R. S. Khairullin, The Tricomi problem for an equation of mixed type of the second kind in the case of an unbounded domain,
Differ. Uravn., 1994, Volume 30, Number 11, 2010–2017

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.95

Р. С. ХАЙРУЛЛИН

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

1°. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0,\ \alpha\leqslant -1/2, \tag{1}$$

в области D, состоящей из верхней полуплоскости D_1 и бесконечного треугольника D_2, ограниченного характеристиками AB: $x-2\sqrt{-y}=0$ и AC: $y=0$.

Краевые задачи для уравнения (1) исследованы в работах [1—7]. В отличие от названных работ в настоящей статье рассмотрен случай неограниченной гиперболической подобласти.

Введем обозначения: m и n — такие натуральные числа, что $1<2\alpha+m\leqslant 2$, $-1/2<\alpha+n\leqslant 1/2$; $\delta=2\alpha+m-1$, $\alpha_0=\alpha+n$. Очевидно, что $m=2n+1$, $\delta=2\alpha_0$ при $0<\alpha_0\leqslant 1/2$ и $m=2n+2$, $\delta=2\alpha_0+1$ при $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$.

Задача T. В области D найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $u(x, y)\in C(D\cup\{y=0\}\cup AB)$;

2) $u(x, y)=o(R^{2-2\alpha})$, $u_x(x, y)=o(R^{1-2\alpha})$, $u_y(x, y)=o(R^{-2\alpha})$ при $R\to+\infty$, $R^2=x^2+4y$;

3) $u(x, y)\in C^2(D_1\cup D_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D_1\cup D_2$;

4) существуют пределы

$$\nu_i(x)=\lim_{\substack{y\to 0\\ (x,y)\in D_i}}|y|^{\alpha}[u(x, y)-B_{\alpha}(x, y, \tau)]_y,\ 0<x<+\infty, \tag{2}$$

$i=1, 2$, и выполняется условие склеивания

$$\nu_1(x)=(-1)^n\nu_2(x),\ 0<x<+\infty; \tag{3}$$

5) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, 0)=\varphi(x),\ -\infty<x\leqslant 0, \tag{4}$$

$$u(x, y)|_{AB}=\psi(x),\ 0\leqslant x<+\infty, \tag{5}$$

где

$$\tau(x)=u(x, 0),\ 0\leqslant x<+\infty; \tag{6}$$

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции со свойствами: $\varphi(x)\in C(-\infty, 0]$ и имеет представления

$$\varphi(x)=\varphi_{\infty}(x)|x|^{\omega}\ \text{при}\ x\to-\infty, \tag{7}$$

$$\varphi(x)=\sum_{s=0}^{n}\varphi^{(s)}(o)x^s/s!+\varphi_0(x)|x|^{\varepsilon}\ \text{при}\ x\to 0, \tag{8}$$

где $\omega < n+(1-3\alpha_0)/2$, $\varepsilon > 1/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0<0$; $\omega<n+1$, $\varepsilon>1/2+n$, если $\alpha_0=0$; и $\omega<n+(3-3\alpha_0)/2$, $\varepsilon>1-2\alpha-n$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$; $\varphi^{\{s\}}(0)$ — разностные производные порядка s в точке 0; $\psi(x)\in C^n[0,+\infty)\cap C^{n+1,\lambda}(0,+\infty)$, $\lambda>1/2-\alpha_0$, $\psi^{(n+1)}(x)$ имеет представления $\psi^{(n+1)}(x)=\psi_0(x)x^{-\varkappa}$ при $x\to 0$, $\psi^{(n+1)}(x)=\psi_\infty(x)x^{\beta}$ при $x\to+\infty$, где $\varkappa<2\alpha_0$, $\beta<(1-3\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$; $\varkappa<1/2$, $\beta<0$, если $\alpha_0=0$; и $\varkappa<\alpha_0+1/2$, $\beta<-(1+3\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; $\varphi_0(x)$, $\varphi_\infty(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_\infty(x)$ — ограниченные функции; выполняются условия сопряжения $\varphi^{\{s\}}(0)=\psi^{(s)}(0)\cdot 2^{-s}(2\alpha-1)_s/(\alpha-1/2)_s$, $s=\overline{0,n}$;

$$B_\alpha(x,y,\tau)=\sum_{s=0}^{n}\frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s}{s!(\alpha)_s}y^s-$$

$$-\frac{\tau^{(2n+2)}(x)}{n!(n+1)!}y^{n+1}\left(\ln|y|-\sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{s}\right),\ \alpha=-n,$$

$$B_\alpha(x,y,\tau)=\sum_{s=0}^{[m/2]}\frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s}{s!(\alpha)_s}y^s,\ \alpha\neq -n,$$

$[\cdot]$ — целая часть числа, $(\alpha)_0=1$, $(\alpha)_s=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)$.

Обе части равенства (3) обозначим через $\nu(x)$ и на функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ наложим следующие условия.

Условия А. $\tau(x)\in C^n[0,+\infty)\cap C^{m,\gamma}(0,+\infty)$, $\gamma>1-\delta$, $\tau^{(n+1)}(x)$ может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $\alpha_0+1/2$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $2\alpha_0$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, и должна иметь представление $\tau^{(n+1)}(x)=\tau_\infty(x)x^{-\theta}$ при $x\to+\infty$, где $\theta>(1+3\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; $\theta>0$, если $\alpha_0=0$; и $\theta>(-1+3\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$; $\nu(x)\in C(0,+\infty)$ и может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $3/2-\alpha$.

2°. Задачу будем решать методом интегральных уравнений. Соотношения между τ и ν из гиперболической подобласти с учетом условия (5) имеют вид [7]

$$(-1)^n\Gamma(\alpha)\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}D_{0x}^{-\delta}\tau^{(n+1)}(x)-\Gamma(1-\alpha)\nu(x)=\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)}),$$

$$\alpha\neq -n, \tag{9}$$

$$\frac{2}{n!}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_0^x\tau^{(n+1)}(\sigma)\ln(x-\sigma)d\sigma-n!\nu(x)=\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)}),\ \alpha=-n, \tag{10}$$

и при всех α

$$\tau^{(s)}(0)=\psi^{(s)}(0)\cdot 2^{-s}(2\alpha-1)_s/(\alpha-1/2)_s,\ s=\overline{0,n}, \tag{11}$$

где D_{0x}^l — оператор дробного дифференцирования по Риману—Лиувиллю при $l\geqslant 0$ и дробного интегрирования при $l<0$ (см., например, [8]);

$$\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)})=(-1)^n\sqrt{\pi}\cdot 2^{1-2\alpha-n}x^{\alpha-1/2}D_{0x}^{1/2-\alpha_0}\psi^{(n+1)}(x/2).$$

Из свойств функции $\psi(x)$ следует, что $\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)})$ может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $3/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, а при $x\to+\infty$ имеет нуль порядка выше $n+(3-\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; выше $n+1$, если $\alpha_0=0$, и выше $n+(1-\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$.

3°. Перейдем к исследованию задачи в D_1. Здесь рассмотрим задачу Дирихле с краевым условием (4), (6). Ее явное решение записывается формулой [9]

$$u(x,y)=\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)\,[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi+$$

$$+\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int\limits_{0}^{+\infty}\tau(\xi)\,[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi, \tag{12}$$

где $k=\Gamma(3/2-\alpha)\,(1-\alpha)/\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)4^{\alpha-1}$.

Приступим к выводу соотношения из эллиптической подобласти, для этого подставим функцию (12) в предел (2) и распишем его так:

$$\nu(x)=\lim_{y\to 0}y^{\alpha}\left[\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)\,[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi\right]_y+ \tag{13}$$

$$+\lim_{y\to 0}y^{\alpha}\left[\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int\limits_{0}^{+\infty}\tau(\xi)\,[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi-B_{\alpha}(x,y,\tau)\right]_y=J_1+J_2.$$

Нетрудно получить

$$J_1=k\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)\,(x-\xi)^{2\alpha-3}d\xi.$$

Выделим особенности функции J_1, для этого разобьем линию интегрирования на две части и во втором интеграле воспользуемся представлением (8)

$$J_1=k\int\limits_{-\infty}^{-c}\varphi(\xi)\,(x-\xi)^{2\alpha-3}d\xi+\sum_{s=0}^{n}\frac{k\varphi^{(s)}(0)}{s!}\int\limits_{-c}^{0}\xi^{s}(x-\xi)^{2\alpha-3}d\xi+$$

$$+k\int\limits_{-c}^{0}\varphi_0(\xi)\,|\xi|^{\varepsilon}(x-\xi)^{2\alpha-3}d\xi=J_{11}+J_{12}+J_{13}.$$

Очевидно, что слагаемое J_{11} ограничено при $x=0$. Для преобразования других слагаемых произведем замену переменной интегрирования $\xi=-ct$, предварительно воспользовавшись теоремой о среднем в J_{13}, и на основании формул (15.3.1), (15.5.9), (6.6.8), (6.6.2), (6.6.3) из [10] получим

$$J_{12}=\sum_{s=0}^{n}\frac{k(-1)^{s}\Gamma(2-2\alpha-s)}{\Gamma(3-2\alpha)}\varphi^{(s)}(0)x^{2\alpha+s-2}-$$

$$-\sum_{s=0}^{n}\frac{k(-1)^{s}\varphi^{(s)}(0)}{s!(2-2\alpha-s)}(c+x)^{2\alpha+s-2}F(2-2\alpha-s,\,-s,\,3-2\alpha-$$

$$-s,\,x/(x+c))=J_{121}+J_{122},$$

$$J_{13}=(kc^{\varepsilon+1}/(\varepsilon+1))\varphi_0(\bar{x})x^{2\alpha-2+\varepsilon}(x+c)^{-\varepsilon-1}F(\varepsilon+1,\,\varepsilon+2\alpha-1,\,\varepsilon+$$

$$+2,\,c/(c+x)).$$

Функция J_{13} имеет при $x=0$ особенность порядка ниже $3/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$. Обозначим $\Phi_{\alpha}(x,\varphi)=J_{11}+J_{122}+J_{13}$. Нетрудно видеть, что при $x=0$ особенность функции $\Phi_{\alpha}(x,\varphi)$ совпадает с особенностью функции J_{13}. С другой стороны, каждое слагаемое функции J_{121} имеет при $x=0$ особенность порядка не ниже $2-2\alpha-n\geqslant 3/2-\alpha$. Таким образом, мы выделили особенности функции J_1, которая приняла вид

$$J_1=\Phi_\alpha(x,\varphi)-\sum_{s=0}^{n}\frac{k\varphi^{(s)}(0)}{(2\alpha-2)_{s+1}}x^{2\alpha+s-2}. \tag{14}$$

Исследуем поведение функции $\Phi_\alpha(x,\varphi)$ при $x\to+\infty$, для этого перепишем формулу (14) так:

$$\Phi_\alpha(x,\varphi)=J_1-J_{121}. \tag{15}$$

Функция J_{121} имеет при $x\to+\infty$ нуль порядка не ниже $2-2\alpha-n$. Рассмотрим J_1. С учетом представления (7) имеем

$$J_1=k\int_0^N\varphi(-\xi)(x+\xi)^{2\alpha-3}d\xi+k\int_N^{+\infty}\varphi_\infty(-\xi)\xi^\omega(x+\xi)^{2\alpha-3}d\xi=J'_{11}+J'_{12}. \tag{16}$$

Очевидно

$$J'_{11}=O(x^{2\alpha-3})\ \text{при}\ x\to+\infty. \tag{17}$$

Для вычисления J'_{12} вначале опять воспользуемся теоремой о среднем, затем после подстановки $\xi=N/(1-\sigma)$ используем формулы (15.3.1), (15.3.3) из [10]. В результате получим

$$J'_{12}=\frac{k\varphi_\infty(-\bar{x})}{2-2\alpha-\omega}(x+N)^{2\alpha-2+\omega}F\left(2-2\alpha-\omega,\ -\omega,\ 3-2\alpha-\omega,\ \frac{x}{x+N}\right). \tag{18}$$

Из соотношений (15)—(18) и значений ω следует, что функция $\Phi_\alpha(x,\varphi)$ при $x\to+\infty$ имеет нуль порядка выше $n+(3-\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; выше $n+1$, если $\alpha_0=0$, и выше $n+(1-\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$.

Перейдем к исследованию J_2. Интеграл, входящий в J_2, обозначим через J'_2 и займемся его преобразованием. Зафиксируем x и выберем $a>x$, тогда можно записать

$$J'_2=\sum_{s=0}^{m}\tau^{(s)}(x)/s!\int_0^a(\xi-x)^s[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi+$$
$$+\int_0^a\left[\tau(\xi)-\sum_{s=0}^{m}\tau^{(s)}(x)(\xi-x)^s/s!\right][(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi+$$
$$+\int_a^{+\infty}\tau(\xi)[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi=J'_{21}+J'_{22}+J'_{23}. \tag{19}$$

Линию интегрирования в J'_{21} разобьем на две части: от 0 до x и от x до a, и после замены $\sigma=(x-\xi)^2$ имеем

$$J'_{21}=\sum_{s=0}^{m}\frac{\tau^{(s)}(x)}{(s+1)!}(4y)^{\alpha-1+s/2}\left[\left(\frac{x^2}{x^2+4y}\right)^{(s+1)/2}(-1)^sF\left(\frac{s}{2}+\right.\right.$$
$$\left.+\alpha,\frac{s+1}{2},\frac{s+3}{2},\frac{x^2}{x^2+4y}\right)+\left(\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2+4y}\right)^{(s+1)/2}F\left(\frac{s}{2}+\right.$$
$$\left.\left.+\alpha,\frac{s+1}{2},\frac{s+3}{2},\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2+4y}\right)\right].$$

Отсюда получим

$$J_{21}=\lim_{y\to 0}y^\alpha\left[\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}J'_{21}-B_\alpha(x,y,\tau)\right]_y=$$

$$= \sum_{s=0}^{m} \frac{k\tau^{(s)}(x)}{s+2\alpha-2} \left[(-1)^s x^{2\alpha+s-2} + (a-x)^{2\alpha+s-2}\right], \ \delta<1, \tag{20}$$

$$J_{21} = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{k\tau^{(s)}(x)}{s+2\alpha-2} \left[(-1)^s x^{2\alpha+s-2} + (a-x)^{2\alpha+s-2}\right] +$$

$$+ \frac{k\tau^{(m)}(x)}{m!} \left[(-1)^m \ln x + \ln(a-x) - (1+(-1)^m) \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s}\right], \ \delta=1. \tag{21}$$

Рассмотрим J_{22}. Выполняя дифференцирование и переходя к пределу, имеем

$$J_{22} = \lim_{y\to 0} y^\alpha \left[\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha} J'_{22}\right]_y = k \int_0^a \left[\tau(\xi) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{m} \tau^{(s)}(x)(\xi-x)^s/s!\right] |x-\xi|^{2\alpha-3} d\xi. \tag{22}$$

Для дальнейших преобразований введем следующие функционалы:

$$E_{p,\gamma}(f) = \int_0^x \left[f(\sigma) - \sum_{s=0}^{p-1} f^{(s)}(x)(\sigma-x)^s/s!\right] (x-\sigma)^{-\gamma-p} d\sigma,$$

$$E^*_{p,\gamma}(f) = \int_x^a \left[f(\sigma) - \sum_{s=0}^{p-1} f^{(s)}(x)(\sigma-x)^s/s!\right] (\sigma-x)^{-\gamma-p} d\sigma,$$

$0<\gamma<1$, $p=0, 1, 2, \ldots$ или $\gamma=0$, $p=1, 2, 3, \ldots$,

$$E_{0,0}(f) = \int_0^x f(\sigma) \ln(x-\sigma) d\sigma, \quad E^*_{0,0}(f) = \int_x^a f(\sigma) \ln(\sigma-x) d\sigma,$$

$$f(x) \in L(0, a) \cap C(0, a) \cap C^{p-1,\lambda}(0, a), \ \lambda>\gamma.$$

Справедлива

Лемма 1. *Верны соотношения*

$$E_{p+1,\gamma}(f) = -\frac{1}{\gamma+p} \frac{d}{dx} E_{p,\gamma}(f) + \frac{1}{\gamma+p} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{f^{(p)}(x)}{x^\gamma},$$

$$E^*_{p+1,\gamma}(f) = \frac{1}{\gamma+p} \frac{d}{dx} E^*_{p,\gamma}(f) + \frac{1}{\gamma+p} \frac{1}{p!} \frac{f^{(p)}(x)}{(a-x)^\gamma},$$

$0<\gamma<1$, $p=0, 1, 2, \ldots$ *или* $\gamma=0$, $p=1, 2, 3, \ldots$, *и*

$$E_{1,0}(f) = \frac{d}{dx} E_{0,0}(f) - f(x) \ln x, \quad E^*_{1,0}(f) = -\frac{d}{dx} E^*_{0,0}(f) - f(x) \ln(a-x).$$

Лемма 2. *Верны соотношения*

$$E_{p,\gamma}(f) = \frac{(-1)^p}{(\gamma)_p} \frac{d^p}{dx^p} E_{0,\gamma}(f) + \sum_{l=0}^{p-1} \frac{f^{(l)}(x)(-1)^l x^{l-\gamma-p+1}}{l!(p+\gamma-l-1)}, \ 0<\gamma<1, \tag{23}$$

$$E_{p,0}(f) = -\frac{(-1)^p}{(p-1)!} \frac{d^p}{dx^p} E_{0,0}(f) + \sum_{l=0}^{p-2} \frac{f^{(l)}(x)(-1)^l}{l!(p-l-1)} x^{l-p+1} +$$

$$+ \frac{(-1)^p}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x) \left[\ln x - \sum_{s=1}^{p-1} \frac{1}{s}\right], \tag{24}$$

$$E^*_{p,\gamma}(f)=\frac{1}{(\gamma)_p}\frac{d^p}{dx^p}E^*_{0,\gamma}(f)+\sum_{l=0}^{p-1}\frac{f^{(l)}(x)(a-x)^{l-\gamma-p+1}}{l!(p+\gamma-l-1)},\ 0<\gamma<1,\tag{25}$$

$$E^*_{p,0}(f)=-\frac{1}{(p-1)!}\frac{d^p}{dx^p}E^*_{0,0}(f)+\sum_{l=0}^{p-2}\frac{f^{(l)}(x)(a-x)^{l-p+1}}{l!(p-l-1)}-$$
$$-\frac{1}{(p-1)!}f^{(p-1)}(x)\left[\ln(a-x)-\sum_{s=1}^{p-1}\frac{1}{s}\right].\tag{26}$$

Лемма доказывается методом математической индукции с использованием леммы 1.

Теперь разобьем линию интегрирования в J_{22} на две части: от 0 до x и от x до a, и на основании формул (13), (14), (19)—(26) получим основное соотношение между τ и ν из эллиптической подобласти

$$\nu(x)=k\left[\frac{(-1)^{m+1}}{(1-\delta)_{m+1}}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_0^x\tau^{(n+1)}(\sigma)(x-\sigma)^{\delta-1}d\sigma+\right.$$
$$+\frac{1}{(1-\delta)_{m+1}}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_x^a\tau^{(n+1)}(\sigma)(\sigma-x)^{\delta-1}d\sigma+$$
$$\left.+\frac{1}{(2-\delta)_m}\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\int_a^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\sigma)d\sigma}{(\delta-x)^{2-\delta}}\right]+\Phi_\alpha(x,\varphi),\ \delta<1,\tag{27}$$

$$\nu(x)=k\left[\frac{(-1)^m}{m!}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_0^x\tau^{(n+1)}(\sigma)\ln(x-\sigma)d\sigma-\right.$$
$$-\frac{1}{m!}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_x^a\tau^{(n+1)}(\sigma)\ln(\sigma-x)d\sigma+$$
$$\left.+\frac{1}{m!}\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\int_a^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\sigma)d\sigma}{\sigma-x}\right]+\Phi_\alpha(x,\varphi),\ \delta=1,\tag{28}$$

и при всех α $\tau^{(s)}(0)=\varphi^{(s)}(0)$, $s=\overline{0,n}$.

4°. Приступим к выводу интегрального уравнения. Будем различать следующие случаи.

Пусть $\delta<1$. В этом случае соотношения между τ и ν имеют вид (9) и (27). Исключая из них $\nu(x)$, получим уравнение

$$\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left[\left(1-\frac{1}{2\cos\pi\alpha_0}\right)D_{0x}^{1-\delta}\tau^{(n+1)}(x)-\frac{(-1)^m}{2\cos\pi\alpha_0}D_{xa}^{1-\delta}\tau^{(n+1)}(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^m(1-\delta)}{2\Gamma(\delta)\cos\pi\alpha_0}\int_a^{+\infty}\tau^{(n+1)}(\sigma)(\sigma-x)^{\delta-2}d\sigma\right]=2f_\alpha(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2},$$

где $f_\alpha(x)=[\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)})+\Gamma(1-\alpha)\Phi_\alpha(x,\varphi)]\cos(\pi\alpha_0/2)\Gamma(1-\alpha)/\pi$. Очевидно, $f_\alpha(x)$ при $x=0$ имеет особенность порядка ниже $3/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, а при $x\to+\infty$ имеет нуль порядка выше $n+(3-\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; выше $n+1$, если $\alpha_0=0$, и выше $n+(1-\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$.

Далее, уравнение перепишем так:

$$\left(1-\frac{1}{2\cos\pi\alpha_0}\right)D_{0x}^{1-\delta}\tau^{(n+1)}(x)-\frac{(-1)^m}{2\cos\pi\alpha_0}D_{xa}^{1-\delta}\tau^{(n+1)}(x)+$$

$$+\frac{(-1)^m(1-\delta)}{2\Gamma(\delta)\cos\pi\alpha_0}\int\limits_a^{+\infty}\tau^{(n+1)}(\sigma)(\sigma-x)^{\delta-2}d\sigma=$$

$$=2F_\alpha(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}+\sum_{s=0}^{m-n-1}c_s x^s, \tag{29}$$

где

$$F_\alpha(x)=\frac{(-1)^{m-n-1}}{(m-n-2)!}\int\limits_x^{+\infty}f_\alpha(\sigma)(\sigma-x)^{m-n-2}d\sigma, \tag{30}$$

c_s — произвольные постоянные. Из свойств $f_\alpha(x)$ следует, что интеграл (30) сходится, и функция $F_\alpha(x)$ имеет при $x\to+\infty$ нуль, если $\alpha_0=0$, и нуль порядка выше $(1-\alpha_0)/2$, если $\alpha_0\neq 0$, а при $x=0$ может иметь особенность порядка ниже $1/2-\alpha_0$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже 1, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$.

Применим к обеим частям уравнения (29) оператор $D_{0x}^{\delta-1}$ и с учетом формул композиции дробных производных и интегралов (4.8), (4.26) из [8] после приведения подобных членов получим

$$\mu(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}-\cos\frac{\pi\alpha_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mu(\sigma)d\sigma}{\sigma-x}=$$

$$=F'_\alpha(x)+\sum_{s=0}^{m-n-1}c'_s x^s, \tag{31}$$

$$\mu(x)=\tau^{(n+1)}(x)x^{\delta-1}, \tag{32}$$

$$F'_\alpha(x)=x^{\delta-1}D_{0x}^{\delta-1}F_\alpha(x), \tag{33}$$

$$c'_s=c_s s!/2\Gamma(s+2-\delta)\sin(\pi\alpha_0/2).$$

Из соотношения (33) имеем, что у функций $F_\alpha(x)$ и $F'_\alpha(x)$ порядки особенности при $x=0$ и нуля при $x\to+\infty$ совпадают, а из условия А и формулы (32) следует, что и у функции $\mu(x)$ допускаются особенности и требуются нули тех же порядков в соответствующих точках.

Пока оставим уравнение (31) и рассмотрим оставшиеся случаи.

Пусть $\alpha_0=1/2$. В этом случае $\delta=1$, $m=2n+1$ и соотношения между τ и ν имеют вид (9), (28). Из них получим уравнение

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\tau^{(n+1)}(x)\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\sigma)d\sigma}{\sigma-x}\right)=f_\alpha(x),$$

равносильное (31), причем соотношения (32), (33) в этом случае запишутся так:

$$\mu(x)=\tau^{(n+1)}(x),\ F'_\alpha(x)=F_\alpha(x). \tag{34}$$

Пусть $\alpha_0=0$. Теперь $\delta=1$, $m=2n+2$, основные соотношения имеют вид (10), (28), с учетом которых получим

$$-\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\sigma)d\sigma}{\sigma-x}=f_\alpha(x).$$

Отсюда опять следует уравнение (31) при равенствах (34).

Таким образом, уравнение (31) справедливо при всех α. Уравнения такого вида имеют решения, когда правая часть обращается в нуль при $x\to+\infty$ [11]. Отсюда следуют равенства $c'_s=0$, $s=\overline{0,m-n-1}$.

Выполним замену переменных [11]

$$\sigma=\xi/(1-\xi),\ x=\eta/(1-\eta),\ \mu(x)=\rho(\eta)(1-\eta),$$
$$F'_\alpha(x)=g(\eta)(1-\eta), \tag{35}$$

тогда уравнение (31) примет вид

$$\rho(\eta)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}-\cos\frac{\pi\alpha_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\rho(\xi)\,d\xi}{\xi-\eta}=g(\eta). \tag{36}$$

Из соотношений (35) следует, что функция $g(\eta)$ имеет особенности при $\eta=0$ порядка ниже $1/2-\alpha_0$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже 1, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, при $\eta=1$ порядка ниже 1, если $\alpha_0=0$, и ниже $(1+\alpha_0)/2$, если $\alpha_0\neq 0$. Такие же особенности возможны у $\rho(\eta)$. Поэтому надо использовать формулу решения, ограниченного при $\eta=0$ в случае $\alpha_0=0$ и ограниченного при $\eta=1$ в случае $\alpha_0\neq 0$. Эти формулы можно выписать в явном виде [11]. Каждая из них дает единственное решение уравнения (36) из соответствующего класса.

Далее, по найденному $\rho(\eta)$ определяем $\mu(x)$ и $\tau^{(n+1)}(x)$. По формулам (9) или (10) вычисляем $\nu(x)$. С учетом соотношений (11) восстанавливаем $\tau(x)$, а зная $\tau(x)$ и $\nu(x)$, записываем искомую функцию в областях D_1 и D_2 по формулам решений соответственно задачи Дирихле и задачи типа Коши [12, 7]. Единственность искомой функции следует из однозначности определения функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ и единственности решений вспомогательных задач.

В результате доказана

Т е о р е м а. *Задача T имеет единственное решение.*

Литература

1. И с а м у х а м е д о в С. С. // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Ташкент, 1975. № 5. С. 28—37.
2. К р и к у н о в Ю. М. // Изв. вузов. Математика. 1979. № 9. С. 21—28.
3. К р и к у н о в Ю. М. // Изв. вузов. Математика. 1979. № 10. С. 57—63.
4. К р и к у н о в Ю. М. // Изв. вузов. Математика. 1982. № 1. С. 26—32.
5. С а л т ы к о в а Н. М., С м и р н о в М. М. // Вестн. Ленингр. гос. ун-та. 1985. № 1. С. 43—49.
6. Х а й р у л л и н Р. С. О задаче Трикоми для уравнения второго рода. Казань, 1986. Деп. в ВИНИТИ 08.04.86, № 2481.
7. Х а й р у л л и н Р. С. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 8. С. 1396—1407.
8. С м и р н о в М. М. Уравнения смешанного типа: Учеб. пособие. М., 1985.
9. Д ж а и а н и Г. В. Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу: Учеб. пособие / Тбил. гос. ун-т. Тбилиси, 1984.
10. С п р а в о ч н и к по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.
11. Г а х о в Ф. Д., Краевые задачи. 3-е изд. М., 1977.
12. Е л е е в В. А. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 46—58.

Казанский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию 28 декабря 1992 г.