Математические заметки

Том 85 выпуск 4 апрель 2009

УДК 512.543

Равномерная неаменабельность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода

В. С. Атабекян

Известная теорема С. И. Адяна утверждает, что для любого $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 665$ свободная m-порожденная бернсайдовая группа $B(m,n)$ периода n неаменабельная. В работе доказывается, что каждая нециклическая подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ нечетного периода $n \geqslant 1003$ является равномерно неаменабельной группой. Из этого результата для нечетных $n \geqslant 1003$ следует положительный ответ на вопрос де ля Арпа: имеют ли бесконечные свободные бернсайдовые группы $B(m,n)$ равномерно экспоненциальный рост? Доказывается также, что в каждом S-шаре радиуса $(400n)^3$ содержатся два элемента, которые являются базисом свободной периодической подгруппы ранга 2 группы $B(m,n)$, где S – произвольное множество элементов, порождающих нециклическую подгруппу группы $B(m,n)$.

Библиография: 21 название.

Пусть A – конечное подмножество группы G, а S – конечное порождающее множество группы G. *Границей* подмножества A относительно конечного порождающего множества $S \subset G$ называется множество

$$\partial_S(A) \rightleftharpoons \{a \in A \mid ax \notin A \text{ для некоторого } x \in S^{\pm 1}\}.$$

Определение 1. *Константой Фелнера группы G относительно порождающего множества S* называется число

$$\mathrm{F\o l}_S(G) \rightleftharpoons \inf_A \frac{|\partial_S(A)|}{|A|},$$

где инфимум берется по всем конечным непустым подмножествам $A \subset G$ (см. [1]).

Известно, что группа аменабельна тогда и только тогда, когда $\mathrm{F\o l}_S(G) = 0$ для некоторого (а следовательно, для каждого) конечного порождающего множества S (см. [2]–[4]). Напоминаем, что группа G называется *аменабельной*, если для нее существует конечно-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре всех подмножеств группы G и такая, что $\mu(G) = 1$ и $\mu(gA) = \mu(A)$ для всяких $g \in G$, $A \subset G$. Как показано фон Нейманом [5], класс аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, факторгруппы, индуктивного предела, расширения. С другой стороны, любая группа, содержащая свободную подгруппу ранга 2, неаменабельна.

В 1977 г. Адяном была высказана гипотеза, что m-порожденные свободные периодические группы $B(m,n)$ нечетного периода $n \geqslant 665$ при $m \geqslant 2$ являются неаменабельными (см. [6]). Эта гипотеза была подтверждена им в работе [7]. Адяном в [7] найдено достаточное условие для неаменабельности групп, проблема равенства слов в которых решается алгоритмом Дэна (такие конечно-определенные группы называются *гиперболическими* (см. [8; теорема 1])). Далее, для относительно свободных групп $B(m,n)$ бернсайдова многообразия при $m \geqslant 2$ и нечетных $n \geqslant 665$ указана такая система определяющих соотношений, которая удовлетворяет как условию Дэна, так и указанному достаточному условию неаменабельности. Тем самым, в работе [7] впервые найдены неаменабельные группы, удовлетворяющие нетривиальному тождеству.

Определение 2 (см. [1], [9]). Число

$$\mathrm{F\o l}(G) \rightleftharpoons \inf_S \mathrm{F\o l}_S(G),$$

где инфимум берется по всевозможным конечным порождающим множествам S группы G, называется *константой Фелнера группы* G. Конечно-порожденная группа называется *равномерно неаменабельной*, если $\mathrm{F\o l}(G) > 0$.

Известны некоторые классы равномерно неаменабельных групп. Например, любая неэлементарная гиперболическая группа, а также, любая широкая группа равномерно неаменабельна [1]. С другой стороны, существуют неаменабельные группы, которые не являются равномерно неаменабельными (см. [1], [10]).

В работе Осина [11] доказывается равномерная неаменабельность групп $B(m,n)$ при $m \geqslant 2$ и нечетных $n > 10^{78}$. Этот результат ранее был получен в работе [1], но там доказательство опиралось на одну неподтвержденную пока гипотезу из работы [12].

Нашей основной целью является

Теорема 1. *Для каждого нечетного числа $n \geqslant 1003$ любая конечно-порожденная нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ – равномерно неаменабельная группа.*

В частности, имеет место

Следствие 1. *Для любого $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 1003$ свободная бернсайдовая группа $B(m,n)$ – равномерно неаменабельная группа.*

Отметим, что как следует из хорошо известного результата П. Ноймана и Д. Уайголда, многообразия периодических групп показателя n при $n \geqslant 3$ не являются шрейеровыми, т.е. не каждая подгруппа группы $B(m,n)$ является свободной n-периодической группой.

Как и в работах [1], [11], в доказательстве теоремы 1 существенно используется вышеуказанная теорема Адяна о неаменабельности групп $B(m,n)$.

Пусть S – конечное порождающее множество группы G. Через $|g|_S$ обозначим минимальное целое число n такое, что элемент $g \in G$ представляется в виде произведения n элементов из множества $S \cup S^{-1}$. Для любого $n \geqslant 0$ множество

$$B_S(n) \rightleftharpoons \{g \in G : |g|_S \leqslant n\}$$

назовем S-*шаром* радиуса n. Количество элементов множества $B_S(n)$ обозначается через $\gamma_S(n)$. Поскольку $\gamma_S(m+n) \leqslant \gamma_S(m)\cdot\gamma_S(n)$, то $\gamma_S(n) \leqslant \gamma_S(1)^n$. Число

$$\lambda(G,S) = \lim_{n\to\infty} \gamma_S(n)^{1/n}$$

называется *степенью экспоненциального роста* группы G относительно S.

Определение 3. Если $\inf_S \lambda(G,S) > 1$, где инфимум берется по всем конечным порождающим множествам S, то скажем, что группа G имеет *равномерный экспоненциальный рост.*

Любая равномерно неаменабельная конечно порожденная группа имеет равномерный экспоненциальный рост (см. [1], [13]). Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Для любого $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 1003$ любая конечно-порожденная нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ имеет равномерный экспоненциальный рост.*

При $H = B(m,n)$ получаем

Следствие 3. *Для любого $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 1003$ свободная бернсайдовая группа $B(m,n)$ имеет равномерный экспоненциальный рост.*

Следствием 3 для всех нечетных $n \geqslant 1003$ дается положительный ответ на вопрос де ля Арпа [14]: имеют ли бесконечные свободные бернсайдовые группы $B(m,n)$ равномерный экспоненциальный рост?

Из теоремы 4 работы Адяна [7] немедленно следует, что для любого натурального $\alpha \geqslant 1$, $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 665$ вместе с группой $B(m,n)$ неаменабельна и группа $B(m,n,\alpha)$ (определение групп $B(m,n,\alpha)$ см. в [15; определение VI.2.2]). Поскольку $\mathrm{F\o l}(G) \geqslant \mathrm{F\o l}(G/N)$ для произвольной нормальной подгруппы N группы G (см. [1; теорема 4.1]), справедливо

Следствие 4. *Для любого натурального $\alpha \geqslant 1$, $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 1003$ любая конечно порожденная нециклическая подгруппа H группы $B(m,n,\alpha)$ – равномерно неаменабельная группа.*

При доказательстве теоремы 1 нам понадобится нижеследующая теорема, утверждающая существование такого числа L, что в каждом S-шаре радиуса L содержатся два элемента, которые являются базисом свободной периодической подгруппы ранга 2 группы $B(m,n)$, где S – произвольное множество, порождающее нециклическую подгруппу группы $B(m,n)$.

Теорема 2. *Для любого $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 1003$ существует такое число $L < (400n)^3$, что для произвольного множества S, порождающего нециклическую подгруппу $\langle S\rangle_{B(m,n)}$ группы $B(m,n)$, можно найти элементы $u,v \in \langle S\rangle_{B(m,n)}$ такие, что $\{u,v\}$ есть базис свободной бернсайдовой подгруппы периода n и длины элементов u, v относительно порождающего множества S удовлетворяют неравенствам $|u|_S < L$ и $|v|_S < L$.*

Теорема 2 является усилением теоремы 2 [16] и теоремы 4 [17] автора. Похожее утверждение для неэлементарных гиперболических групп доказано в работе [18] Куби, где также показано, что неэлементарные гиперболические группы имеют равномерный экспоненциальный рост. Отметим, что при $m \geqslant 2$ и нечетных $n \geqslant 665$

группы $B(m,n)$ не могут быть заданы с помощью конечного числа определяющих соотношений (см. [15; теорема VI.2.13]), следовательно, не являются гиперболическими, хотя могут быть представлены как предел последовательности гиперболических групп (см. [19; теорема 7]).

1. Доказательство теоремы 2. Из теоремы Адяна VI.3.7 [15] непосредственно следует, что для любого нечетного $n \geqslant 665$ и конечного m группа $B(m,n)$ изоморфно вкладывается в группу $B(2,n)$ (см. также [20]). Поэтому теорему 2 достаточно доказать в случае $m=2$. Пусть S – произвольное множество, порождающее нециклическую подгруппу $\langle S\rangle_{B(2,n)}$ группы $B(2,n)$. Согласно теореме Адяна VI.3.3 [15] каждая абелевая подгруппа группы $B(m,n)$ циклическая, следовательно, подгруппа $\langle S\rangle_{B(2,n)}$ неабелевая. Поэтому можно выбрать пару неперестановочных элементов X и Y из множества S.

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant 1003$ – произвольное нечетное число. Тогда всякая нециклическая подгруппа $\Delta \rightleftharpoons \langle X,Y\rangle$ группы $B(2,n)$ содержит такую нециклическую подгруппу вида $U\langle A,C\rangle U^{-1}$, что C – элементарный период некоторого ранга α и*

$$C \overset{B(m,n,\alpha-1)}{=} [A^d, Z^{-1}B^dZ],$$

где A и B – минимизированные элементарные периоды некоторых рангов γ и β, $Z \in M_{\alpha-1}$, $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha-1$, $d=191$ и длины слов UAU^{-1} и UCU^{-1} относительно порождающих X и Y удовлетворяют неравенствам

$$|UAU^{-1}|_{\{X,Y\}} < (450n)^2 \qquad \text{и} \qquad |UCU^{-1}|_{\{X,Y\}} < (450n)^2.$$

Доказательство. Практически мы будем повторять доказательство леммы 7.3 из [21], попутно оценив длины слов для обоснования заключительной части леммы. Сначала заметим, что леммы 2.8, 3.2, 6.6 и 7.2 из работы [21] остаются справедливыми, если в их формулировках и доказательствах эквивалентность в ранге α заменить на эквивалентность в ранге α в смысле монографии [15], а равенство слов в группе Γ_α заменить на равенство в группе $B(2,n,\alpha)$.

Пусть $\Delta \rightleftharpoons \langle X,Y\rangle_{B(2,n)}$ – произвольная нециклическая подгруппа группы $B(2,n)$. В силу VI.2.4 [15] и VI.1.2 [15]

$$X \overset{B(2,n)}{=} TA^iT^{-1} \qquad \text{и} \qquad T^{-1}YT \overset{B(2,n)}{=} Z^{-1}B^jZ$$

для некоторых слов T, Z и минимизированных элементарных периодов A и B, имеющих ранги γ и β. Без ограничения общности можем предположить, что $\gamma \leqslant \beta$, а в силу VI.2.4 [15] и IV.1.13 [15] можем считать, что $Z \in M_\alpha \cap A_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geqslant \beta$. Пусть НОД$(i,n)=k$ и r – такое целое число, что $|r|<n$ и $A^{ir}=A^k$. Выбрав число $s \rightleftharpoons [n/3k]$, получим $n/5 < sk < n/3$. Таким образом,

$$X^{rs} = TA^{irs}T^{-1} = TA^{ks}T^{-1}, \qquad 186 < ks < \frac{n+1}{2} - 148,$$

поскольку $n \geqslant 1003$. Итак, для слова $X_1 \rightleftharpoons X^{rs}$ имеем

$$X_1 = TA^{ks}T^{-1}, \qquad |X_1|_{\{X,Y\}} \leqslant |rs||X|_{\{X,Y\}} < \frac{n^2}{3}\,.$$

Аналогично можно найти такой $Y_1 \in \langle Y \rangle_{B(2,n)}$ и такие числа t и l, что

$$186 < tl < \frac{n+1}{2} - 148, \qquad T^{-1} Y_1 T = Z^{-1} B^{tl} Z, \qquad |Y_1|_{\{X,Y\}} < \frac{n^2}{3}.$$

По теореме VI.3.1 [15] $[X_1, Y_1] \neq 1$. В силу лемм 3.2 [21], 7.2 [21] и 2.8 [21] коммутатор

$$[X_1, Y_1] = T[A^{ks}, Z^{-1} B^{tl} Z] T^{-1}$$

сопряжен в $B(m,n)$ некоторому минимизированному элементарному периоду D некоторого ранга $\delta \geqslant \beta + 1$. Пусть

$$T^{-1}[X_1, Y_1]T = Z_1^{-1} D Z_1,$$

где $Z_1 \in M_\lambda \cap A_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda \geqslant \alpha$. Тогда, вновь применив леммы 3.2 [21], 7.2 [21] и 2.8 [21], получим, что коммутатор

$$[X_1, [X_1, Y_1]^d] = T[A^{ks}, Z_1^{-1} D^d Z_1] T^{-1}$$

сопряжен в $B(2,n)$ некоторому минимизированному элементарному периоду E некоторого ранга $\mu \geqslant \delta + 1$. Допустим

$$T^{-1}[X_1, [X_1, Y_1]^d] T = Z_2^{-1} E Z_2.$$

Таким образом, в подгруппе $\Delta \rightleftharpoons \langle X, Y \rangle_{B(2,n)}$ содержатся элементы

$$[X_1, Y_1] = T Z_1^{-1} D Z_1 T^{-1} \qquad \text{и} \qquad [X_1, [X_1, Y_1]^d] = T Z_2^{-1} E Z_2 T^{-1}.$$

Можно считать, что $Z_3^{-1} \rightleftharpoons Z_1 Z_2^{-1} \in M_\nu \cap A_{\nu+1}$, где $\nu \geqslant \mu$. По лемме 3.2 [21] найдем приведенную форму C коммутатора $[D^d, Z_3^{-1} E^d Z_3]$. Согласно лемме 7.2 [21] C – элементарный период некоторого ранга $\tau \geqslant \mu + 1$. В силу 3.6 [21]

$$C \overset{B(2,n,\mu)}{=} w[D^d, Z_3^{-1} E^d Z_3] w^{-1}, \qquad \text{где} \quad w \in \Theta(D, D_1).$$

Рассмотрим элементарные периоды $A \rightleftharpoons w D w^{-1}$ и $C = w[D^d, Z_3^{-1} E^d Z_3] w^{-1}$. Из определений следует, что

$$\begin{aligned} A &= w Z_1 T^{-1} [X_1, Y_1] T Z_1^{-1} w^{-1}, \\ C &= w Z_1 T^{-1} [[X_1, Y_1]^d, [X_1, [X_1, Y_1]^d]^d] T Z_1^{-1} w. \end{aligned}$$

Значит, если $U \rightleftharpoons T Z_1^{-1} w^{-1}$, то $UAU^{-1} \in \Delta$, $UCU^{-1} \in \Delta$ и

$$|UAU^{-1}|_{\{X,Y\}} = |[X_1, Y_1]|_{\{X,Y\}} < \frac{n^2}{3} |[X, Y]|_{\{X,Y\}} = \frac{4}{3} n^2, \tag{1}$$

$$|UCU^{-1}|_{\{X,Y\}} = |[[X_1, Y_1]^d, [X_1, [X_1, Y_1]^d]^d]|_{\{X,Y\}} < \frac{n^2}{3}(8d + 2d(8d+2)). \tag{2}$$

Остается заметить, что

$$\frac{n^2}{3}(8d + 2d(8d+2)) < (450n)^2.$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение доказано автором в работе [16].

Лемма 2 (теорема 2 [16]). *Пусть коммутатор* $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$ *в группе* $B(2,n,\alpha-1)$ *равен элементарному периоду* C *ранга* α, *где* A *– элементарный период ранга* γ, B *– элементарный период ранга* β, $Z \in M_{\alpha-1}$, $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha-1$, $d=191$, $n \geqslant 1003$ *– произвольное нечетное число и слова* A^q *и* B^q *входят в некоторые слова из множеств* $M_{\gamma-1}$ *и* $M_{\beta-1}$ *соответственно. Тогда слова*

$$u \rightleftharpoons C^{200}AC^{200}A^2\cdots A^{n-1}C^{200}, \qquad v \rightleftharpoons C^{300}AC^{300}A^2\cdots A^{n-1}C^{300}$$

являются базисом свободной бернсайдовой подгруппы ранга 2 *группы* $B(2,n)$.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Поскольку подгруппы

$$\langle u,v\rangle_{B(2,n)} \qquad \text{и} \qquad \langle UuU^{-1}, UvU^{-1}\rangle_{B(2,n)}$$

изоморфны, в силу леммы 2 элементы UuU^{-1}, UvU^{-1} являются базисом свободной бернсайдовой подгруппы ранга 2 группы $B(2,n)$. Очевидно,

$$\begin{aligned}UuU^{-1} &= (UCU^{-1})^{200}(UAU^{-1})\cdots(UAU^{-1})^{n-1}(UCU^{-1})^{200},\\ UvU^{-1} &= (UCU^{-1})^{300}(UAU^{-1})\cdots(UAU^{-1})^{n-1}(UCU^{-1})^{300}.\end{aligned}$$

Согласно лемме 1 имеем $UuU^{-1}, UvU^{-1} \in \langle X,Y\rangle_{B(m,n)}$. Используя неравенства (1) и (2), получаем

$$\begin{aligned}|UuU^{-1}|_{\{X,Y\}} &< \frac{n(n-1)}{2}4n^2 + 200n(450n)^2,\\ |UvU^{-1}|_{\{X,Y\}} &< \frac{n(n-1)}{2}4n^2 + 300n(450n)^2.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$|UuU^{-1}|_S \leqslant |UuU^{-1}|_{\{X,Y\}}, \qquad |UvU^{-1}|_S \leqslant |UvU^{-1}|_{\{X,Y\}},$$

поскольку $\{X,Y\} \subseteq S$. В качестве L можно взять число $2n^2(n-1)+300n(450n)^2 < (400n)^3$. Теорема 2 доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Следующая лемма доказана в работе [1].

Лемма 3 (теорема 7.1 [1]). *Пусть* G *– конечно-порожденная группа с множеством порождающих* $S=\{x_1,\dots,x_s\}$, *а* H *– подгруппа группы* G *с множеством порождающих* $S'=\{y_1,\dots,y_k\}$. *Обозначим через* L *максимальную длину элементов* $y_1,\dots,y_k$ *относительно порождающих* $S=\{x_1,\dots,x_s\}$. *Тогда*

$$\mathrm{F\o l}_S(G) \geqslant \frac{1}{1+kL}\,\mathrm{F\o l}_{S'}(H).$$

Лемма 4. *Пусть* G *– конечно-порожденная группа с множеством порождающих* S, $\pi\colon G\to G'$ *– изоморфизм групп,* $S' \rightleftharpoons \pi(S)$. *Тогда* $\mathrm{F\o l}_S(G) = \mathrm{F\o l}_{S'}(G')$.

Доказательство очевидно (см. также теорему 4.1 [1]).

Чтобы доказать теорему 1, предположим, что S есть произвольное конечное множество порождающих элементов нециклической подгруппы H группы $B(m,n)$. По теореме 2 существуют элементы $u,v \in H$ такие, что $\{u,v\}$ есть базис свободной бернсайдовой подгруппы ранга 2 и длины элементов u, v относительно порождающего множества S удовлетворяют неравенствам $|u|_S < L$ и $|v|_S < L$, где число L не зависит от выбора множества S. Согласно лемме 3 имеем

$$\mathrm{F\o l}_S(H) \geqslant \frac{1}{1+2L}\,\mathrm{F\o l}_{\{u,v\}}(\langle u,v\rangle_{B(m,n)}).$$

В силу леммы 4 число $b \eqqcolon \mathrm{F\o l}_{\{u,v\}}(\langle u,v\rangle_{B(m,n)})$ не зависит от выбора пары свободных порождающих u, v. Поскольку по теореме Адяна (теорема 5 работы [7]) группа $B(2,n)$ – неаменабельная, $b > 0$. Таким образом, для любого множества порождающих S нециклической подгруппы H имеем

$$\mathrm{F\o l}_S(H) \geqslant \frac{b}{1+2L} > 0,$$

из чего следуют неравенства

$$\mathrm{F\o l}(H) \eqqcolon \inf_S \mathrm{F\o l}_S(H) \geqslant \frac{b}{1+2L} > 0.$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. N. Arzhantseva, J. Burillo, M. Lustig, L. Reeves, H. Short, E. Ventura, “Uniform non-amenability”, *Adv. Math.*, **197**:2 (2005), 499–522.

[2] E. Følner, “On groups with full Banach mean value”, *Math. Scand.*, **3** (1955), 243–254.

[3] I. Namioka, “Følner's condition for amenable semi-groups”, *Math. Scand*, **15** (1964), 18–28.

[4] A. Hulanicki, “Means and Følner condition on locally compact groups”, *Studia Math.*, **27** (1966), 87–104.

[5] J. von Neumann, “Zur algemeinen theorie des masses”, *Fund. Math.*, **13** (1929), 73–116.

[6] С. И. Адян, “Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами”, *УМН*, **32**:1 (1977), 3–15.

[7] С. И. Адян, “Случайные блуждания на свободных периодических группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:6 (1982), 1139–1149.

[8] И. Г. Лысёнок, “О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:4 (1989), 814–832.

[9] P. de la Harpe, A. Valette, “La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger)”, Astérisque, **175**, Soc. Math. France, Paris, 1989.

[10] D. V. Osin, “Weakly amenable groups”, *Computational and Statistical Group Theory* (Las Vegas, NV/Hoboken, NJ, 2001), Contemp. Math., **298**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 105–113.

[11] D. V. Osin, “Uniform non-amenability of free Burnside groups”, *Arch. Math.* (*Basel*), **88**:5 (2007), 403–412.

[12] S. V. Ivanov, A. Yu. Ol'shanskii, “Some applications of graded diagrams in combinatorial group theory”, *Groups*, V. 2 (Proc. Int. Conf., St. Andrews, UK 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **160**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, 258–308.

[13] Y. Shalom, “Explicit Kazhdan constants for representations of semisimple and arithmetic groups”, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **50**:3 (2000), 833–863.

[14] P. de la Harpe, "Uniform growth in groups of exponential growth", *Geom. Dedicata*, **95**:1 (2002), 1–17.

[15] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.

[16] В. С. Атабекян, "О подгруппах свободных периодических групп нечетного периода $n \geqslant 1003$", *Изв. РАН. Сер. матем.* (в печати).

[17] В. С. Атабекян, "О простых и свободных периодических группах", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1987, № 6, 76–78.

[18] M. Koubi, "Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques", *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **48**:5 (1998), 1441–1453.

[19] С. И. Адян, "Проблема Бернсайда о периодическоих группах и смежные вопросы", *Современные проблемы математики*, Вып. 1, МИАН, М., 2003, 5–29.

[20] В. Л. Ширванян, "Вложение группы $\mathbf{B}(\infty, n)$ в группу $\mathbf{B}(2, n)$", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:1 (1976), 190–208.

[21] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, "О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990.

В. С. Атабекян
Ереванский государственный университет
E-mail: avarujan@ysu.am

Поступило
22.04.2008
Исправленный вариант
30.06.2008