих в произведение $F_p(\lambda)$, то при $p>r_k$

$$\Big|\int_{\gamma_k''}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\Big|\leqslant 4\cdot 2^p. \tag{13}$$

Из неравенств (11)—(13) и очевидного равенства

$$\int_{\gamma_k} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)} = \int_{\gamma_k'} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)} + \int_{\gamma_k''} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}$$

вытекает, что

$$\left| \int_{\gamma_k} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)} \right| \leqslant c_6 \cdot 2^p / \sqrt{p+1} \tag{14}$$

при $p \leqslant r_k$ и

$$\left| \int_{\gamma_k} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)} \right| \leqslant c_7 \cdot 2^{r_k} \tag{14'}$$

при $p > r_k$. Из (14), (14′) и равенства Парсеваля следует, что

$$\| \int_{\gamma_k} R_\lambda f(x)\, d\lambda \|_{L_2(G)} = \| \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \sum_{m_1 > 0} q_{m_1} \cdots \sum_{m_p > 0} q_{m_p} \times$$

$$\times \sum_{n \in Z} f_{n+m_1+\ldots+m_p} e^{i(n,\, x)} \int_{\gamma_k} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)} \|_{L_2(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f(x)\|_{L_2(G)} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m_1 > 0} |q_{m_1}| \cdots \sum_{m_p > 0} |q_{m_p}| \sup \left| \int_{\gamma_k} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_8 \|f(x)\|_{L_2(G)} \left( \sum_{p=0}^{r_k} \frac{1}{\sqrt{p+1}} + \sum_{p=r_k+1}^{\infty} 2^{r_k - p} \right) \leqslant c_9 (\lambda_k + 1)^{1/4} \|f(x)\|_{L_2(G)}.$$

Лемма 3. *Пусть в произвольной области $G$ пространства $R^N$ заданы функции $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$, где $(\varphi_i, \psi_j) = \int_G \varphi_i(x) \psi_j(x)\, dx$. Обозначим $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,\, j=1,\, \ldots,\, n}$ — невырожденная матрица, $u = A\varphi$, $v = B\psi$, где матрица $B = (A^{-1})^{\mathrm{T}} = \|b_{ij}\|_{i,\, j=1,\, \ldots,\, n}$. Тогда имеют место равенства*

$$(u_i, v_j) = \delta_{ij}, \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \psi_k(y) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) v_k(y). \tag{16}$$

Равенство (15) проверяется непосредственно. Справедливость (16) вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) v_k(y) = \sum_{k=1}^{n} \Big( \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \varphi_i(x) \Big) \Big( \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \psi_j(y) \Big) =$$

$$= \sum_{i,\, j=1}^{n} \Big( \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \Big) \varphi_i(x) \Big( \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \Big) \psi_j(y) =$$

$$= \sum_{i,\, j=1}^{n} \delta_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \psi_k(y).$$

Лемма 3 доказана.

Пусть $S_k$ — корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_k$, $m_k = \dim S_k$ — алгебраическая кратность $\lambda_k$, $p_k$ — максимальное число линейно независимых собственных функций, отвечающих $\lambda_k$. Пусть $u_{j,\, l}^{[k]}(x)$ (где $j = 1, \ldots, p_k$, $l = 0, 1, \ldots, m_j^{[k]} - 1$, $m_j^{[k]}$ — кратность собственной функции $u_{j,\, 0}^{[k]}(x)$) — произвольная каноническая система собственных и присоединенных функций краевой задачи (1) (см. [5]), отвечающая

собственному значению $\lambda_k$, а $v_{j,l}^{[k]}(x)$ — каноническая система собственных и присоединенных функций сопряженной краевой задачи, нормированная таким образом, что

$$(u_{j,l}^{[k]}, v_{i,r}^{[q]}) = \int_G u_{j,l}^{[k]}(x)\overline{v_{i,r}^{[q]}(x)}\,dx = \delta_{kq}\delta_{ji}\delta_{l,\,m_j^{[k]}-1-r}. \tag{17}$$

Известно [5], что главная часть ядра резольвенты $R_\lambda$ оператора (1) в окрестности собственного значения $\lambda_k$ представляется в виде

$$-\sum_{j=1}^{p_k}\left\{\frac{u_{j,0}^{[k]}(x)\overline{v_{j,0}^{[k]}(y)}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_j^{[k]}}} + \frac{u_{j,1}^{[k]}(x)\overline{v_{j,0}^{[k]}(y)} + u_{j,0}^{[k]}(x)\overline{v_{j,1}^{[k]}(y)}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_j^{[k]}-1}} + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + [u_{j,m_j^{[k]}-1}^{[k]}(x)\overline{v_{j,0}^{[k]}(y)} + \cdots + u_{j,0}^{[k]}(x)\overline{v_{j,m_j^{[k]}-1}^{[k]}(y)}]/(\lambda-\lambda_k)\right\}. \tag{18}$$

Обозначим $\nu_k = \max\limits_{j=1,\dots,p_k} m_j^{[k]}$. Собирая в (18) члены с одинаковыми степенями $\lambda-\lambda_k$, получим, что выражение в фигурных скобках в (18) равно

$$R_{\nu_k}^{[k]}(x,y)/(\lambda-\lambda_k)^{\nu_k} + \dots + R_1^{[k]}(x,y)/(\lambda-\lambda_k), \tag{19}$$

где

$$R_1^{[k]}(x,y) = \sum_{j=1}^{p_k}\sum_{l=0}^{m_j^{[k]}-1} u_{j,l}^{[k]}(x)\overline{v_{j,m_j^{[k]}-1-l}^{[k]}(y)}. \tag{20}$$

В каждом из подпространств $S_k$ произвольным образом выберем ортогональный базис $\tilde{u}_i^{[k]}(x)$, $i=1,\dots,m_k$. Обозначим $\tilde{u}^{[k]} = (\tilde{u}_1^{[k]},\dots,\tilde{u}_{m_k}^{[k]})$. Обозначим также через $u^{[k]}(x)$ вектор, составленный из функций $u_{j,l}^{[k]}(x)$ $(j=1,\dots,p_k,\ l=0,1,\dots,m_j^{[k]}-1)$, а через $v^{[k]}(x)$ вектор, составленный из функций $v_{j,l}^{[k]}(x)$ $(j=1,\dots,p_k,\ l=0,1,\dots,m_j^{[k]}-1)$. Так как функции $u_{j,l}^{[k]}(x)$ канонической системы линейно независимы, то $\tilde{u}^{[k]} = A_k u^{[k]}$ $(k=1,2,\dots)$, где $A_k$ — невырожденные матрицы размера $m_k\times m_k$. Пусть вектор $\tilde{v}^{[k]} = (A_k^{-1})^{\tau}\overline{v^{[k]}}$ $(\tilde{v}^{[k]} = (\tilde{v}_1^{[k]},\dots,\tilde{v}_{m_k}^{[k]}))$. Тогда из леммы 3 и равенства (17) вытекает, что $(\tilde{u}_i^{[k]}, \tilde{v}_j^{[q]}) = \delta_{kq}\delta_{ij}$, $R_1^{[k]}(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{m_k}\tilde{u}_i^{[k]}(x)\overline{\tilde{v}_i^{[k]}(y)}$.

Отсюда и из леммы 2 и выражений (18)—(20) для главной части ядра резольвенты в окрестности полюса $\lambda_k$ следует, что для любой функции $f(x)\in L_2(G)$

$$\Big\|\sum_{i=1}^{m_k}(f,\tilde{v}_i^{[k]})\tilde{u}_i^{[k]}\Big\|_{L_2(G)} \leqslant c_{10}(\lambda_k+1)^{1/4}\|f(x)\|_{L_2(G)}.$$

Отсюда и из ортогональности функций $\tilde{u}_i^{[k]}(x)$ вытекает, что

$$|(f,\tilde{v}_i^{[k]})|\,\|\tilde{u}_i^{[k]}\|_{L_2(G)} \leqslant c_{11}(\lambda_k+1)^{1/4}\|f(x)\|_{L_2(G)}.$$

Подставляя в последнее неравенство $f(x)=\tilde{v}_i^{[k]}(x)$, $i=1,\dots,m_k$, получим, что

$$\|\tilde{u}_i^{[k]}\|_{L_2(G)}\,\|\tilde{v}_i^{[k]}\|_{L_2(G)} \leqslant c_{11}(\lambda_k+1)^{1/4}. \tag{21}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Если система собственных и присоединенных функций задачи (1) $\{\tilde{u}_i^{[k]}(x)\}$ состоит из объединения ортогональных базисов корневых подпространств $S_k$, отвечающих собственным значениям $\lambda_k$, то справедлива оценка (21), где $\{\tilde{v}_i^{[k]}(x)\}$ — биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ система.*

Замечание 2. Оценка (21) остается в силе, если система функций $\{\tilde{v}_i^{[k]}(x)\}$ состоит из объединения ортогональных базисов корневых подпространств $S_k^*$, отвечающих собственным значениям $\lambda_k$ задачи, сопря-

женной к задаче (1), а $\{\tilde{u}_i^{[k]}(x)\}$ — соответствующая биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ система.

Для удобства дальнейших рассуждений при каждом $k=1, 2, \ldots$ все функции $u_{j,l}^{[k]}(x)$ $(j=1, \ldots, p_k,\ \ l=0, 1, \ldots, m_j^{[k]}-1)$, отвечающие собственному значению $\lambda_k$, разбитые, как указано выше, на $p_k$ цепочек, перенумеруем так, что вначале следуют функции $u_{1,l}^{[k]}(x)$ первой цепочки, затем функции $u_{2,l}^{[k]}(x)$ второй цепочки и т. д., причем внутри каждой цепочки нумерацию будем вести по возрастанию порядка присоединенных функций. Договоримся обозначать символом $u_r^{[k]} \sim u_q^{[k]}$ тот факт, что функции $u_r^{[k]}$ и $u_q^{[k]}$ принадлежат одной цепочке. Обозначим также $v_m^{[k]}(x)$ ту функцию из системы, биортогонально сопряженной к $\{u_m^{[k]}(x)\}$, которая стоит в паре с $u_m^{[k]}(x)$, т. е. $(u_m^{[k]}, v_m^{[k]})=1$.

Для любого $\alpha \geqslant 0$ и любой функции $f(x) \in L_2(G)$ составим средние Рисса порядка $\alpha$ проектора на корневое подпространство $S_k$:

$$P_k^{\alpha}(x, f, n)=\sum_{m=1}^{m_k}(f, v_m^{[k]}) \sum_{l \geqslant 0} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right)^{\alpha} u_{m-l}^{[k]}(x), \quad u_{m-l}^{[k]} \sim u_m^{[k]}.$$

Пусть $\sigma_n^{\alpha}(x, f)=\sum_{k=1}^{n} P_k^{\alpha}(x, f, n)$.

Теорема 3. *При выполнении условия $\tilde{q} \leqslant 1/2$ имеет место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_n^{1/4}(x, f)-f(x)\|_{L_2(G)}=0. \tag{22}$$

Пусть $\Gamma_n$ — граница прямоугольника с вершинами в точках $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(\lambda_{n+1}-1/2, -1)$, $(\lambda_{n+1}-1/2, 1)$. Обозначим

$$I_n(x, f)=-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4} R_{\lambda} f(x)\, d\lambda. \tag{23}$$

Исходя из выражения (18) для главной части ядра резольвенты $R_{\lambda}$ в окрестности полюса и вычисляя интеграл, стоящий в правой части (23), по вычетам, получим

$$I_n(x, f)=\sigma_n^{1/4}(x, f). \tag{24}$$

Функция $F_p(\lambda)$ имеет не более $p+1$ различных корней, которые занумеруем в возрастающем порядке $\tilde{\lambda}_1^{[p]}, \ldots, \tilde{\lambda}_{\tilde{r}_p}^{[p]}$. Пусть $\tilde{\lambda}_{\hat{r}_p}^{[p]}$ — наибольшее из чисел $\tilde{\lambda}_i^{[p]}(i=1, \ldots, \tilde{r}_p)$, оказавшееся внутри контура $\Gamma_n$. Очевидно, что $\hat{r}_p \leqslant \tilde{r}_p \leqslant p+1$. Легко видеть, что числа $\tilde{\lambda}_i^{[p]}(i=1, \ldots, \hat{r}_p)$ можно разбить на $l$ $(l \leqslant \hat{r}_p)$ непересекающихся групп так, чтобы каждое число, входящее в $j$-тую группу, было меньше каждого числа, входящего в $j+1$ группу, и если $a_j^{[p]}$ и $b_j^{[p]}$ — соответственно наименьшее и наибольшее из чисел $\tilde{\lambda}_i^{[p]}$, входящих в $j$-тую группу, то любое целое число из отрезка $[a_j^{[p]}, b_j^{[p]}]$ является корнем функции $F_p(\lambda)$, а число $a_j^{[p]}-1$ корнем этой функции не является. Отсюда следует, что $b_j^{[p]}+2 \leqslant a_{j+1}^{[p]}(j=1, \ldots, l-1)$.

Пусть $\omega_j^p(j=1, \ldots, l-1)$ — граница прямоугольника с вершинами в точках $(a_j^{[p]}-1, -1)$, $(a_j^{[p]}-1, 1)$, $(b_j^{[p]}+1, -1)$, $(b_j^{[p]}+1, 1)$, а $\omega_l^p$ — граница прямоугольника с вершинами в точках $(a_l^{[p]}-1, -1)$, $(a_l^{[p]}-1, 1)$, $(b_l^{[p]}+1, -1)$, $(b_l^{[p]}+1, 1)$, если $F_p(b_l^{[p]}+1) \neq 0$, и прямоугольника с вершинами в точках $(a_l^{[p]}-1, -1)$, $(a_l^{[p]}-1, 1)$, $(b_l^{[p]}+1/2, -1)$, $(b_l^{[p]}+1/2, 1)$ в противном случае. Пусть $\alpha_j^{[p]}$ — количество чисел $\tilde{\lambda}_i(i=1, \ldots, \hat{r}_p)$ в $j$-той группе. Тогда длина отрезка $[a_j^{[p]}-1, b_j^{[p]}+1]$ равна $\alpha_j^{[p]}+1$, а периметр $L_{p,j}$ прямоугольника $\omega_j^p$ равен $2\alpha_j^{[p]}+6$ при $j=1, \ldots, l-1$ и не превосходит $2\alpha_j^{[p]}+6$ при $j=l$.

Из теоремы Коши следует, что

$$I_{n,p}=\int_{\Gamma_n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}=\sum_{j=1}^{l}\int_{\omega_j^p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{l-1}\int_{\omega_j^p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}+\int_{\omega_l^p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}. \qquad (25)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (25). Для любого $\lambda\in\bigcup_{j=1}^{l-1}\omega_j^p$ справедливы неравенства

$$|F_p(\lambda)|\geqslant 1,\ \ |(1-\lambda/\lambda_{n+1})|^{1/4}<2. \qquad (26)$$

Отсюда следует, что

$$\left|\sum_{j=1}^{l-1}\int_{\omega_j^p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{l-1}\int_{\omega_j^p}\left|1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right|^{1/4}\frac{ds}{|F_p(\lambda)|}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j=1}^{l-1}L_{p,j}=2\sum_{j=1}^{l-1}(2\alpha_j^{[p]}+6)\leqslant 16(p+1). \qquad (27)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (25). Если $F_p(b_l^{[p]}+1)\neq 0$, то при $\lambda\in\omega_l^p$ также выполняются неравенства (26) и, следовательно,

$$\left|\int_{\omega_l^p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right|\leqslant 2L_{p,l}\leqslant 2(2\alpha_l^{[p]}+6)\leqslant 16(p+1). \qquad (28)$$

Рассмотрим случай $F_p(b_l^{[p]}+1)=0$. Тогда $b_l^{[p]}+1$ является наименьшим из полюсов резольвенты $R_\lambda$, лежащих вне контура $\Gamma_n$, т. е. $b_l^{[p]}+1=\lambda_{n+1}$. Пусть $\omega_l^p=\tilde{\omega}_l^p\cup\hat{\omega}_l^p$, где $\tilde{\omega}_l^p$ — отрезок, соединяющий точки $(b_l^{[p]}+1/2,\ -1)$ и $(b_l^{[p]}+1/2,\ 1)$, а $\hat{\omega}_l^p$ — оставшаяся часть контура $\omega_l^p$. Легко видеть, что при $\lambda\in\hat{\omega}_l^p$ имеют место неравенства (26) и, следовательно,

$$\left|\int_{\hat{\omega}_l^p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right|\leqslant 2L_{p,l}\leqslant 16(p+1). \qquad (29)$$

Так как при $\lambda\in\tilde{\omega}_l^p\left|1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right|^{1/4}\leqslant 2\lambda_{n+1}^{-1/4}$, то $\left|\int_{\tilde{\omega}_l^p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/4}\frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right|\leqslant$ $\leqslant 2\lambda_{n+1}^{-1/4}\int_{\tilde{\omega}_l^p}\frac{ds}{|F_p(\lambda)|}$.

Из рассуждений, проведенных в ходе доказательства леммы 2, следует, что

$$\int_{\tilde{\omega}_l^p}\frac{ds}{|F_p(\lambda)|}\leqslant c_{12}\cdot 2^p/\sqrt{p+1}, \qquad (30)$$

если $p\leqslant r_n$, и

$$\int_{\tilde{\omega}_l^p}\frac{ds}{|F_p(\lambda)|}\leqslant c_{13}\cdot 2^{r_n}, \qquad (30')$$

если $p>r_n$, где $r_n=4[\sqrt{(\lambda_n+1)N}]+2$. Из (25), (27)—(30), (30′) вытекает, что

$$|I_{n,p}|\leqslant c_{14}(p+2^p\lambda_{n+1}^{-1/4}/\sqrt{p+1}), \qquad (31)$$

если $p\leqslant r_n$, и

$$|I_{n,p}|\leqslant c_{15}(p+2^{r_n}\lambda_{n+1}^{-1/4}), \qquad (31')$$

если $p > r_n$. Из (31), (31′) и равенства Парсеваля следует, что

$$\|I_n(x, f)\|_{L_2(G)} \leqslant \frac{1}{2\pi} \|f(x)\|_{L_2(G)} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m_1>0} |q_{m_1}| \cdots$$

$$\cdots \sum_{m_p>0} |q_{m_p}| \sup |I_{n,\,p}| \leqslant c_{16} \|f(x)\|_{L_2(G)} \Big(1 + \lambda_{n+1}^{-1/4} \times$$

$$\times \Big( \sum_{p=0}^{r_n} \frac{1}{\sqrt{p+1}} + \sum_{p=r_n+1}^{\infty} 2^{r_n-p} \Big)\Big) \leqslant c_{17} \|f(x)\|_{L_2(G)}.$$

Из последнего неравенства и (23) вытекает, что для любой функции $f(x) \in L_2(G)$ и любого номера $n$

$$\|\sigma_n^{1/4}(x, f)\|_{L_2(G)} \leqslant c_{17} \|f(x)\|_{L_2(G)}. \tag{32}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу полноты системы функций $\{u_m^{[k]}(x)\}$ существует такая функция $Q(x) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{m=1}^{m_k} c_{k,\,m} u_m^{[k]}(x)$, что

$$\|f - Q\|_{L_2(G)} < \varepsilon. \tag{33}$$

Легко видеть, что

$$\|\sigma_n^{1/4}(x, f) - f(x)\|_{L_2(G)} \leqslant \|\sigma_n^{1/4}(x, f - Q)\|_{L_2(G)} +$$
$$+ \|Q - f\|_{L_2(G)} + \|\sigma_n^{1/4}(x, Q) - Q\|_{L_2(G)}. \tag{34}$$

Из (32) и (33) вытекает, что сумма первого и второго слагаемых в правой части (34) не превосходит $(c_{17}+1)\varepsilon$. Пусть далее $n > M$. Так как для любого $k > M$ $P_k^{1/4}(x, Q, n) = 0$, то

$$\sigma_n^{1/4}(x, Q) - Q(x) = \sum_{k=1}^{M} P_k^{1/4}(x, Q, n) - Q(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \sum_{m=1}^{m_k} c_{k,\,m} \Big[ \Big(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\Big)^{1/4} - 1 \Big] u_m^{[k]}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} \sum_{m=1}^{m_k} c_{k,\,m} \sum_{l \geqslant 1} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \Big(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\Big)^{1/4} u_{m-l}^{[k]}(x), \quad u_{m-l}^{[k]} \sim u_m^{[k]}. \tag{35}$$

Поскольку $(1 - \lambda_k/\lambda_{n+1})^{1/4} \to 1$ при $n \to \infty$, то первое слагаемое в правой части (35) стремится к нулю при $n \to \infty$, а так как при $l \geqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \Big(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\Big)^{1/4} = 0,$$

то второе слагаемое в правой части (35) стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда и из (34) следует справедливость равенства (22). Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Из работы В. Э. Кацнельсона [6] следует, что при $N = 2$ последовательность корневых подпространств $S_k$ задачи (1) (без ограничения $\tilde{q} \leqslant 1/2$) образует в $L_2(G)$ базис, эквивалентный ортогональному. Х. Х. Муртазиным в [7] было показано, что при условии $\|T\|_{L_2(G)} < 1/2$, где оператор $Tu = q(x)u$, корневые подпространства $S_k$ образуют в $L_2(G)$ базис, эквивалентный ортогональному. Если $q(x) = q_m e^{-i(m,\,x)}$, где $|q_m| = 1/2$, то $\|T\|_{L_2(G)} = 1/2$, и, стало быть, данный случай не охватывается результатами [7].

Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система функций, где $G$ — произвольная область пространства $R^N$ $(N \geqslant 1)$. Хорошо известно (см., например, [8, 9]), что условие

$$\|u_n\|_{L_2(G)} \|v_n\|_{L_2(G)} \leqslant C, \tag{36}$$

где $\{v_n(x)\}$ — биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ система, является необходимым, но не достаточным условием того, чтобы система $\{u_n(x)\}$ образовывала базис в $L_2(G)$.

Дополнительно предположим, что система $\{u_n(x)\}$ является системой корневых функций оператора

$$L_u = u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u, \tag{37}$$

заданного на некотором интервале $(a, b)$ вещественной оси. В. А. Ильиным [10] было доказано, что при выполнении некоторых естественных условий на спектр оператора (37) и требования, чтобы система $\{v_n(x)\}$ являлась системой корневых функций оператора $L^*v = v'' - \overline{(p_1(x)v)'} + \overline{p_2(x)}v$, формально сопряженного к оператору (37), условие (36) является достаточным для того, чтобы система $\{u_n(x)\}$ образовывала безусловный базис в $L_2(a, b)$. Е. И. Моисеевым [11, 12] были приведены примеры, показывающие, что невыполнение указанного выше требования к системе $\{v_n(x)\}$ при сохранении классической асимптотики спектра и условия (36) может привести к тому, что система $\{u_n(x)\}$ не будет даже обычным базисом в $L_2(a, b)$. Вместе с тем, как это следует из [13], система $\{u_n(x)\}$ будет обладать свойством базисности на любом компакте $K$ интервала $(a, b)$. В настоящей работе коснемся аналогичного вопроса в многомерном $(N \geqslant 2)$ случае.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная полная, ортонормированная в $L_2(G)$ система функций, а $p_i$ — некоторая монотонно возрастающая последовательность целых чисел, причем $p_1 = 0$, $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\,(p_{i+1} - p_i) = \infty$. Несколько модифицируя конструкцию примера 5 из работы Н. К. Бари [8], построим систему функций $\{g_n(x)\}$ следующим образом:

$$g_{p_i+l}(x) = \frac{1}{\mu_{p_i+l}}\varphi_{p_i+l}(x) + \sum_{k=l+1}^{p_{i+1}-p_i}\frac{1}{\mu_{p_i+k}}\left(1 - \sqrt{\frac{k}{k-1}}\right)\varphi_{p_i+k}(x), \tag{38}$$

$l = 1, 2, \ldots, p_{i+1} - p_i - 1$, $g_{p_{i+1}}(x) = (\mu_{p_{i+1}})^{-1}\varphi_{p_{i+1}}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, где $1/2 \leqslant \mu_j \leqslant 1$, причем числа $\mu_j$ не зависят от области $G$. Из способа построения видно, что система $\{g_n(x)\}$ полна.

Следуя [8], можно показать, что система $\{g_n(x)\}$ гильбертова и, кроме того, числа $\mu_j$ могут быть подобраны таким образом, что биортогонально сопряженная система $\{\psi_n(x)\}$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\psi_{p_i+1}(x) = \mu_{p_i+1}\varphi_{p_i+1}(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \\ \psi_{p_i+l}(x) = (\sqrt{l} - \sqrt{l-1})\sum_{k=1}^{l-1}\frac{\sqrt{\mu_{p_i+k}}}{\sqrt{k}}\varphi_{p_i+k}(x) + \mu_{p_i+l}\varphi_{p_i+l}(x), \\ l = 2, 3, \ldots, p_{i+1} - p_i,\end{gathered} \tag{39}$$

и нормированна в $L_2(G)$. Легко видеть, что $\{\psi_n(x)\}$ полна. Из гильбертовости $\{g_n(x)\}$ вытекает (см. [8]) бесселевость $\{\psi_n(x)\}$. Отсюда следует, что $\|g_n\|_{L_2(G)} \leqslant c_{18}$ и, следовательно, системы $\{\psi_n\}$ и $\{g_n\}$ равномерно минимальны. Рассуждая аналогично [8], можно доказать, что $\{\psi_n\}$ не образует базис в $L_2(G)$.

Рассмотрим действующий в некоторой области $G$ пространства $R^N$ оператор Лапласа с краевыми условиями, обеспечивающими существование полной ортонормированной системы собственных функций и неограниченный рост кратности собственных значений $\lambda_k$. Такими, в частности, будут периодические краевые условия $(N \geqslant 2)$, условия Дирихле в $N$-мерном $(N \geqslant 3)$ шаре и т. д. Преобразуя по формулам (38) и (39) ортонормированные базисы $\{\varphi_{k,l}(x)\}(k = 1, 2, \ldots, l = 1, \ldots, \dim S_k)$ корневых подпространств $S_k$, отвечающих собственным значениям $\lambda_k$, получим полную, нормированную, бесселеву систему $\{\psi_{k,l}(x)\}$ собственных функций оператора Лапласа с теми же краевыми условиями, причем биорто-

гонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{g_{k,l}(x)\}$ также является полной системой собственных функций оператора Лапласа. Из наших рассуждений вытекает, что система $\{\psi_{k,l}(x)\}$ не образует базис в $L_2(G)$.

Далее рассмотрим следующую краевую задачу для оператора Лапласа с периодическими краевыми условиями:

$$\begin{gathered}\Delta u+\lambda u=0, \quad x\in G=(-2\pi, 2\pi)^N, \\ u|_{x_i=-2\pi}=u|_{x_i=2\pi}, \ \partial u/\partial x_i|_{x_i=-2\pi}=\partial u/\partial x_i|_{x_i=2\pi}.\end{gathered} \tag{40}$$

Пусть $\{u_n(x)\}$ — ортонормированная в $L_2(G)$ система собственных функций задачи (40). Очевидно, систему функций $\{u_n(x)\}$ можно представить в виде объединения двух систем: $\{\varphi_n(x)\}(n=1, 2, \ldots)$ и $\{\tau_m(x)\}(m=1, 2, \ldots)$, где $\{\varphi_n(x)\}$ — система собственных функций краевой задачи

$$\begin{gathered}\Delta\varphi+\lambda\varphi=0, \ x\in G_0=(-\pi, \pi)^N, \\ \varphi|_{x_i=-\pi}=\varphi|_{x_i=\pi}, \ \partial\varphi/\partial x_i|_{x_i=-\pi}=\partial\varphi/\partial x_i|_{x_i=\pi},\end{gathered} \tag{41}$$

а $\{\tau_m(x)\}$ — остальные функции системы $\{u_n(x)\}$. Система $\{\varphi_n(x)\}$ является объединением ортогональных в $L_2(G_0)$ базисов $\varphi_{k,l}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, l=1, \ldots, \dim S_k)$ корневых подпространств $S_k$, отвечающих собственным значениям $\lambda_k$ задачи (41).

Преобразуя по формулам (38) и (39) базисы $\{\varphi_{k,l}(x)\}$, получим две системы функций: $\{\psi_{k,l}(x)\}$ и $\{g_{k,l}(x)\}$. Из [8] следует, что система $\{\psi_{k,l}\}\cup\{\tau_m\}$ является полной, нормированной в $L_2(G)$, бесселевой системой собственных функций задачи (40), а $\{g_{k,l}\}\cup\{\tau_m\}$ — биортогонально сопряженной к ней в $L_2(G)$ полной, гильбертовой системой собственных функций той же краевой задачи.

Нам также потребуется следующее элементарное утверждение.

Лемма 4. *Если $f(x)$ — произвольная суммируемая, $2\pi$-периодическая по всем переменным функция, то*

$$\int_G f(x)\,dx=2^N\int_{G_0} f(x)\,dx.$$

Легко видеть, что куб $G$ может быть представлен как объединение кубов $G_i$ $(i=1, \ldots, 2^N)$ со сторонами, параллельными осям координат и равными $2\pi$. Стандартной заменой переменных доказывается, что для любого $i$ $\int_{G_i} f(x)\,dx=\int_{G_0} f(x)\,dx$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Из леммы 4 следует, что $\|\varphi_n\|_{L_2(G_0)}=\|\psi_{k,l}\|_{L_2(G_0)}=2^{-N/2}$. Обозначим $\tilde\varphi_n(x)=2^{N/2}\varphi_n(x)$, $\tilde\psi_{k,l}(x)=2^{N/2}\psi_{k,l}(x)$, $\tilde g_{k,l}(x)=2^{N/2}g_{k,l}(x)$. Тогда система $\{\tilde\varphi_n(x)\}$ является ортонормированным базисом в $L_2(G_0)$, а система $\{\tilde\psi_{k,l}(x)\}$ — полной, нормированной в $L_2(G_0)$, бесселевой системой функций, не образующей базис в $L_2(G_0)$ ($\{\tilde g_{k,l}(x)\}$ — биортогонально сопряженная в $L_2(G_0)$ система). Следовательно, существует функция $F(x)\in L_2(G_0)$, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(F, \tilde g_{k,l})_{G_0}\tilde\psi_{k,l}(x)$ расходится в $L_2(G_0)$. Очевидно,

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\tilde\varphi_i(x), \tag{42}$$

где $c_i=(F, \tilde\varphi_i)_{G_0}$. В силу периодичности функций $\tilde\varphi_i(x)$ ряд в правой части (42) сходится в $L_2(G)$, следовательно, функция $F^*(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\tilde\varphi_i(x)$ $(x\in G)$ принадлежит классу $L_2(G)$.

Легко видеть, что для любого $m=1, 2, \ldots$

$$(F^*, \tau_m)_G=\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\tilde\varphi_i, \tau_m)_G=0. \tag{43}$$

Из леммы 4 следует, что при $x \in G_0$

$$(F^*, g_{k,l})_G \psi_{k,l}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\tilde{\varphi}_i, g_{k,l})_G \psi_{k,l}(x) =$$

$$= 2^N \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\tilde{\varphi}_i, g_{k,l})_{G_0} \psi_{k,l}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\tilde{\varphi}_i, \tilde{g}_{k,l})_{G_0} \tilde{\psi}_{k,l}(x) = (F, \tilde{g}_{k,l})_{G_0} \tilde{\psi}_{k,l}(x). \tag{44}$$

Из равенств (43) и (44) вытекает, что при $x \in G_0$ разложение функции $F^*(x)$ в биортогональный ряд по системе $\{\psi_{k,l}\} \cup \{\tau_m\}$ совпадает с разложением функции $F(x)$ в биортогональный ряд по системе $\{\psi_{k,l}\}$ и, стало быть, система $\{\psi_{k,l}\} \cup \{\tau_m\}$ не обладает свойством базисности на компакте $\bar{G}_0$ области $G$.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину и Е. И. Моисееву за стимулирующие беседы.

## Литература

1. Лидский В. Б. // Функц. анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 89—90.
2. Ашуров Р. Р. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 156—158.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969. Т. 2.
5. Келдыш М. В. // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 4. С. 15—41.
6. Кацнельсон В. Э. // Функц. анализ. 1967. Т. 1, № 2. С. 39—51.
7. Муртазин Х. Х. Свойства решений и спектра сингулярного уравнения Шредингера: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1993.
8. Бари Н. К. // Уч. зап. МГУ. 1951. Т. 4, вып. 148. С. 69—107.
9. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
10. Ильин В. А. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048—1053.
11. Моисеев Е. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 794—798.
12. Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177—179.
13. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771—794; № 6. С. 980—1009.

*Московский институт приборостроения*

*Поступила в редакцию 26 июля 1994 г.*