Л. З. Фишман, О численном нахождении предельных циклов дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 426–428

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 426–428

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929.5

О ЧИСЛЕННОМ НАХОЖДЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2005 г. Л. З. Фишман

Рассмотрим уравнение второго порядка с запаздыванием

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)). \tag{1}$$

Фазовым пространством Φ уравнения (1) является пространство непрерывно дифференцируемых функций $\phi(s)$, заданных на отрезке $s \in [-\tau, 0]$.

Предположим [1, с. 184], что имеется множество траекторий уравнения (1), которое обозначим через Ω, пересекающее вновь и вновь при $t \to \infty$ многообразие точек $\Pi \in \Phi$, которое является секущей гиперповерхностью для множества траекторий Ω в пространстве Φ.

Множество траекторий Ω определяет на гиперповерхности Π точечное отображение

$$\bar{\phi} = A\phi, \tag{2}$$

где $\phi, \bar{\phi} \in \Pi$, $\phi = \phi_0(s)$, $\bar{\phi}(s) = \phi_{T_i}(s)$, $\phi_t(s)$ – траектория из множества Ω, пересекающая гиперповерхность Π в моменты $t = 0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ с начальной функцией $\phi_0(s) \in \Pi$.

Ю.И. Неймарк предложил пространство Φ приближенно заменить n-мерным векторным пространством Φ^n. Вместо точек $\phi(s) \in \Pi$ берутся интерполяционные полиномы Лагранжа

$$L_{n-1}(s, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Phi^n,$$

где $x_i = \phi(s_i)$, $s_i = -1 + (i-1)/(n-1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. При этом отображение (2) заменяется приближенным однозначным точечным отображением

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3}$$

определенным на множестве $\Pi' \in \Phi^n$, соответствующем гиперповерхности $\Pi \in \Phi$. Численное нахождение устойчивых и седловых предельных циклов уравнения (1) сводится к нахождению устойчивых (у.н.т.) и седловых (с.н.т.) неподвижных точек отображений (2) и (3).

Непосредственное численное исследование отображения (3) в общем случае при большом n затруднительно. Используя результаты работ [2–6] об устойчивых интегральных конечномерных поверхностях уравнений с запаздыванием, можно предположить наличие соотношений

$$x_i = \psi_i(x_1, x_2) + \varepsilon_i, \tag{4}$$

где ε_i малы, и свести отыскание у.н.т. и с.н.т. отображений (2) и (3) к отысканию у.н.т. и с.н.т. приближенных однозначных точечных отображений плоскости в плоскость

$$(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2) = \widetilde{A}(y_1, y_2). \tag{5}$$

Если соотношения (4) имеют место при малых ε_i и не при малом запаздывании τ, то отображения (5) можно использовать и при нем. Неподвижной точке отображения (5) соответствует точка, принадлежащая множеству Π'. За период предельного цикла можно взять время прохождения траектории уравнения (1) из этой точки до нее же.

Конкретные уравнения вида (4) для уравнения (1) могут быть получены, например, следующим образом. Из уравнения (1) имеем

$$\ddot{\phi}(0) = f(\phi(0), \dot{\phi}(0), \phi(-\tau), \dot{\phi}(-\tau)). \tag{6}$$

Для каждой точки траектории $\phi_t(s)$ уравнения (1) берутся $\phi_t(0)$, $\dot{\phi}_t(0)$, $\phi_t(-\tau)$, $\dot{\phi}_t(-\tau)$, $\ddot{\phi}_t(0)$ при $t = t_0 > 0$.

С другой стороны, $\ddot{\phi}_{t_0}(0)$, $\dot{\phi}_{t_0}(0)$, $\dot{\phi}_{t_0}(-\tau)$ можно приближенно находить по формулам

$$\ddot{\phi}_{t_0}(0) = L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \dot{\phi}_{t_0}(0) = L_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \dot{\phi}_{t_0}(-\tau) = L_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{7}$$

где L_i – формулы приближенного дифференцирования $\phi_t(s)$ по узлам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В некоторых случаях из (6), (7) можно получить в явном виде соотношения вида (4) с малыми ε_i. Малость ε_i определяется численно.

В качестве примеров рассмотрено отыскание предельных циклов первого и второго рода уравнения маятникового типа с запаздыванием вида

$$\ddot{\phi} + \lambda\dot{\phi} + \sin\phi(t-\tau) = \gamma, \tag{8}$$

где λ, τ, γ – параметры уравнения (8), $\tau > 0$. Заменой переменных уравнение (8) приводится к уравнению

$$\ddot{\phi} + \lambda_1\dot{\phi} + a_1\sin\phi(t-1) + b_1\cos\phi(t-1) = b_1, \tag{9}$$

где $\lambda_1 = \tau\lambda$, $a_1 = \tau^2\sqrt{1-\gamma^2}$, $b_1 = \tau^2\gamma$.

При $0 \le \gamma < 1$ уравнение (9) имеет два состояния равновесия O_1, O_2. Величина запаздывания в уравнении (9) равна единице. Характер состояний равновесия O_1 и O_2 определяется корнями соответствующих характеристических уравнений

$$\Delta_i(p) = p^2 + \lambda_1 p + (-1)^{i-1}b_1\exp(-p) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{10_i}$$

Показано, что при $\lambda = \lambda_0$, $\gamma = \gamma_0$, где λ_0, γ_0 – постоянные величины, и при увеличении от малых значений параметра τ уравнение (10_1) приобретает корни с положительными действительными частями, состояние равновесия O_1 из устойчивого становится неустойчивым и при этом из O_1 рождается устойчивый предельный цикл первого рода, это означает рождение устойчивого изолированного периодического решения, колеблющегося около O_1, т.е. $\phi = 0$. Так как этот устойчивый предельный цикл первого рода (Γ_1) колеблется около O_1, то для численного нахождения Γ_1 можно рассмотреть множество траекторий Ω_1 уравнения (9), колеблющихся около $\phi = 0$, имеющих секущую гиперповерхность $\Pi_1 \in \Phi$, состоящую из точек $\phi(s) \in \Phi$, удовлетворяющих условиям $\dot{\phi}(0) = 0$, $\phi(0) \ge 0$.

Состояние равновесия O_1 принадлежит множеству Ω_1. Для построения отображения (5) берется четырехмерное векторное пространство Φ^4, при этом $\phi(s) \in \Pi_1$ заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа

$$L_3(s) = x_1(-s^2 - 2s^3) + x_2(1 - 7s^2 - 6s^3) + x_3(8s^2 + 8s^3) + x_4(s + 3s^2 + 2s^3), \tag{11}$$

где $x_1 = \phi(-1)$, $x_2 = \phi(0)$, $x_3 = \phi(-1/2)$, $x_4 = \dot{\phi}(0)$.

Используя аппроксимацию $\ddot{\phi}(0)$ величиной $\ddot{L}_3(0)$, из уравнений (9) и (11) получаем соотношение

$$x_3 = (2x_1 + 14x_2 - a_1\sin x_1 - b_1\cos x_1 + b_1)/16 + \varepsilon, \tag{12}$$

где ε – погрешность аппроксимации. Так как на Π_1' величина $\dot{\phi}(0) = 0$, мы в (11) положили $x_4 = 0$.

Используя соотношение (12) с $\varepsilon = 0$, от четырехмерного отображения (3) приходим к приближенному однозначному отображению (5), определенному на множестве

$$\Pi_1'(-\Delta \le y_1 \le \Delta, \ -\Delta \le y_2 \le 0, \ \Delta > 0),$$

где y_1 приближает x_1, y_2 – x_2, Δ достаточно велико.

Неподвижные точки отображения (5), соответствующие предельным циклам Γ_1 уравнения (8), находились при $\Lambda = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$ и при увеличении τ. Находились Γ_1, родившиеся из состояния равновесия O_1, и при дальнейшем увеличении τ они находились процедурой продолжения по нему.

На примере отыскания устойчивого предельного цикла Γ_1 при конкретных значениях параметров проводилась численная проверка с помощью отображения (3), в котором $n = 101$. Оказалось, что приближенные значения у.н.т. (y_1^*, y_2^*) отличаются от соответствующих значений у.н.т. (x_1^*, x_n^*) третьими значащими цифрами, где $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ – неподвижная точка отображения (3). При этом оказалось, что $\varepsilon = 0,0\ldots$, где многоточие означает некоторые не равные нулю числа.

Перейдем к отысканию предельных циклов второго рода (Γ_2) уравнения (9), т.е. замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр. Предельный цикл Γ_2 уравнения (9) представляет собой решение $\phi(t)$ уравнения (9), удовлетворяющее условию $|\phi(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$ и имеющее производную $\dot{\phi}$-функцию, периодическую по t. Так что для нахождения Γ_2 можно рассмотреть множество траекторий

Ω_2 уравнения (9), пересекающих вновь и вновь при $t \to \infty$ гиперповерхность $\Pi_2 \in \Phi$, состоящую из точек $\phi(s) \in \Phi$, удовлетворяющих, например, условию $\phi(-1) = 0, \ldots, \pm 2k$. Устойчивому предельному циклу Γ_2 соответствует у.н.т. отображения (2), седловому – с.н.т. отображения (2) на гиперповерхности Π_2. Отыскание Γ_2 проводится так же, как Γ_1, с помощью отображений вида (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., 1973.
2. *Неймарк Ю.И., Фишман Л.З.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. № 7. С. 974–978.
3. *Неймарк Ю.И., Фишман Л.З.* // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. по уравнениям с отклоняющимся аргументом. Киев, 1975. С. 181–182.
4. *Мышкис А.Д.* // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. Вып. 4. С. 163–167.
5. *Рябов Ю.А.* // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 2. С. 52–54.
6. *Валеев К.Г., Кулеско Н.А.* // Укр. мат. журн. 1968. Т. 20. № 6. С. 739–749.

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и кибернетики Нижегородского
государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию
10.06.2003 г.