

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Тарнавский, С. И. Шпак, Проблемы численного моделирования сверхзвукового ламинарно-турбулентного обтекания тел конечного размера, *Матем. моделирование*, 1998, том 10, номер 6, 53–74

<https://www.mathnet.ru/mm1292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

19 апреля 2025 г., 02:24:41



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ПРОБЛЕМЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

© Г.А. Тарнавский, С.И. Шпак

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются физико-математические, алгоритмические и технологические проблемы численного моделирования ламинарно-турбулентного обтекания изолированных тел. Для описания течений газа используется осредненная по Фавру система уравнений Навье-Стокса и несколько полуэмпирических (алгебраических и дифференциальных) моделей турбулентности. Исследуется влияние сценариев обтекания и используемых моделей турбулентности на решение задачи.

THE NUMERICAL MODELING PROBLEMS OF SUPERSONIC LAMINAR-TURBULENT FLOW AROUND ALONE BODIES

G.A. Tarnavsky, S.I. Shpak

Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk

The physico-mathematical, algorithmic and technological problems of the numerical modeling of laminar-turbulent flow around isolated bodies are considered. The Favre-averaged system of Navier-Stokes equations as well as several semiempirical (algebraic and differential) models of turbulence are used for a description of gas flows. The effect of the flow scenarios and turbulence models used on the problem solution are investigated.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00198).

1. Введение

Изучение процессов обтекания тел конечного размера различной конфигурации сверх- и гиперзвуковым потоком газа с учетом его реальных свойств, таких как вязкость и теплопроводность, переход ламинарного течения в турбулентное при возможном наличии отрыва потока от поверхности тела и образования рециркуляционных зон у боковой поверхности тела и в ближнем следе за ним – одна из основных проблем современной вычислительной аэро-

динамики. Сформировавшись как особое научное направление, вычислительная аэродинамика выдвинула ряд собственных проблем, из которых можно выделить основные: необходимость разработки все более полных физико-математических моделей, справедливых для описания реальных течений в широком диапазоне параметров, построение эффективных численных алгоритмов с учетом возможностей новых ЭВМ, изучение адекватности дискретной алгоритмизации задачи ее исходной континуальной постановке, описываемой дифференциальными уравнениями.

Проблемы создания вычислительного инструментария, пригодного для исследования реальных течений в широком диапазоне параметров, связаны с глобальной оптимизацией всей цепи "объект исследования → физическая модель → математическая модель → численный алгоритм → программа → структура ЭВМ → расчет → анализ решения" для целого класса задач (это цепь с обратной связью). Это особенно проявляется в моделировании турбулентных течений – сложного и многопланового явления, исследованию которого посвящено значительное количество работ (см., например, [1-5] и библиографию в них).

Целью настоящей работы является комплексный анализ организации вычислительного эксперимента для одной из задач внешней аэродинамики.

2. Постановка задачи

На изолированное тело конечного размера (см. рис. 1), представляющее собой затупленный по сфере обратный конус с углом полураствора кормовой части φ , набегает сверхзвуковой поток вязкого теплопроводного газа. Стационарное или нестационарное решение задачи отыскивается в области, ограниченной поверхностью тела, головным скачком уплотнения (положение которого определяется в процессе решения), осью симметрии и выходной границей, расположенной в сверхзвуковой зоне ближнего следа. На поверхности головного скачка ставятся известные условия Рэнкина-Гюгонио, на оси симметрии – условия симметрии потока, на выходной границе – "мягкие" граничные условия, на теле – условия прилипания потока и теплоизоляции или изотермичности поверхности, в последнем случае варьируется значение температурного фактора T_w . Стационарное решение, если оно существует, находится методом установления.

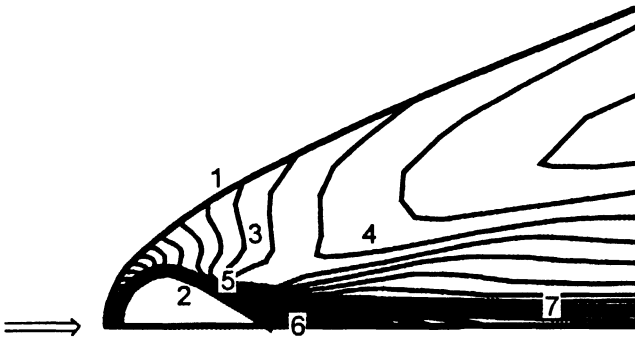


Рис. 1. Геометрия течения

3. Картина течения и сценарии развития турбулентности

Общая картина обтекания представлена на рис. 1, где для иллюстрации приведены изолинии локального числа Маха. Основными газодинамическими структурами течения являются: головной скачок уплотнения (1), пограничный слой вблизи поверхности тела (2), волна разрежения (3), кормовой скачок уплотнения (4), зона отрыва потока от поверхности тела (5), рециркуляционная область течения за кормой (6), вязкостная (температурная) дорожка ближ-

него следа (7). Структуры 4-6 могут образовываться не при всех конфигурациях кормовой части φ и других основных определяющих задачу параметрах M_∞ , Re_∞ , T_w .

Для ламинарного обтекания существуют два основных сценария течения.

Сценарий Л-1. Определяющие параметры задачи таковы, что реализуется безотрывное обтекание. От точки торможения на носке тела вниз по потоку вдоль поверхности формируется пограничный слой, который все время является ламинарным. Стекая с концевой точки тела, он образует специфическую дорожку вблизи оси симметрии – ядро ближнего, а затем и дальнего следа, простирающуюся на значительные расстояния (см. [3, 6]).

Сценарий Л-2. Определяющие параметры задачи таковы, что реализуется отрывное обтекание тела. Пограничный слой, формирующийся вдоль тела, начиная от его носка, отрывается от поверхности в некоторой точке на кормовой части. Над кормой тела образуется “висячий” скачок, проходя через который оторвавшийся пограничный слой размывается, образуя затем дорожку ближнего следа, существенно более широкую, чем в случае Л-1. У кормы тела возникает рециркуляционная область течения.

Даже при стационарности набегающего потока течение является квазистационарным: точка отрыва пограничного слоя квазипериодически колеблется возле некоторого среднего положения. Аналогичны колебания значений газодинамических величин ниже по потоку, а их амплитуды зависят от соотношения M_∞ , Re_∞ , T_w , φ . Вблизи их критических значений, когда сценарий Л-1 переходит в Л-2 (или наоборот), возникают гистерезисные явления - существенное влияние стартовых начальных условий численного расчета на формирование безотрывного или отрывного обтекания (подробнее см. [6]). Подобный гистерезис наблюдался и в экспериментальных исследованиях.

Отметим, что, хотя выше для краткости использовался термин “пограничный слой”, следует учитывать существенное различие в формировании скоростного (динамического) и температурного пограничных слоев, их координатной эволюции вдоль поверхности тела и перехода в вязкостную и тепловую дорожки ближнего следа (см. [7]).

В случае турбулентного обтекания (при этом надо иметь в виду различную природу возникновения и развития свободной и пристенной турбулентности) возможно существование нескольких основных сценариев картин течения как на базе сценария Л-1 (безотрывное обтекание), так и на базе сценария Л-2 (отрывное обтекание).

Сценарий Т-1. Определяющие параметры задачи таковы, что крупномасштабная турбулентность во внешней зоне течения (вне пограничного слоя) не развивается. Ламинарность течения сохраняется также и в пограничном слое вдоль всей поверхности тела. Свойства турбулентности (турбулизация) начинают проявляться в ядре (дорожке) ближнего следа только на некотором расстоянии от тела и развиваются далее вниз по потоку.

Сценарий Т-2. Крупномасштабная турбулентность во внешней зоне течения (вне пограничного слоя) не развивается, и пограничный слой в области головной части тела является ламинарным. Затем в некоторой зоне возле поверхности тела происходит переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, который эволюционирует далее вниз по потоку по сценарию Л-1 (или, возможно, по сценарию Л-2 в зависимости от определяющих задачу параметров). Процесс перехода начинается с появления турбулентных пятен [8-10].

Отметим, что при численном моделировании обтекания тела конечного размера, когда расчет начинается в области набегающего невозмущенного нетурбулизированного потока и продолжается в зоне течения над боковой поверхностью тела и в ближнем следе за ним, весьма важен принцип определения местоположения перехода ламинарного пограничного

слоя в турбулентный. Также следует подчеркнуть, что, вообще говоря, моделирование собственно турбулентности и ламинарно-турбулентного перехода - две различные задачи.

Сценарий Т-3. Определяющие задачу параметры таковы, что турбулентность развивается уже в зоне невязкого течения между головным скачком уплотнения и передней частью тела. Возможно даже начало турбуликации в области однородного и изотропного набегающего потока, что "не является результатом развития неустойчивости, приходящей вследствие возрастания числа Рейнольдса вязкого течения, а возникает при энергетической катастрофе в невязком потоке" [1, 11].

Далее возможен каскадный процесс трансформации крупномасштабных вихрей в мелкомасштабные, генерация пристенной турбулентности в виде пульсаций уже в районе точки торможения у носка тела и развитие турбулентного пограничного слоя вдоль поверхности вниз по потоку.

Сценарий Т-4. Крупномасштабные структуры турбулентности во внешней зоне вне пограничного слоя не развиваются (область невязкого течения). В пограничном слое всюду вдоль поверхности тела, вплоть до точки отрыва, течение является ламинарным. Оторвавшийся ламинарный пограничный слой, пройдя через висячий кормовой скачок уплотнения, начинает турбулизироваться, образуя турбулентную дорожку ближнего следа.

Сценарий Т-5. Крупномасштабные структуры турбулентности во внешней зоне вне пограничного слоя не образуются. Аналогично сценарию Т-2 пограничный слой в области головной части тела является ламинарным, затем в некоторой зоне у боковой части тела происходит ламинарно-турбулентный переход пограничного слоя, и далее вниз по потоку от поверхности тела отрывается уже турбулентный пограничный слой (в отличие от сценария Т-4), формируя обширную область турбулентного течения в ближнем следе.

В частности, различными методами подобные режимы течения исследовались в аналитической работе [12], численно моделировались в [13-17] и экспериментально изучались в [18, 19].

Отметим, что в образующейся за точкой отрыва над кормой тела области возвратного потока возможен как турбулентный режим течения, так и его реламинаризация [3].

Сценарий Т-6 - аналог сценария Т-3, но обтекание тела является отрывным. Крупномасштабная турбулентность развивается в зоне невязкого течения (в области между головным скачком и носком тела или даже в области однородного набегающего потока), мелкомасштабная пристенная турбулентность в пограничном слое появляется уже в районе передней части тела вблизи лобовой точки торможения.

Взаимодействие этих типов турбулентности на фоне отрыва потока и общей сложной структуры обтекания делает данный сценарий исключительно трудным для численного моделирования с точки зрения как идейной физико-математической проблематики, так и требуемых ресурсов ЭВМ [20, 21].

Следует особо подчеркнуть, что возможны и другие сценарии организации картины обтекания, например, перехода безотрывного обтекания в отрывное в безотрывном диапазоне параметров M_∞ , Re_∞ , T_w , ϕ только за счет "случайных пульсаций" в пограничном слое и соответствующего развития турбулентности (см., например, [22]).

4. Основные уравнения

Для описания движения вязкого сжимаемого теплопроводного газа используется осредненная по Фавру система уравнений Навье-Стокса в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_k}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho V_i V_k + P_{ik}) = F_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_k} [V_i (\rho E + P_{ik}) + q_k] = Q.$$

Здесь и ниже $i, k=1,2,3$; суммирование проводится по повторяющимся индексам, остальные обозначения – общепринятые.

Для замыкания системы (1) к ней присоединяются уравнение состояния, calorическое уравнение:

$$p=p(\rho, e), \quad e=e(\rho, T), \quad (2)$$

связь между отнесенными к единице массы полной энергией E , внутренней энергией e и кинетической турбулентной энергией k :

$$E=e+V^2/2+k \quad (3)$$

и потоковые соотношения:

$$P_{ik} = 2\mu S_{ik} - \delta_{ik}(p - \lambda \operatorname{div} \mathbf{V}), \quad (4)$$

$$q_i = q_i(T), \quad (5)$$

связывающие тензор напряжения P_{ik} с тензором скоростей деформации S_{ik} (δ_{ik} – тензорная единица) и тепловой поток q_i с температурой T :

$$S_{ik} = \partial V_i / \partial x_k + \partial V_k / \partial x_i, \quad (6)$$

$$q_i = -\chi \partial T / \partial x_i. \quad (7)$$

Система уравнений (1)-(7) дополняется зависимостями коэффициентов молекулярной λ , сдвиговой μ и объемной ζ вязкостей и теплопроводности χ от термодинамических величин:

$$\lambda = \zeta - 2/3 \mu, \quad \mu = \mu(\rho, T), \quad \zeta = \zeta(\rho, T), \quad \chi = \chi(\rho, T). \quad (8)$$

В правые части второго и третьего уравнений системы (1) вынесены свертка тензора рейнольдсовых напряжений

$$F_i = \partial R_{ik} / \partial x_k \quad (9)$$

и мощность турбулентного тепловыделения

$$Q = \partial q_k' / \partial x_k. \quad (10)$$

Вопрос о виде компонент тензора R_{ik} и вектора вязкого потока турбулентной кинетической энергии q' рассматривается ниже.

При проведении численных расчетов систему уравнений (1) с замыкающими соотношениями (2)-(10) удобнее представлять в безразмерном виде, относя средневзвешенные газодинамические переменные к их значениям в невозмущенном потоке и характерному размеру R_b , связанному с обтекаемым телом:

$$t' = V_\infty t / R_b; \quad x'_i = x_i / R_b; \quad \rho' = \rho / \rho_\infty; \quad V' = V / V_\infty;$$

$$p' = p / \rho_\infty V_\infty^2; \quad T' = T / V_\infty^2; \quad \mu' = \mu / \mu_\infty; \quad \chi' = \chi / \chi_\infty. \quad (11)$$

Кроме того, в расчетах гораздо удобнее использовать не декартову (x, y, z) , а произвольную криволинейную ортогональную систему координат (α, β, γ) :

$$\alpha = \alpha(x, y, z), \quad \beta = \beta(x, y, z), \quad \gamma = \gamma(x, y, z). \quad (12)$$

С учетом (11)-(12) система уравнений (1) имеет вид (здесь и далее штрихи над безразмерными переменными убраны), приведенный ниже. Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\beta H_\gamma \rho V_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha H_\gamma \rho V_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\alpha H_\beta \rho V_\gamma) \right] = 0. \quad (13.1)$$

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_\alpha) + \frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma} \left\{ \rho V_\alpha V_\beta H_\gamma \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + \rho V_\alpha V_\gamma H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} - \rho V_\beta^2 H_\gamma \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} - \right. \\ \left. - \rho V_\gamma^2 H_\beta \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\beta H_\gamma \rho V_\alpha^2) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha H_\gamma \rho V_\alpha V_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\alpha H_\beta \rho V_\alpha V_\gamma) \right\} + \\ + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{A_\alpha}{H_\alpha \text{Re}_\infty} = \frac{F_\alpha}{H_\alpha \text{Re}_\infty}; \end{aligned} \quad (13.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_\beta) + \frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma} \left\{ \rho V_\alpha V_\beta H_\gamma \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} + \rho V_\beta V_\gamma H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} - \rho V_\alpha^2 H_\gamma \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} - \right. \\ \left. - \rho V_\gamma^2 H_\alpha \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\beta H_\gamma \rho V_\alpha V_\beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha H_\gamma \rho V_\beta^2) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\alpha H_\beta \rho V_\beta V_\gamma) \right\} + \\ + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{A_\beta}{H_\beta \text{Re}_\infty} = \frac{F_\beta}{H_\beta \text{Re}_\infty}; \end{aligned} \quad (13.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_\gamma) + \frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma} \left\{ \rho V_\alpha V_\gamma H_\beta \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \rho V_\beta V_\gamma H_\alpha \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} - \rho V_\beta^2 H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} - \right. \\ \left. - \rho V_\alpha^2 H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\beta H_\gamma \rho V_\alpha V_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha H_\gamma \rho V_\beta V_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\alpha H_\beta \rho V_\gamma^2) \right\} + \\ + \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial p}{\partial \gamma} - \frac{A_\gamma}{H_\gamma \text{Re}_\infty} = \frac{F_\gamma}{H_\gamma \text{Re}_\infty}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [H_\beta H_\gamma V_\alpha (p + E)] + \frac{\partial}{\partial \beta} [H_\alpha H_\gamma V_\beta (p + E)] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \gamma} [H_\alpha H_\beta V_\gamma (p + E)] \right\} - \Phi = Q. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Для уравнений Эйлера:

$$A_\alpha = A_\beta = A_\gamma = \Phi = 0.$$

Для уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} A_\alpha = & \frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\alpha^2 \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{1}{H_\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{1}{H_\gamma^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\alpha H_\gamma \sigma_{\alpha\gamma}) + \\ & + \sigma_{\alpha\alpha} \left(-\frac{2}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} \right) + \sigma_{\beta\beta} \left(-\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{H_\gamma} \sigma_{\gamma\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \\ & + \sigma_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} - \frac{H_\alpha}{H_\beta^2} \frac{\partial H_\beta}{\partial \beta} + \frac{H_\alpha}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} \right) + \sigma_{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{H_\alpha}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} - \frac{H_\alpha}{H_\gamma^2} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \gamma} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\beta = & \frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{1}{H_\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\beta^2 \sigma_{\beta\beta}) + \frac{1}{H_\gamma^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\beta H_\gamma \sigma_{\beta\gamma}) + \\ & + \sigma_{\beta\beta} \left(-\frac{2}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{H_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{H_\gamma} \sigma_{\gamma\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} + \\ & + \sigma_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} - \frac{H_\beta}{H_\alpha^2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{H_\beta}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} \right) + \sigma_{\beta\gamma} \left(\frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} + \frac{H_\beta}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{H_\beta}{H_\gamma^2} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \gamma} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\gamma = & \frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\alpha H_\gamma \sigma_{\alpha\gamma}) + \frac{1}{H_\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\beta H_\gamma \sigma_{\beta\gamma}) + \frac{1}{H_\gamma^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\gamma^2 \sigma_{\gamma\gamma}) + \\ & + \sigma_{\gamma\gamma} \left(-\frac{2}{H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} \right) - \frac{1}{H_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{1}{H_\beta} \sigma_{\beta\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} + \\ & + \sigma_{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} - \frac{H_\gamma}{H_\alpha^2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{H_\gamma}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \right) + \sigma_{\beta\gamma} \left(\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} + \frac{H_\gamma}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} - \frac{H_\gamma}{H_\beta^2} \frac{\partial H_\beta}{\partial \beta} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} H_\beta H_\gamma \left(\frac{\gamma\mu}{H_\alpha \text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \sigma_{\alpha\alpha} V_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} V_\beta + \sigma_{\alpha\gamma} V_\gamma \right) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} H_\alpha H_\gamma \left(\frac{\gamma\mu}{H_\beta \text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial \beta} + \sigma_{\alpha\beta} V_\alpha + \sigma_{\beta\beta} V_\beta + \sigma_{\beta\gamma} V_\gamma \right) + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \gamma} H_\alpha H_\beta \left(\frac{\gamma\mu}{H_\gamma \text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial \gamma} + \sigma_{\alpha\gamma} V_\alpha + \sigma_{\beta\gamma} V_\beta + \sigma_{\gamma\gamma} V_\gamma \right) \right\}. \end{aligned}$$

Элементы тензора вязких напряжений:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \mu \left\{ 2 \left(\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial V_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{V_\beta}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + \frac{V_\gamma}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} \right) - \frac{2}{3} \text{div} \mathbf{V} \right\} + \zeta \text{div} \mathbf{V};$$

$$\sigma_{\beta\beta} = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial V_\beta}{\partial \beta} + \frac{V_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} + \frac{V_\gamma}{H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} \right) - \frac{2}{3} \text{div} \mathbf{V} \right\} + \zeta \text{div} \mathbf{V};$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma\gamma} &= \mu \left\{ \frac{2}{H_\gamma} \left(\frac{\partial V_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{V_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \frac{V_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} \right) - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} \right\} + \zeta \operatorname{div} \mathbf{V}; \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{\mu}{H_\alpha H_\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha V_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\beta V_\beta) - 2 \left(V_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + V_\beta \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \right) \right\}; \\ \sigma_{\alpha\gamma} &= \frac{\mu}{H_\alpha H_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\gamma V_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\alpha V_\alpha) - 2 \left(V_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} + V_\gamma \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} \right) \right\}; \\ \sigma_{\beta\gamma} &= \frac{\mu}{H_\beta H_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\gamma V_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\beta V_\beta) - 2 \left(V_\beta \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} + V_\gamma \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} \right) \right\}; \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{1}{H_\alpha H_\beta H_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_\beta H_\gamma V_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_\alpha H_\gamma V_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_\alpha H_\beta V_\gamma) \right\}.\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты Ламе H_α , H_β и H_γ , числа Рейнольдса Re_∞ и Прандтля Pr имеют вид

$$\begin{aligned}H_\alpha &= \sqrt{(\partial x / \partial \alpha)^2 + (\partial y / \partial \alpha)^2 + (\partial z / \partial \alpha)^2}, \quad H_\beta = \sqrt{(\partial x / \partial \beta)^2 + (\partial y / \partial \beta)^2 + (\partial z / \partial \beta)^2}, \\ H_\gamma &= \sqrt{(\partial x / \partial \gamma)^2 + (\partial y / \partial \gamma)^2 + (\partial z / \partial \gamma)^2}, \quad Re_\infty = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu_\infty, \quad Pr = C_p \mu_\infty / \chi_\infty.\end{aligned}$$

Ниже используются, если это не оговаривается особо, гипотезы Стокса, Пуассона и Прандтля, степенная зависимость коэффициента вязкости от температуры, калорическое уравнение и уравнение состояния совершенного газа:

$$\zeta = 0; \quad \gamma = \text{const}; \quad Pr = \text{const}; \quad \mu = T^\omega; \quad e = T; \quad p = (\gamma - 1)\rho e. \quad (14)$$

Уравнения (13)-(14) представляют собой систему, замкнутую по средневзвешенным (без турбулентных членов) газо- и термодинамическим параметрам.

5. Модели турбулентности

Полное замыкание системы уравнений (13) - (14) осуществляется с помощью полуэмпирических моделей турбулентности. В настоящее время наиболее часто и успешно используется ряд алгебраических и дифференциальных двухпараметрических ("k-ε" и "k-ω") моделей [23-34]; основные из них применены в настоящей работе для численного моделирования различных сценариев течения.

Общим для указанных моделей турбулентности является использование нескольких ключевых гипотез. Во-первых, это гипотеза Буссинеска о линейной связи тензора напряжений Рейнольдса с тензором осредненных скоростей деформаций, что позволяет ввести понятие турбулентной вязкости μ_t :

$$R_{ik} = \mu_t (2S_{ik} - 2/3 \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{V}), \quad (15)$$

весьма эффективное при проведении компьютерного моделирования и решения многочисленных прикладных задач, поскольку при этом вид вязких членов системы (13) уравнений Навье-Стокса не меняется, требуя лишь коррекции коэффициента вязкости:

$$\mu \Rightarrow \mu_{\text{эфф}} = \mu + \mu_t. \quad (16)$$

Во-вторых, это представление вектора турбулентных потоков тепла (10) в уравнении сохранения энергии (1), так же как и для ламинарных потоков, по закону Фурье

$$q_k^i = -\chi_t \partial T / \partial x_k \quad (17)$$

и обобщение гипотезы Прандтля на турбулентную составляющую потока тепла

$$Pr_t = \text{const}, \quad (18)$$

что также удобно для компьютерного моделирования, поскольку может быть использована запись уравнений Навье-Стокса (13) при коррекции коэффициентов при тепловых потоках $\partial T / \partial x_i$:

$$\mu / Pr_t \Rightarrow \mu / Pr_t + \mu_t / Pr_t. \quad (19)$$

Естественно, при использовании замен (16) и (19) в (13) турбулентные члены F_α и Q должны быть опущены, поскольку они учтены в левых частях уравнений совместно с ламинарными членами. Отметим, что для воздуха обычно принимается $Pr=0.72$, $Pr_t=0.9$.

В-третьих, в применяемых моделях используются гипотеза Невзглядова-Драйдена о линейной связи турбулентного напряжения трения и кинетической энергии турбулентности и гипотеза Колмогорова-Прандтля, постулирующая связь турбулентной вязкости с кинетической энергией турбулентности k , ее удельной диссипацией ω и масштабом турбулентности, например, в виде [23]:

$$\mu_t = C_1 \rho k / \omega, \quad (20)$$

а k и ω определяются из решения дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho k + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho V_i k = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + H_k, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho V_i \omega = \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} + H_\omega \quad (22)$$

(напомним, что здесь и ниже по повторяющимся индексам производится суммирование), где вязкие потоки турбулентных величин α_i , β_i и источники членов H_k , H_ω имеют вид

$$\alpha_i = (\mu + \mu_t / C_2) \partial k / \partial x_i; \quad \beta_i = (\mu + \mu_t / C_3) \partial \omega / \partial x_i; \quad H_k = P_k - D_k; \quad (23)$$

$$H_\omega = P_\omega - D_\omega; \quad P_k = R_{ij} \partial V_i / \partial x_j \quad (\text{свертка тензора рейнольдсовых напряжений}),$$

$$D_k = \rho k \omega; \quad P_\omega = C_4 (\omega / k) P_k; \quad D_\omega = C_5 f \rho \omega^2.$$

Здесь вводится полуэмпирическая функция

$$f = 1 - 2/9 \exp(-Re_t^2 / 36), \quad (24)$$

где $Re_t = (k\rho) / (\mu_t \omega)$ – турбулентное число Рейнольдса, выражающее отношение масштабированной кинетической энергии турбулентности и турбулентного вязкого напряжения и подобное в некотором смысле своему ламинарному аналогу, а C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – полуэмпири-

ческие константы, оптимальные значения которых подбираются в процессе решения конкретной задачи.

Вид уравнений (20) - (24) является характерным для всех двухпараметрических моделей турбулентности, отличаясь фактически лишь в незначительных деталях или форме записи.

6. Численный метод решения

Для численного решения системы уравнений Навье-Стокса (1)-(5), или, более конкретно, (13)-14), используется схема типа универсального алгоритма, основанная на идее расщепления системы по физическим процессам и координатным направлениям [6].

Параллельно рассмотрим системы уравнений Навье-Стокса, записанные в квазидивергентной и недивергентной формах:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial q_i} + \mathbf{H} = -\mathbf{W}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N L_i \mathbf{f} = \mathbf{G}. \quad (26)$$

Здесь \mathbf{W}_i – векторы потоков в направлении координаты q_i , \mathbf{H} – вектор внешних сил и кориолисовых членов, возникающих из преобразования системы координат (12), L_i – дифференциальные матричные операторы, включающие газодинамические и вязкие члены уравнений (без смешанных производных) по направлению q_i , в вектор \mathbf{G} вынесены оставшиеся члены уравнений (смешанные производные, внешние и кориолисовы силы), а в качестве \mathbf{F} и \mathbf{f} могут быть выбраны, например (в двумерном случае):

$$\mathbf{F} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho(E+p)), \quad \mathbf{f} = (\rho, u, v, e). \quad (27)$$

Представим операторы L_i в виде расщепления по физическим процессам $L_i = \Omega_{2i-1} + \Omega_{2i}$ ($i=1, \dots, N$), где Ω_{2i-1} содержат конвективные и вязкие члены в направлении q_i ; Ω_{2i} – оставшиеся члены (кориолисовы члены, а также члены с давлением в уравнениях движения и члены типа $\text{div} \mathbf{V}$ в уравнениях неразрывности и энергии). С учетом расщепления система (26) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2N} \Omega_i \mathbf{f} = \mathbf{G}. \quad (28)$$

Систему (28) аппроксимируем разностной схемой с весами δ :

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{i=1}^{2N} \Omega_i^n \left[\delta \mathbf{f}^{n+1} + (1 - \delta) \mathbf{f}^n \right] = \mathbf{G}^n, \quad (29)$$

имеющей для всех α порядок $O(\tau + h^m)$, где m – порядок аппроксимации дифференциальных операторов разностными, в силу того, что коэффициенты операторов Ω^n берутся на n -слое. Представим (29) в канонической форме:

$$\left(I + \tau \delta \sum_{i=1}^{2N} \Omega_i^n \right) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{i=1}^{2N} \Omega_i^n \mathbf{f}^n + \mathbf{G}^n, \quad (30)$$

(здесь I – единичная матрица). Приближенно факторизуя стабилизирующий оператор

$$\left(I + \tau \delta \sum_{i=1}^{2N} \Omega_i^n \right) \approx \prod_{i=1}^{2N} \left(I + \tau \delta \Omega_i^n \right), \quad (31)$$

получаем из (30) разностную схему:

$$\prod_{i=1}^{2N} \left[I + \tau \delta \Omega_i^n \right] \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} = - \sum_{i=1}^{2N} \Omega_i^n f^n + G^n, \quad (32)$$

аппроксимирующую (28) с тем же порядком, что и основная схема (30).

Исходные формы записи (25)-(26) связаны между собой как

$$\partial f / \partial t = -A^{-1} W, \quad \text{где } A = \partial F / \partial f \quad (33)$$

а из (33) и (28) следует

$$- \sum_{i=1}^{2N} W_i f + G = -A^{-1} W. \quad (34)$$

Поэтому, подставляя (34) в (32), имеем окончательно разностную схему:

$$\prod_{i=1}^{2N} \left[I + \tau \delta \Omega_i^n \right] (f^{n+1} - f^n) / \tau = - (A^{-1} W)^n. \quad (35)$$

Для ее компьютерной реализации рассмотрим схему в дробных шагах:

$$\begin{aligned} \xi^n &= -(A^{-1} W)^n, \\ (I + \tau \delta \Omega_1^n) \xi^{n+1/2N} &= \xi^n, \\ &\dots\dots\dots \\ (I + \tau \delta \Omega_{2N}^n) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1-1/2N}, \\ f^{n+1} &= f^n, \end{aligned} \quad (36)$$

эквивалентную (35) после исключения дробных шагов. Схема (35) (или (36)) обладает свойством полной аппроксимации с порядком $O(\tau+h^m)$, а при установлении аппроксимирует стационарную задачу $W=0$ в дивергентной форме с порядком $O(h^m)$. Схема (36) является экономичной по времени, так как на дробных шагах решение разностных уравнений находится скалярными прогонками или по неявной схеме бегущего счета в зависимости от выбора вектора искомых функций f и системы координат q_i .

Весьма существенным для эффективности (устойчивости, точности, скорости сходимости решений стационарных задач) схемы (36) является построение конечно-разностных аналогов дифференциальных операторов алгоритма. Кратко опишем эту процедуру на примере одного координатного направления.

Введем в x -направлении (по другим направлениям аналогично) дискретную сетку $\{x_i, i=1, \dots, N_x\}$ с шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$ и определим на этой сетке разностные операторы Λ_1^{+k} и Λ_1^{-k} (по другим направлениям $\Lambda_2^{\pm k}, \Lambda_3^{\pm k}$ соответственно), аппроксимирующие дифференциальный оператор $\partial/\partial x$ вверх (+) и вниз (-) по сетке с k -м порядком точности. В частности, при $k=1$ и $k=2$ имеем

$$\left(\Lambda_1^{\pm 1} f \right)_i = \begin{cases} (f_{i+1} - f_i) / h_{i+1}, \\ (f_i - f_{i-1}) / h_i, \end{cases} \quad \left(\Lambda_1^{\pm 2} f \right)_i = \begin{cases} -(3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}) / (2h_{i+1}), \\ (3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) / (2h_i). \end{cases} \quad (37)$$

Введем оператор Δ_1^+ и соответствующий ему сопряженный оператор Δ_1^- , аппроксимирующие дифференциальный оператор $\partial/\partial x$ в i -й точке сетки или оператором Λ_1^{+k} , или оператором Λ_1^{-k} из (37) с учетом знака проекции вектора скорости V на это направление в данной точке:

$$\Delta_1^+ = \begin{cases} \Lambda_1^{-k}, & \text{если } V_x \geq 0, \\ \Lambda_1^{+k}, & \text{если } V_x < 0, \end{cases} \quad \Delta_1^- = \begin{cases} \Lambda_1^{+k}, & \text{если } V_x \geq 0, \\ \Lambda_1^{-k}, & \text{если } V_x < 0, \end{cases} \quad (38)$$

а также симметричный оператор Δ_1^0 :

$$\Delta_1^0 = \frac{1}{2}(\Delta_1^+ + \Delta_1^-).$$

Для устойчивости схемы (36) необходимо конвективные члены в уравнениях аппроксимировать с помощью операторов Δ^+ , члены с давлением - с помощью операторов Δ^- . Элементы тензора скоростей деформации и кориолисовы члены преобразования системы координат аппроксимируются оператором Δ^0 .

В частности, матричные операторы расщепления Ω_1 и Ω_2 в двумерной декартовой системе координат для схемы (36) с учетом (38) имеют вид

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} u\Delta_1^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u\Delta_1^+ - \frac{4}{3\rho \text{Re}} \Delta_1^0(\mu + \mu_r)\Delta_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u\Delta_1^+ - \frac{4}{\rho \text{Re}} \Delta_1^0(\mu + \mu_r)\Delta_1^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u\Delta_1^+ - \frac{\gamma}{\text{Re}} \Delta_1^0\left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_r}{\text{Pr}_r}\right)\Delta_1^0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho\Delta_1^+ & 0 & 0 \\ (\gamma-1)\frac{e}{\rho}\Delta_1^- & 0 & 0 & (\gamma-1)\Delta_1^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma-1)e\Delta_1^+ & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что операторы Ω_{2n-1} (нечетные) являются диагональными, и соответствующие им дробные шаги распадаются на несколько независимых процедур (5 в трехмерном и 4 в двумерном случаях), что, наряду со скалярностью прогонок, делает весьма эффективной реализацию схемы (36) на многопроцессорных ЭВМ.

Следует отметить, что схема расщепления (36) реализуется фактически не для системы уравнений (13), а осуществляется еще одно преобразование координат, переводящее криволинейную расчетную область в стандартную (единичный квадрат или куб), где неравномерная в физической области расчетная сетка становится равномерной, и на ней определяются все сеточные функции и операторы. Запись этой системы, в особенности ее правой части, и алгоритма дробных шагов, включая дифференциальные операторы расщепления и их конечно-разностные аналоги, исключительно громоздка, даже по сравнению с (13), и не может поэтому быть приведена в данной работе.

7. Организация вычислительного процесса

Компьютерное моделирование ламинарно-турбулентного обтекания тела и течения в ближнем следе за ним (см. рис. 1) основано на декомпозиции сложной полной задачи на ряд более простых. При этом общая декомпозиция имеет физико-математический, геометрический и технологический аспекты.

Сущность физико-математической декомпозиции задачи заключается в выборе той или иной модели процесса и связанных с этим специальных методов и алгоритмов решения. Как правило, их создание, и разработка соответствующих компьютерных программ являются чрезвычайно сложными и требуют для своей реализации значительных затрат времени и интеллекта. В связи с этим представляется целесообразной организацией поэтапного процесса продвижения в область усложняющихся физико-математических моделей. В данном случае в пакете программ проведено разделение функций: модуль расчета течений вязкого теплопроводного газа в ламинарном приближении, хорошо отработанный на большом классе задач обтекания в широком диапазоне определяющих параметров [6, 7, 16, 35], дополняется модулем учета турбулентности. При этом может быть использован целый ряд модулей, программно реализующих ту или иную модель турбулентности с достаточно простой заменой в вычислительном процессе. Интерфейс модулей решения уравнений Навье-Стокса и турбулентности осуществляется через специальные параметры (например, коэффициент турбулентной вязкости, энерговыделение и т.п.), передаваемые системными средствами.

Геометрическая декомпозиция задачи представляется сегментированием общей расчетной области на карту подобластей, в каждой из которых решение задачи находится специальным модулем пакета, учитывающим специфику течения в данной подобласти. В представляемой работе проведена сегментация на 2 зоны:

зона 1 – передняя область течения, ограниченная плоскостью, перпендикулярной оси тела и проходящей через точку его максимального размера (миделево сечение);

зона 2 – область течения над боковой поверхностью тела и его кормой, включая область ближнего следа (выходная граница выбрана в сверхзвуковой области течения).

Зоны 1 и 2 частично перекрываются для минимизации влияния границы зоны 1 на параметры в плоскости межмодульного интерфейса.

Геометрическая сегментация предоставляет существенные возможности для численных экспериментов по моделированию различных сценариев течения с использованием различных варьируемых моделей турбулентности в зонах 1 и 2.

Технологическая декомпозиция задачи отражает структурирование пакета программ с целью оптимизации проведения расчета и организации дополнительных возможностей вычислительного эксперимента, в частности создание банка данных полученных решений (ламинарных и турбулентных) для анализа влияния стартовых условий на эволюцию течения, развития турбулентности и исследования гистерезисных явлений.

8. Результаты расчетов

По конечно-разностной схеме (36) было проведено численное исследование ламинарного и турбулентного обтекания равномерным и стационарным сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа тел типа затушенного по сфере обратного конуса. Основное внимание при рассмотрении результатов уделяется анализу параметров пограничных слоев, положения точек отрыва и рециркуляционных зон за кормой тела и влияния на них различных моделей турбулентности.

В связи с многопараметричностью задачи ограничимся ее рассмотрением при следующих значениях определяющих параметров: $M_{\infty}=4$, $Re_{\infty}=10^7$, $\gamma=1.4$, $Pr=0.72$, $Pr_f=0.9$, $\omega=0.75$ с вариацией угла полураствора кормовой части тела ϕ от 10° до 45° , поверхность тела полагается или теплоизолированной, или имеющей фиксированную температуру T_w/T_0 от 0.1 до 1.

Прежде всего рассмотрим важный технологический вопрос об оптимальности организации интерфейса модулей расчета уравнений Навье-Стокса (13) - (14) и турбулентности (21) - (22), который заключается в выборе одного из следующих способов (перечислены лишь основные):

1. Каждому временному (итерационному) шагу расчета (13)-(14) соответствует также один шаг расчета (21)-(22).
2. После каждого шага расчета (13)-(14) следует несколько итераций (N_i) расчета (21) - (22).
3. После каждого шага расчета (13)-(14) следует расчет (21)-(22) до установления решения.
4. После нескольких шагов (N_i) расчета (13)-(14) следует несколько шагов (N_i) расчета (21)-(22).
5. После нескольких шагов (N_i) расчета (13)-(14) следует расчет (21)-(22) до установления решения.
6. На каждом шаге производится расчет (13)-(14) до установления, затем расчет (21)-(22) до установления и т.д.

Очевидно, последний способ требует максимума времени, но и его нельзя исключить из рассмотрения. При этом в период работы модуля решения уравнений Навье-Стокса параметры турбулентности (μ_t и k) консервируются до следующего периода его включения (для получения новых значений μ_t и k), когда в свою очередь, консервируются все среднезвешенные газодинамические функции (ρ , V , e , p).

Это же относится к организации программного взаимодействия и тогда, когда используется безытерационная алгебраическая модель турбулентности и требуется по "известным" полям вычислить лишь один параметр (например, μ_t). Априори нельзя утверждать, что в данном случае наиболее эффективен способ 1, и это подтверждает численный эксперимент.

Выбор способа организации межмодульного интерфейса является исключительно важным для минимизации затрат необходимого машинного времени с приемлемой точностью решения. Он связан также с глобальным теоретическим вопросом о существовании и единственности решения системы нелинейных уравнений (13)-(14) с (21)-(22) и гистерезисе решений по стартовым условиям.

Рис. 2 представляет процесс выхода решения на установление при использовании различных способов организации межмодульного интерфейса (номер кривой соответствует номеру способа) на задаче с обтеканием тела, проходящим по сценарию Т-2 (безотрывное обтекание, $\varphi=15^\circ$). Здесь показаны зависимости изменения функции f (в данном случае плотность на поверхности тела в точке с координатой, отсчитываемой от носка, $x=3$ (координата конца тела $x_k=4.7$)) от n , номера итерации схемы (21)-(22), или, что то же самое, безразмерного времени, поскольку для возможности адекватного сравнения во всех вариантах был использован один и тот же временной шаг τ .

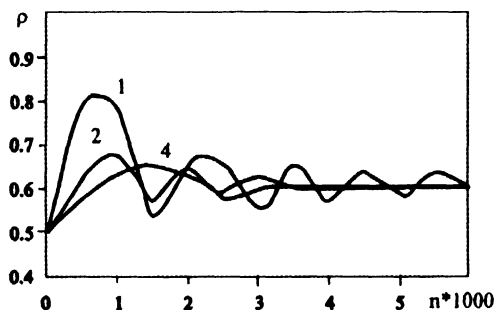


Рис. 2. Процесс установления решения.

Наименее эффективным из представленных является способ 1: на первой стадии перестройки течения этот способ дает максимальную амплитуду отклонения решения от стационарного, а на последних стадиях решение приближается к стационарному немоновотонным (осциллирующим) образом, затягивающим процесс установления. Наиболее эффективным для данной задачи (Т-2) оказался способ 4 (при значениях $N_f=50$, $N_t=10$), процесс установления решения (в этой точке) носит безосцилляционный характер. Варианты с $N_f=50$, $N_t=5$ и $N_f=25$, $N_t=10$ были менее эффективными (подробное экспериментирование в данном вопросе ограничено многовариантностью способов). Способы 3 и 5 оказались по типу процесса установления эквивалентными способам 2 и 4 соответственно, только с более высоким числом итераций, необходимых для получения стационарного решения. Самым плохим, к тому же в существенной степени, оказался способ 6. Для установления решения здесь потребовалось в 7 раз больше итераций, чем по способу 4.

Процесс установления решения в существенной мере зависит от стартовых условий – начального поля газодинамических параметров. Рассмотренные выше процессы установления начинались с некоторых “стандартных данных” – в качестве начальных данных использовались некоторые стационарные газодинамические поля решения близкой задачи. Расчет со старта по невозмущенным параметрам (однородный поток, в который внезапно помещено обтекаемое тело) дает исключительно плохие результаты. Отметим также, что, хотя для данной задачи использование старта с ламинарного решения Л-1 этой же задачи сократило необходимое время в 3.5 раза, в других задачах (при наличии развитых отрывов и рециркуляционных зон) подобный подход не является оптимальным.

В принципе аналогичен и процесс выхода решения на установление при использовании различных способов междоульного интерфейса для задачи с обтеканием тела, проходящим по сценарию Т-5 (отрыв потока у кормы тела). Результаты примерно такие же, как и для безотрывного обтекания: интерфейсы по способам 4 и 5 наиболее эффективны, способ 1 – менее эффективен, а способ 6 вообще малопримем. Однако существует принципиальная разница между картинками обтекания по сценариям Т-2 и Т-5: при отрывном обтекании все газодинамические параметры вблизи точки отрыва и ниже по течению не выходят на установление. Здесь наблюдается квазистационарный, в некотором смысле псевдопериодический осцилляторный режим, при котором все величины колеблются вокруг некоторого среднего положения, при этом амплитуды колебаний зависят от общих определяющих параметров задачи, увеличиваясь с ростом размера отрывных областей.

Отметим, что для более сложных сценариев обтекания из-за многовариантности аналогичные численные эксперименты не проводились, и авторы использовали для междоульного интерфейса способ 4, априори считая его наиболее эффективным.

Рассмотрим результаты численного эксперимента по вариации применения различных моделей турбулентности в зонах 1 и 2 при нескольких сценариях организации и развития течения – задачу об обтекании тела с $\varphi=15^\circ$ и теплоизолированной поверхностью. Выбор задачи с таким значением φ и тепловым условием обусловлен тем, что данное течение находится на грани перехода от сценария Л-1 к сценарию Л-2, т.е. перехода от безотрывного обтекания к отрывному, наступающему при $\varphi=16^\circ$, если расчет проводится со стартовыми отрывными условиями, или при $\varphi=18^\circ$, если расчет начат со стартовыми безотрывными условиями (подробнее о ламинарном гистерезисе см. [6]).

На рис. 3 приведены распределения значений коэффициента поверхностного трения $C_f=C_f(x)$, в диапазоне x от начала зоны 2 ($x=1$) до концевой точки тела ($x_k=4.7$) для четырех вариантов организации течения:

- 1) сценарий Л-1, стартовые условия Л-1 ($\varphi=10^\circ$);
- 2) сценарий Т-2, стартовые условия Л-1, алгебраическая модель;

3) сценарий Т-3, стартовые условия Т-2, в зоне 1 и зоне 2 – однопараметрические модели;

4) сценарий Т-3, стартовые условия Т-2, в зоне 1 и в зоне 2 – одно- и двухпараметрические модели соответственно.

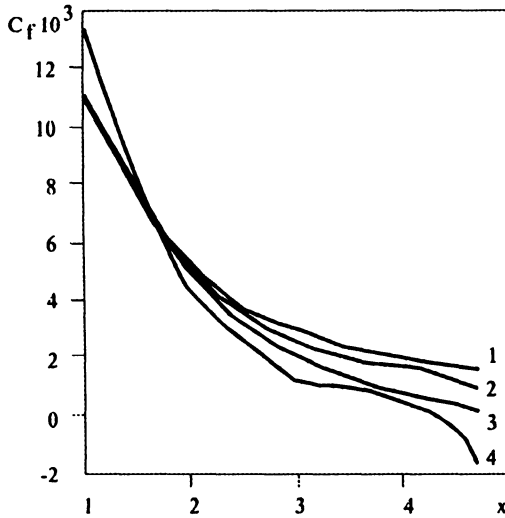


Рис.3. Коэффициент трения

Результаты расчетов показывают определенную, и в некоторых подобластях довольно существенную зависимость C_f от варианта постановки задачи. Это весьма распространенный результат применения различных моделей турбулентности. Главный результат экспериментирования – существование для варианта 4 подобласти значений $C_f < 0$ при $x > 4.3$ ($C_f = 0$). Это означает, что произошел отрыв динамического турбулентного пограничного слоя в точке $x = 4.3$ ($C_f = 0$). Таким образом, автоматически осуществился переход от сценария Т-3 (безотрывное обтекание) к сценарию Т-5 (отрывное обтекание), хотя расчеты по другим вариантам приводили только к безотрывному течению. Особо отметим, что для данного варианта проводилось специальное численное экспериментирование с константами в модели турбулентности с тем, чтобы добиться определенных значений μ , вызывающих более сильное притормаживание потока, что приводит к увеличению обратного градиента давления и инициированию отрыва.

На рис. 4 показаны значения распределения продольной компоненты скорости $V(x)$ вдоль оси задачи в ближнем следе за телом ($\alpha = 15^\circ$), начиная от конечной точки тела $x_k = 4.7$. Кривые 1-4 представляют результаты тех же, что и для рис. 3, вариантов организации расчета. Из рис. 4 видно, что один из вариантов численного эксперимента принципиально отличается от трех других, более или менее коррелирующих между собой. Для вариантов 1-3 функция $V(x)$ имеет монотонный характер, при этом везде $V_x > 0$. При расчетах по варианту 4 функция $V(x)$ является немонотонной. Более того, существует область $x_k \leq x \leq x_n$, $x_n = 5.1$, в которой $V(x) \leq 0$, т.е. за кормой тела существует зона возвратного течения. Сопоставляя это с результатами, представленными на рис. 3, можно сделать вывод, что для данного варианта течение вблизи поверхности тела организовано следующим образом: турбулизовавшийся динамический пограничный слой, оторвавшись от тела в точке $x_{отр} = 4.3$, присоединяется далее вниз по потоку не к поверхности тела, а к оси симметрии задачи в точке с координатой $x_n = 5.1$, образуя над кормой тела и в ближнем следе за ним довольно обширную область рециркуляционного течения.

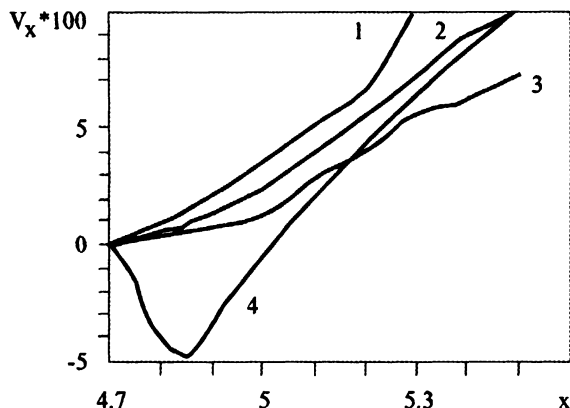


Рис. 4. Скорость вдоль оси следа

Сразу отметим, что для численного моделирования здесь снова появляется точка ветвления сценариев: зона возвратного течения может быть турбулентной, или в ней может наблюдаться явление реламинаризации потока. Расчеты по этим двум сценариям дают различные численные результаты. Зоны рециркуляции в расчетах по вариантам 1-3 не образуются, течение вдоль поверхности тела является безотрывным, и пограничный слой, плавно стекая с конца тела, образует вязкостную дорожку ближнего следа. Имеют место количественные отличия результатов – поток за кормой тела для варианта 1 (ламинарное течение) разгоняется быстрее, чем для вариантов 2 и 3 (турбулентное течение). Это объясняется перекачкой части полной энергии в турбулентную с соответствующим уменьшением кинетической энергии потока. Заметим при этом, что разгон потока для варианта 2 происходит быстрее, чем для варианта 3, т.е. алгебраическая модель занижает значения турбулентных величин по сравнению с дифференциальной моделью.

Рис. 5 и 6 представляют общие картины полного обтекания тела (варианты 3 и 4 соответственно). На них приведены изолинии логарифма плотности (эквидистантные в поле значений $\log \rho$). Выбор для анализа функции $\log \rho$ обусловлен большим изменением собственно ρ в поле течения, причем существенное изменение ρ приходится на зону обтекания головной части (сильная волна разрежения), что не дает возможности пространственного анализа более тонких эффектов в кормовой части течения по эквидистантным уровням функции плотности.

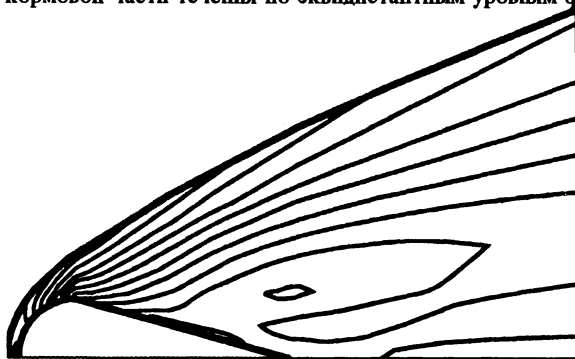


Рис. 5. Безотрывное обтекание

На рис.6 хорошо заметен отрыв пограничного слоя и затем огибание оторвавшимся пограничным слоем рециркуляционной зоны и его дальнейшая эволюция в дорожку вдоль оси ближнего следа. По резким изгибам изолиний можно однозначно определить положение висячего кормового скачка уплотнения. Картина, изображенная на рис. 5, в кормовой части течения имеет иной вид, чем на рис. 6. По конфигурации изолиний можно уверенно определить, что, хотя обтекание кормы является безотрывным, общая ситуация носит предотрывный характер. Вблизи кормы располагается волна сжатия, которая имеет тенденцию к переформированию в висячий скачок уплотнения, наличие (и интенсивность) которого предопределяет отрывность течения. В целом картины течений, будучи фактически одинаковыми в передней части обтекания, довольно существенно различаются, начиная от точки отрыва и далее вниз по течению.

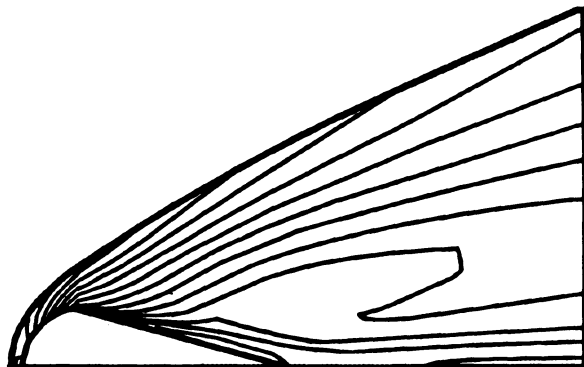


Рис. 6. Отрывное обтекание

Таким образом, при решении одной и той же задачи выбор методологии организации расчета (сценарий, сегментация области, модель процесса) оказывает серьезное влияние на результаты численного моделирования в переходных ситуациях.

Отметим также, что большой ряд других численных экспериментов, в частности, с вариацией по M_∞ , T_w показал, что применение различных сценариев, а в них – различных моделей турбулентности с вариацией констант, может привести к не только количественно, но и качественно отличающимся результатам – смене режима обтекания.

9. Обсуждение проблемы

К настоящему времени число работ, посвященных численному моделированию турбулентных течений, исключительно велико. Только за последние годы появилось большое количество работ, посвященных конструированию новых моделей турбулентности (в основном двухпараметрических, типа $k-\epsilon$ или $q-\omega$), записи новых форм двух дифференциальных уравнений для них, вариации в них разнообразных констант [4, 5, 8, 9, 13, 17, 20, 24-28, 30-34]. В сущности, все эти модели достаточно близки, и разница между ними не носит принципиального характера. Первым уравнением обычно является уравнение для энергии турбулентных пульсаций k (удельной кинетической энергии турбулентности, составляющей часть удельной полной энергии газа), вторым – уравнение для комплекса $k^a L^b$ (L – масштаб турбулентности). Модели отличаются значениями показателей степени a и b , а наибольшее распространение имеет модель с $a=3/2$, $b=-1$, где комплекс $k^{3/2} L^{-1}$ представляет скорость диссипации энергии турбулентных пульсаций.

Все эти модели тестируются на задачах, для которых существуют экспериментальные данные, задачах, как правило, достаточно узких (течение в пограничном слое, обтекание каверн, выступов, прямых и обратных ступенек и т.п.), и по степени корреляции экспериментальных и расчетных данных делают выводы об эффективности применения модифицированных моделей (с набором каких-то значений констант) для более широких классов задач.

При этом результаты такого подхода к моделированию достаточно разнообразны. Например, в [18, 25, 26, 32] делается вывод о преимуществах двухпараметрических моделей, а в [24, 30, 31, 33], наоборот, показано, что однопараметрические и в некоторых случаях даже простые алгебраические модели для большого ряда задач более эффективны, чем двухпараметрические. Отметим работы [28, 29], из ряда немногих, где на одной из задач внешнего обтекания (ступенька со скосом) убедительно показано, что хорошее согласие получаемых расчетных и экспериментальных данных (включая коэффициент трения и тепловой поток) в существенной мере зависит от качества алгоритма (путем повышения точности расчета внутренних скачков уплотнения – уменьшения размывания фронта и снижения “забросов” величин за фронтом), а также от выбора сценария течения (предположение о реламинаризации потока в рециркуляционной области течения), без традиционной очередной коррекции модели турбулентности и перебора в ней констант для подгонки расчета к эксперименту.

Все работы этого типа (модель – эксперимент – коррекция модели) имеют весьма ограниченную область применения: именно только тот набор подзадач, на экспериментальные данные которого опирается работа. Ее выводы не могут быть распространены за эти границы, например, варианты моделей, настроенных для расчетов в пограничном слое, не будут эффективны для изучения следов за телом. Тем более невозможно говорить об эффективности применения этих моделей и методов расчета в задачах, где вообще нет экспериментальных данных, и по ряду причин их и не будет (из-за высокой стоимости или невозможности соответствия по параметрам и т.п.) – а ведь продвижение в такие неисследованные области и есть главная цель математического моделирования и численного эксперимента.

В связи со сказанным выше, авторы данной работы не пошли по этому пути, и при использовании нескольких моделей турбулентности не проводили никакого сравнения с экспериментом для выявления наилучшей. Цель работы принципиально иная. В настоящее время все больше и больше вызывает сомнение целесообразность пути математического моделирования турбулентных течений со всеми их сложными структурами и особенностями, основанного на постепенном наращивании сложности осреднения (одно-, двух-, трех-, N -параметрические модели описания некоторых характеристик турбулентности).

В представляемой работе специально выбрана задача об обтекании тела конечного размера. Данная задача является наглядной, идейно простой в постановочном плане. Кроме того, она является замкнутой (самодостаточной) по граничным условиям, в отличие от приводившихся выше работ, посвященных изучению течений вблизи геометрических элементов (ступеньки, выемки), когда расчетная область окружена искусственными границами: слева, например, входные границы с какими-то разнообразными условиями на них (или равномерный поток, сопряженный с поверхностью тела по каким-то законам, или уже развитый где-то турбулентный пограничный слой и т.п.), при этом уровень турбулентности на входе в расчетную область практически полностью определяет течение вниз по потоку. В представляемой постановке всего два элемента: есть тело конечного размера с определенной геометрией, и есть набегающий на него равномерный сверхзвуковой поток сжимаемого газа с набором определяющих параметров. Математическое моделирование должно обеспечить получение *однозначного* решения по входным физическим параметрам, включая образование всех структур течения (рис.1).

Так, применение уравнений Навье-Стокса для описания ламинарных течений обеспечивает численное получение, в зависимости от геометрии тела и параметров набегающего пото-

ка, или безотрывных, или отрывных течений по единому алгоритму, без дополнительных предположений со стороны вычислителя, т.е. обеспечивает автоматическое получение единственного решения (за исключением гистерезисных явлений на границе смены режимов).

Как показало настоящее исследование, совершенно иная ситуация возникает при проведении численного расчета турбулентного обтекания. Конечный результат моделирования определяют не только входные внешние параметры, но и внутренний набор алгоритмических факторов:

многовариантность возможных сценариев течения;

многовариантность моделей турбулентности, используемых в различных зонах течения;

многовариантность организации межмодульного интерфейса;

многовариантность по стартовым условиям с разнообразными гистерезисными явлениями.

Вопрос о многовариантности по стартовым условиям уже частично обсуждался выше, здесь необходимо еще раз подчеркнуть, что турбулентный перенос зависит не только от осредненных параметров потока в данной точке, но и от предыстории потока, т.е. в турбулентных течениях существуют эффекты "памяти", механизм которых совершенно неясен. Это ставит под сомнение правомерность сравнения численных и экспериментальных данных из-за безусловно разной предыстории моделируемой задачи. К данному вопросу примыкает проблема влияния шумов в набегающем потоке. Незначительные, на первый взгляд, пульсации на входе, генерация шумов на шероховатостях поверхности или микроколебания модели могут кардинально преобразовать картину течения в ту или иную сторону, делая бессмысленным сравнение с численным расчетом вследствие неадекватности в постановке задачи.

Следует еще раз вернуться к вопросу о межмодульном интерфейсе в различных сценариях течения. Среди существенных недостатков моделирования турбулентности на основе применения осредненных уравнений Навье-Стокса, дополненных одно- или двухпараметрическими дифференциальными моделями, можно назвать и необходимость применять специальные и крайне искусственные приемы инициирования турбулентности. Экспериментальные исследования процессов ламинарно-турбулентного перехода и исследование зарождения турбулентности носят фактически лишь описательный характер: в пограничном слое появляются некие турбулентные пятна, которые, эволюционируя вниз по потоку, переходят в характерные структуры типа "петля", "подкова", "шпилька" (см. [18, 22], и обзор [36]), физический механизм образования которых абсолютно не ясен. Соответственно и в численном моделировании способы изучения и описания процессов зарождения турбулентности во внешнем потоке, в пограничном слое, на срыве потока с острых кромок, в ближнем следе, взаимодействие мелко- и крупномасштабной турбулентностей весьма разнообразны [8, 9, 12, 13, 16, 20, 21, 25, 26]. Общей для них чертой является отсутствие универсальности, возможности практического применения для широкого спектра ситуаций.

10. Заключение

На регулярно проводящихся международных конференциях по математическому моделированию турбулентных течений на основании тестирования громадного количества численных результатов, в том числе на задачах из специализированных баз данных, в последнее время все чаще делаются выводы о непригодности моделирования турбулентности на основе осредненных уравнений Навье-Стокса с привлечением гипотез замыкания (см., например, [37-39]), в геофизической печи (см. Введение) существуют два исключительно слабых звена (физическая модель → математическая модель), и нужен новый подход к проблеме ([40-43]).

Авторы настоящей работы разделяют эту точку зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Этюды о турбулентности (под ред. О.М. Белоцерковского). -М.: Наука, 1994, 291с.
2. Гогош Л.В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения. -М.: Наука, 1979, 127с.
3. Швец А.И., Швец И.Т. Газодинамика ближнего следа. -Киев: Наук. Думка, 1976, 310с.
4. Launder B.E., Spalding D.B. Mathematical models of turbulence. L: Acad. Press, 1972.
5. Marvin J.S., Coakley T.J. Turbulence modeling for hypersonic flows. NASA Technical Memorandum, 101079, 1989.
6. Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. -Новосибирск: Наука, 1990, 246с.
7. Tarnavsky G.A. Coordinate evolution of velocity and temperature boundary layers over the afterbody and its near wake // Thermophysics and Aeromechanics, 1996, v.3, №1, p.85-92.
8. Laurien E. Numerical investigation of laminar-turbulent transition in the boundary-layer on reentry capsules // AIAA Pap. -1995, №0775, p.1-7.
9. Никитин Н.В. О возникновении турбулентных центров в пристенных течениях // Изв. РАН, МЖГ, 1997, №2, с. 47-58.
10. Яницкий В.Е. О методе частиц и прямом численном моделировании турбулентности / В сб. Этюды о турбулентности, -М.: Наука, 1994, с. 275-290.
11. Brissaud A., Frish V., Leorat I. et. al. Catastrophe energetique et nature de la turbulence // Ann. geophys., 1973, v.29, №4, p. 539-546.
12. Chui-Jie Wu, Han-Sheng Shi. An optimal theory for an expansion of flow quantities to capture in the Sobolev space $W^{m,p}(\Omega_T)$ // Fluid Dyn. Res., 1996, v.17, №2, 67-85.
13. Дмитриев С.С. Исследование структуры изменений в турбулентном пограничном слое в предотрывной области // Теплофизика высоких температур, 1997, т.35, №2, с. 263-270.
14. Бабаков А.В. Моделирование крупномасштабных когерентных структур в ближнем следе / В сб. Этюды о турбулентности, -М.: Наука, 1994, с.223-245.
15. Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Нестационарные отрывные и переходные течения жидкости около тел конечных размеров / В сб. Этюды о турбулентности, -М.: Наука, 1994, с.259-274.
16. Borisov A.V., Tarnavsky G.A. Numerical investigation of turbulent separated flows in the near wake after body // Separated flows and jets, Berlin: Springer Verlag, 1990, p.117-120.
17. Pope S.B., Writelaw J.H. The calculation of near wake flow // J. Fl. Mech., 1976, v.73, p. 9-18.
18. Herrin J.L., Dutton J.C. The turbulence structure of a reattaching axisymmetric supersonic free shear layer // AIAA Pap., 1995, №2250, p.1-13.
19. Карликов В.П., Молодых О.В., Шоломович Г.И. О турбулентном отрывном обтекании тела вращения с донным срезом // Изв. РАН, МЖГ, 1996, №6, с.50-55.
20. Секундов А.Н. Модель турбулентности для описания взаимодействия пограничного слоя с крупномасштабным турбулентным потоком // Изв. РАН, МЖГ, 1997, №2, с. 59-68.
21. Зайчик Л.И. Пристеночные функции для моделирования турбулентного течения и теплообмена // Теплофизика высоких температур, 1997, №3, с. 391-396.
22. Wolochuk M.C., Plesniak M.W., Braun J.E. The effects of turbulence and unsteadiness on vortex shedding from sharp-edged bluff bodies // Trans. ASME, J. Fluid End, 1996, 118, №1, p. 18-25.
23. Wilcox D.C. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models // AIAA J., 1988, v.26, №11, p. 1299-1310.
24. Eiji Shima, Koichi Egami, Kanachi Amano Navier-Stokes computation of a high lift system using Spalart-Allmaras turbulence model // AIAA Pap., 1994, №0162, p.1-11.
25. Kusunose Kazuhiro, Cao Hoa Prediction of transition location for 2-D Navier-Stokes solver for multi-element airfoil configuration // AIAA Pap., 1994, №2376.
26. Bardina J.E. Three-dimensional Navier-Stokes method with two-equation turbulence models for efficient numerical simulation of hypersonic flows // AIAA Pap., 1994, №2950.
27. Sale N.M. A point-implicit two-equation turbulence model for hypersonic flows // AIAA Pap., 1994, №2368, p. 1-7.
28. Борисов А.В., Федорова Н.Н. Расчет турбулентных отрывных течений на основе метода повышенного порядка аппроксимации // Теплофизика и аэромеханика, 1995, т.2, №3, с.253-269.
29. Борисов А.В., Федорова Н.Н. Численное моделирование сверхзвуковых отрывных турбулентных течений // ПМТФ, 1996, т.37, №4, с.89-97.

30. *Weather N.P.* Turbulence models for instructed finite element calculation // *J. Num. Meth. in Fluids*, 1995, v.20, №8, p.803-817.
31. *Nelson T.E., Godin P., Zingg D.W.* Multi-element airfoil computations with one-equation turbulence models // *AIAA Pap.*, 1995, №0357.
32. *Robinson D.F., Harris J.E., Hassan H.A.* A unified turbulence closure model for axisymmetric and planar free shear flows // *AIAA Pap.*, 1995, №0360, p.1-11.
33. *Kobayashi Toshio, Togashi Shigenori* Comparison in turbulence models applied to backward-facing step flows // *JSME Int. J.B.*, 1996, v.39, №3, p.453-460.
34. *Леонтьев А.И., Шишов Е.В., Герасимов А.В.* Модель турбулентности "к-ε" для расчета градиентных пристенных течений // *ДАН*, 1996, т.350, №4, с.481-484.
35. *Тарнавский Г.А.* Численное исследование течений в дальнем следе за телом. // *Моделирование в механике*. 1990, т.4(21) №1, с. 150-157.
36. *Григорьев Ю.Н.* Организованные структуры в развитой пристенной турбулентности. Новосибирск: изд. ИВТ РАН, 1993, 41с.
37. *Rodi W.* Recent developments in turbulence modelling // *Proc. of 93 Workshop on Mat. Mod. of Turb. Flows*, 1993, Japan.
38. *Desideri J., Periaux J.* Validation of high-speed flow simulations by means of network data base // *Comput. Math. Appl. Sci -96: 3rd ECCOMAS Comp. Fluid Dyn. Conf. and 2nd ECCOMAS Conf. Numer. Math. Eng.*, Paris, 1996. -Chichester etc., 1996, p. 300-306.
39. *Marvin J.G.* Perspective on computational fluid dynamics validation // *AIAA J.*, 1995, v.33, №10, p.1778-1787.
40. *Белоцерковский О.М.* Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности: когерентные структуры, ламинарно-турбулентный переход, хаос / В сб. Этюды о турбулентности, -М.: Наука, 1994, с. 137-222.
41. *Нужнов Ю.В.* Условное осреднение уравнений Навье-Стокса и новый подход в моделировании перемежающихся турбулентных течений // *Изв. РАН, МЖГ*, 1997, №4, с.24-31.
42. *Tribelsky M.J., Tsuboi K.* New scenario for transition to turbulence? // *Phys. Rev. Let.*, 1996, v.76, №10, p.1631-1634.
43. *Denaro F.M.* Towards a new model-free simulation of high-Reynolds-flow: Local average direct numerical simulation // *Int. J. Numer. Math. Fluids*, 1996, v.23, №2, p.125-142.

Поступила в редакцию 25.11.97