В. А. Дулев, О бесконечномерных n-многообразиях,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 4, 12–17

https://www.mathnet.ru/vmumm2025

СЛО	СЛП	БИН	МАФ	Функция
0	0	0	0	$0^{11}10110$
0	0	0	1	$0^{8}10010110$
0	0	1	0	$0^{10}101110$
0	0	1	1	$0^{10}101000$
0	1	0	0	$0^{9}1^{7}$
0	1	0	1	—
0	1	1	0	$0^{11}11001$
0	1	1	1	—
1	0	0	0	$0^{8}10000110$
1	0	0	1	—
1	0	1	0	$0^{8}10101000$
1	0	1	1	—
1	1	0	0	—
1	1	0	1	—
1	1	1	0	$0^{12}1011$
1	1	1	1	$0^{14}11$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schaefer Th. J. The complexity of satisfiability problems//Conf. Rec. 10 Ann. ACM Symp. Theory Comput. N. Y., 1978. 221—226.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.

Поступила в редакцию
28.10.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 515.12

В. А. Дулев

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ n-МНОГООБРАЗИЯХ

§ 1. Предварительные сведения

В работе используются два подхода к определению сильной и слабой бесконечномерности, введенные П. С. Александровым и Ю. М. Смирновым.

Определение 1 (П. С. Александров). Пространство X называется слабо бесконечномерным (в дальнейшем A-слабо бесконечномерным), если для любой счетной системы пар замкнутых множеств (A_i, B_i), $A_i \cap B_i = \varnothing$, $i \in N$, найдутся перегородки C_i (между A_i и B_i), такие, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \varnothing$.

Пространство, не являющееся A-слабо бесконечномерным, называется A-сильно бесконечномерным.

Определение 2 (Ю. М. Смирнов). Пространство X называется S-слабо бесконечномерным, если для любой счетной системы дизъюнктных пар замкнутых множеств (A_i, B_i), $i \in N$, найдутся такие перегородки C_i (между A_i и B_i) и такой номер n_0, что $\bigcap_{i=1}^{n_0} C_i = \varnothing$.

Пространство, не являющееся S-слабо бесконечномерным, называем S-сильно бесконечномерным.

Так как любая счетная центрированная система замкнутых подмножеств счетно-компактного пространства имеет непустое пересечение, то класс A-слабо (A-сильно) бесконечномерных счетно-компактных пространств совпадает с классом S-слабо (S-сильно) бесконечномерных счетно-компактных пространств.

Предложение 1. *Пусть X — нормальное, S-сильно бесконечномерное пространство. Тогда существует такая система (A_i, B_i), $A_i \cap B_i = \varnothing$, $i \in N$, что A_i и B_i замкнуты в X и для любой системы (C_i), где C_i — перегородка между A_i и B_i, пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ имеет мощность не меньше мощности континуума для любого $n \in N$.*

Доказательство. *Пусть X* S-сильно бесконечномерно, тогда существует система (A_i, B_i), где A_i, B_i замкнуты в X, $A_i \cap B_i = \varnothing$, $i \in N$, такая, что для любой системы (C_i), где C_i — перегородка между A_i и B_i, для любого $n \in N$ пересечение $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i \neq \varnothing$. Пусть φ — функция из большой леммы Урысона для множеств A_{n+1}, B_{n+1}, тогда существует континуум попарно непересекающихся перегородок между A_{n+1} и B_{n+1} вида $\varphi^{-1}(a)$, $0 < a < 1$. Отсюда следует, что $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ содержит как минимум континуум точек. Тогда (A_i, B_i), $i \in N$, — требуемая система. Предложение доказано.

Предложение 2 [1, § 1, предложение 1.5]. *Пусть $f: X \to Y$ — монотонное, замкнутое отображение на Y и пусть A и B — дизъюнктные замкнутые подмножества пространства Y. Тогда для каждой перегородки C в X между $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ множество $f(C)$ является перегородкой в Y между A и B.*

Теорема [2, гл. 10, § 5, теорема 21]. *Наследственно нормальное пространство X, являющееся суммой счетной (или конечной) системы A-слабо бесконечномерных множеств X_n, $n = 1, 2, \ldots$, A-слабо бесконечномерно.*

Лемма [2, гл. 10, § 5, лемма 2]. *Пространство X, являющееся дискретной суммой замкнутых в X множеств F_n, $n \in N$, с $\dim F_n \geqslant n$, S-сильно бесконечномерно.*

Обозначим через $\bigcup Q^n$ дискретную сумму n-мерных кубов.

Следствие леммы. Пространство $\bigcup Q^n$ является S-сильно бесконечномерным, в то же время согласно теореме оно A-слабо бесконечномерно. Одноточечная компактификация пространства $\bigcup Q^n$ (по той же теореме) A-слабо бесконечномерна, т. е. в силу бикомпактности она S-слабо бесконечномерна.

§ 2. Конструкция

Мы ограничимся лишь кратким описанием конструкции. Более подробно с этим построением можно ознакомиться в работе [1].

Пусть A — замкнутое подпространство пространства X и пусть

$f: A \to B$ — факторное отображение на некоторое пространство B. Обозначим через X_f факторпространство пространства X относительно разбиения, элементы которого суть слои $f^{-1}B$ отображения f и одноточечные множества из $X \backslash A$.

Пространство Y^n, $n \geqslant 4$

Пусть A — замкнутое нигде не плотное подпространство S^{n-1}-сферы, ограничивающей n-шар B^n. Пусть $f: A \to B$ — монотонное отображение на некоторый компакт B, $Y^n \equiv B_f{}^n$. Факторное отображение $B^n \to Y^n$ обозначим через φ. Положим $H^n \equiv \varphi(S^{n-1})$. Возьмем произвольную нумерацию $\{h_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ множества H^n, она существует в силу предположения континуум-гипотезы.

В работе [1] построены топологический обратный спектр $S = \{X_\beta, \pi_\gamma{}^\beta : \gamma \leqslant \beta \leqslant \omega_1\}$ и дифференциальные структуры $(Z_\beta, \mathscr{D}_\beta)$, $\beta < \omega_1$, где $X_\beta = Z_\beta \bigcup H^n$, со следующими свойствами (все необходимые обозначения находятся в работе [1]):

1) X_β гомеоморфно Y^n;

2) $X_\beta \backslash Z_\beta$ гомеоморфно H^n;

3) $\pi_\gamma{}^\beta$ есть почти гомеоморфизм при $\gamma < \beta$;

4) если $\gamma < \beta$, то $(\pi_\gamma^{\gamma+1})^{-1} h_\gamma = h_\gamma \bigcup J_{\gamma+1} \equiv K_{\gamma+1}$ гомеоморфно отрезку I, когда h_β есть точка первого рода, и конусу над $\varphi^{-1}(h_\gamma)$, когда h_β является точкой второго рода;

5) если $\delta \leqslant \gamma < \beta$ и h_γ является предельной точкой множества $\pi_0{}^\beta(A_\delta)$, то всякая точка $x \in K_{\gamma+1}$ является предельной точкой множества A_δ в пространстве $(X_\beta, \mathscr{T}_\beta)$;

6) $(Z_\beta, \mathscr{D}_\beta)$ диффеоморфно R^n, т. е. $\mathscr{D}_\beta$ содержит такую карту (Z_β, φ_β), что $\varphi_\beta(Z_\beta) = R^n$;

7) если $\gamma < \beta$, то $(Z_\gamma, \varphi_\gamma) \in \mathscr{D}_\beta$.

Итак, обозначим через X предел топологизированного обратного спектра S и положим $M^n = (Z, \mathscr{D})$, где $\mathscr{D} = \bigcup \{\mathscr{D}_\beta : \beta < \omega_1\}, Z = \bigcup\limits_{\gamma < \omega_1} Z_\gamma$. Таким образом, X — бикомпакт, дифференцируемое n-многообразие M^n является открытым подмножеством X, а разность $X \backslash M^n$ гомеоморфна компакту H^n. Пусть $\pi_\gamma : X \to X_\gamma$ — сквозные проекции спектра S. Введем следующие обозначения:

$$\widehat{\pi}_\gamma \equiv \pi_\gamma |_{M^n}, \quad \widehat{X}_\alpha \equiv \pi_\alpha(M^n) = X_\alpha \diagdown \{h_\beta : \beta < \alpha\},$$

$$X^* \equiv X \diagdown \{h_0\}, \quad \overset{*}{\pi}_1 \equiv \pi_1 |_{X^*}.$$

Ясно, что $\pi_1{}^*$ является отображением пространства X^* на $\hat{X}_1$. Для открытого множества $U \subset M^n$ через $\widetilde{U}^C$ мы будем обозначать такое наибольшее открытое в C множество, что $\widetilde{U}^C \cap M^n = U$, т. е. $\widetilde{U}^C = C \diagdown \overline{(M^n \diagdown U)}^C$, где C таково, что $M^n \subset C \subset X$.

Свойство 1. *Из свойства 5 спектра S следует, что если h_β есть предельная точка множества $\widehat{\pi}_0(A_\delta)$ при $\gamma \leqslant \beta$, то $\pi^{-1} h_\beta \subset \overline{A}_\gamma^{M^n}$.*

Основное свойство отображения $\widehat{\pi}_0$ (см. [1, § 2]). *Для любого замкнутого подмножества F множества M^n множество $\overline{\widehat{\pi}_0(F)} \diagdown \widehat{\pi}_0^{\#} F$ счетно.*

Свойство 2. *Для любого замкнутого подмножества F множества M^n существует $\gamma : \gamma < \omega_1$, такое, что $\overline{\widehat{\pi}_\alpha(F)}^{\widehat{X}_\alpha} \diagdown \widehat{\pi}_\alpha^{\#} F \subset \{h_\beta : \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma\}$ для любого $\alpha < \omega_1$.*

Доказательство. Согласно основному свойству отображения $\widehat{\pi}_0$, существует $\gamma : \gamma < \omega_1$, такое, что $\overline{\widehat{\pi}_0(F)} \diagdown \widehat{\pi}_0^{\#} F \subset \{h_\beta : \beta < \gamma\}$. Пусть $\widehat{\pi}_0^\alpha \equiv \pi_0^\alpha |_{\widehat{X}_\alpha}$. Ясно, что $\widehat{\pi}_0^\alpha : \widehat{X}_\alpha \to X$. Тогда верно соотношение

$$(\widehat{\pi}_0^{\alpha})^{-1}(\overline{\widehat{\pi}_0(F)\diagdown\widehat{\pi}_0^{\#}F})=(\widehat{\pi}_0^{\alpha})^{-1}(\overline{\widehat{\pi}_0(F)})\diagdown(\widehat{\pi}_0^{\alpha})^{-1}(\widehat{\pi}_0^{\#}F)\supset\overline{\widehat{\pi}_\alpha(F)}^{\widehat{X}_\alpha}\diagdown\widehat{\pi}_\alpha^{\#}F.$$

Получаем

$$\overline{\widehat{\pi}_\alpha(F)}^{\widehat{X}_\alpha}\diagdown\widehat{\pi}_\alpha^{\#}F\subset(\widehat{\pi}_0^{\alpha})^{-1}\{h_\beta:\beta<\gamma\}=\{h_\beta:\alpha\leqslant\beta<\gamma\}\cup\{(\widehat{\pi}_0^{\alpha})^{-1}h_\beta:\beta<\alpha\}.$$

По построению спектра $S\{(\widehat{\pi}_0^{\alpha})^{-1}h_\beta:\beta<\alpha\}\subset\widehat{X}_\alpha\diagdown H^n$, но $\widehat{\pi}_\alpha|_{\widehat{\pi}_\alpha^{-1}(\widehat{X}_\alpha\diagdown H^n)}$ — гомеоморфизм, тогда $\overline{\widehat{\pi}_\alpha(F)}^{\widehat{X}_\alpha}\diagdown\widehat{\pi}_0^{\#}F\subset\{h_\beta:\alpha\leqslant\beta<\gamma\}$.

Свойство 3. *Пусть система* (A_i^1, A_i^2), $i\in N$, *такова, что* $A_i^1\cap A_i^2=\varnothing$ *и* A_i^j *замкнуты в* M^n, *тогда существует* $\gamma:\gamma<\omega_1$, *такое, что* $\widehat{\pi}_\gamma(A_i^j)$ *замкнуты в* $\widehat{X}_\gamma$ *и* $\widehat{\pi}_\gamma(A_i^1)\cap\widehat{\pi}_\gamma(A_i^2)=\varnothing$.

Доказательство. Для любого множества A_i^j существует $\gamma_{ij}:\gamma_{ij}<\omega_1$, такое, что для любого $\gamma:\gamma_{ij}<\gamma<\omega_1$ справедливо равенство $\overline{\widehat{\pi}_\gamma(A_i^j)}^{\widehat{X}_\gamma}=\widehat{\pi}_\gamma^{\#}A_i^j$. Это следует из свойства 2. Возьмем $\gamma<\omega_1$, такое, что $\gamma\geqslant\gamma_{ij}$ для любого i и j. Это γ и будет искомым.

Свойство 4. $\pi_1^*:X^*\to\widehat{X}_1$ — *замкнутое отображение.*

Это свойство очевидно следует из построения спектра.

Отметим, что если множество F замкнуто в M^n, то

$$\pi_0(\overline{F}^X)=\overline{\widehat{\pi}_0(F)},\ \pi_1^*(\overline{F}^{X^*})=\overline{\widehat{\pi}_1(F)}^{\widehat{X}_1}.$$

Это следует из непрерывности и замкнутости отображений π_0, π_1^*.

Свойство 5. *Для любого множества F, замкнутого в M^n, множества* $\pi_0(\overline{F}^X)\diagdown\pi_0^{\#}(\overline{F}^X)$, $\pi_1^*(\overline{F}^{X^*})\diagdown(\pi_1^*)^{\#}(\overline{F}^{X^*})$ *счетны.*

Это следует из свойства 2, основного свойства отображения $\widehat{\pi}_0$ и вышеприведенного замечания.

Свойство 6. *Для любого множества U, открытого в M^n, множества* $\pi_0(\widetilde{U}^X)\diagdown\pi_0^{\#}(\widetilde{U}^X)$, $\pi_1^{\#}(\widetilde{U}^{X^*})\diagdown(\pi_1^*)^{\#}(\widetilde{U}^{X^*})$ *счетны.*

Это свойство двойственно свойству 5.

Предложение 3 [1, § 2, предложение 2.2]. *Многообразие M^n совершенно нормально и наследственно сепарабельно.*

§ 3. S-сильно бесконечномерное n-многообразие, которое A-слабо бесконечномерно

Предложение 4. *Пусть пространство $\widehat{X}_1$ является S-сильно бесконечномерным, тогда многообразие M^n является S-сильно бесконечномерным.*

Доказательство. Пусть (A_i^1, A_i^2), $i\in N$, — система, такая, что множество A_i^j замкнуто в $\widehat{X}_1$, $A_i^1\cap A_i^2=\varnothing$ и для любой системы перегородок (C_i) (C_i — перегородка между A_i^1 и A_i^2) верно утверждение

(1) $\bigcap_{i=1}^{n}C_i$ имеет мощность не меньшую мощности континуума для любого $n\in N$.

Такая система существует в силу предложения 1.

Пусть U_i^j — такие окрестности множества A_i^j, что $\overline{U}_i^1\cap\overline{U}_i^2=\varnothing$ для всех i (все окрестности и замыкания подмножеств $\widehat{X}_1$ берутся в этом же пространстве), и пусть $F_i^j=M^n\cap(\pi_1^*)^{-1}(\overline{U}_i^j)=(\widehat{\pi}_1)^{-1}(U_i^j)$. Для того чтобы доказать предложение, достаточно показать, что

(2) $\bigcap_{i=1}^{n}B_i\neq\varnothing$ для любых перегородок B_i между множествами F_i^1 и F_i^2 для любого $n\in N$.

Пусть $M^n \setminus B_i = V_i^1 \cup V_i^2$, где V_i^1 и V_i^2 суть дизъюнктные окрестности множеств F_i^1, F_i^2. Положим $D_i = X^* \setminus \widetilde{V}_i^{1\,X^*} \cup \widetilde{V}_i^{2\,X^*}$. Поскольку $(\pi_1^*)^{-1} U_i^j \subset \widetilde{V}_i^{j\,X^*}$, множество D_i является перегородкой в X^* (напомним, $X^* = X \setminus \{h_0\}$) между $(\pi_1^*)^{-1} A_i^1$ и $(\pi_1^*)^{-1} A_i^2$. Согласно предложению 2 и свойству 4 (о том, что π_1^* замкнуто) множество $\pi_1^*(D_i)$ является перегородкой в $\hat{X}_1$ между A_i^1 и A_i^2. Поэтому из (1) вытекает утверждение

(3) для любого $n \in N$ пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_1^*(D_i)$ имеет мощность не меньше континуума.

Следовательно, для проверки истинности соотношения (2) достаточно показать, что

(4) для любого $n \in N$ множество $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_1^*(D_i) \setminus \widehat{\pi}_1^{\#} B_i$ счетно.

В дальнейшем нам потребуются два следующих элементарных теоретико-множественных факта:

(5) $\bigcap_{\alpha} P_\alpha \setminus \bigcap_{\alpha} Q_\alpha \subset \bigcup_{\alpha} (P_\alpha \setminus Q_\alpha)$;

(6) $\bigcup_{\alpha} P_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha} Q_\alpha \subset \bigcup_{\alpha} (P_\alpha \setminus Q_\alpha)$.

Таким образом, для доказательства утверждения (4) достаточно (согласно свойству (5)) показать, что множество $\pi_1^*(D_i) \setminus \widehat{\pi}_1^{\#} B_i$ счетно. А для этого согласно свойству 2 из § 2 достаточно проверить, что

(7) множество $\pi_1^*(D_i) \setminus \widehat{\pi}_1(B_i)$ счетно.

Имеем $\hat{X}_1 \setminus \widehat{\pi}_1(B_i) \subset \widehat{\pi}_1(V_i^1) \cup \widehat{\pi}_1(V_i^2)$ и $\pi_1^*(D_i) \subset \hat{X}_1 \setminus (\pi_1^*)^{\#} \widetilde{V}_i^{1\,X^*} \cup (\pi_1^*)^{\#} \widetilde{V}_i^{2\,X^*}$. Следовательно,

$$\pi_1^*(D_i) \setminus \widehat{\pi}_1(B_i) \subset (\widehat{\pi}_1(V_i^1) \cup \pi_1(V_i^2)) \setminus ((\pi_1^*)^{\#} \widetilde{V}_i^{1\,X^*} \cup (\pi_1^*)^{\#} \widetilde{V}_i^{2\,X^*}) \subset$$

$$\subset (\text{согласно } (6)) \subset (\widehat{\pi}_1(V_i^1) \setminus (\pi_1^*)^{\#} \widetilde{V}_i^{1\,X^*}) \cup (\widehat{\pi}_1(V_i^2) \setminus (\pi_1^*)^{\#} \widetilde{V}_i^{2\,X^*}) \subset$$

$$\subset (\pi_1^*(\widetilde{V}_i^{1\,X^*}) \setminus (\pi_1^*)^{\#} \widetilde{V}_i^{1\,X^*}) \cup (\pi_1^*(\widetilde{V}_i^{2\,X^*}) \setminus (\pi_1^*)^{\#} \widetilde{V}_i^{2\,X^*}).$$

Но последнее множество счетно в силу свойства 6 из § 2. Итак, утверждение (7) проверено. Предложение доказано.

Пусть теперь B — одноточечная компактификация пространства $\bigcup Q^n$ (см. следствие леммы), вложенная в Q^∞, $f: M_1 \to Q^\infty$ — отображение менгеровской кривой, о построении которого было объявлено Андерсоном в [3]. Множество $f^{-1}B$ вложим в S^{n-1} ($f^{-1}B$ будет выполнять роль множества A). На том этапе, когда мы выбираем нумерацию $\{h_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ множества H^n, потребуем, чтобы h_0 была той точкой, которой мы компактифицировали $\bigcup Q^n$.

Тогда $\hat{X}_1 = X_1 \setminus \{h_0\}$ S-сильно бесконечномерно, так как содержит S-сильно бесконечномерное замкнутое подмножество $\bigcup Q^n$ (см. следствие леммы). В силу предложения 4 многообразие M^n является S-сильно бесконечномерным.

Теперь докажем, что M^n A-слабо бесконечномерно. Пусть пары (A_i^1, A_i^2) таковы, что A_i^j замкнуты в M^n, $A_i^1 \cap A_i^2 = \varnothing$. Тогда согласно свойству 3 из § 2 существует $\gamma < \omega_1$, такое, что $\widehat{\pi}_\gamma(A_i^j)$ замкнуты в $\hat{X}_\gamma$ и $\widehat{\pi}_\gamma(A_i^1) \cap \widehat{\pi}_\gamma(A_i^2) = \varnothing$. Но по теореме множество $\hat{X}_\gamma$ A-слабо бесконечномерно, так как является суммой подмножества шара B^n и подмножеств кубов I^n, $n\in N$. Тогда существует система (B_i) перегородок между $\widehat{\pi}_\gamma(A_i^1)$ и $\widehat{\pi}_\gamma(A_i^2)$ в $\widehat{X}_\gamma$, такая, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i=\varnothing$. Следовательно, $(\widehat{\pi}_\gamma^{-1} B_i)$ будет системой перегородок между A_i^1 и A_i^2 в M^n с пустым пересечением.

Итак, M^n — A-слабо бесконечномерное, но S-сильно бесконечномерное дифференцируемое n-многообразие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорчук В. В. Дифференцируемое многообразие с несовпадающими размерностями при CH//Матем. сб. 1995. **186**, № 1. 23—45.
2. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М., 1973.
3. Anderson R. D. A continuous curve admitting monotone open maps onto all locally connected metric continua//Bull. AMS. 1956. 62. 264—265.

Поступила в редакцию
27.03.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 512.544.43

А. Г. Савушкина

СОПРЯГАЮЩИЕ БАЗИС АВТОМОРФИЗМЫ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

Пусть F_n $(n\geqslant 2)$ — свободная группа со свободными образующими $a_1, \ldots, a_n$ и пусть $\operatorname{Aut} F_n$ — группа автоморфизмов свободной группы F_n. Автоморфизм из группы $\operatorname{Aut}F_n$ называется сопрягающим автоморфизмом, если он отображает каждую образующую a_p в слово вида $W_p^{-1}(a_1, \ldots, a_n)\, a_{i_p} W_p(a_1, \ldots, a_n)$. Автоморфизм из группы $\operatorname{Aut} F_n$ называется сопрягающим базис автоморфизмом (см. [1]), если он отображает каждую образующую a_p в слово вида $W_p^{-1}(a_1, \ldots, a_n)\, a_p W_p(a_1, \ldots, a_n)$. Группа сопрягающих базис автоморфизмов $\mathfrak{M}_n$ порождается автоморфизмами (см. [2])

$$\varepsilon_{i,j}: a_i \to a_j^{-1} a_i a_j \quad (1\leqslant i,\ j\leqslant n;\ i\neq j) \tag{1}$$

и определяющими соотношениями (см. [1])

$$\begin{gathered}\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{k,l}=\varepsilon_{k,l}\varepsilon_{i,j} \quad (i\neq k;\ i\neq l;\ j\neq k),\\ \varepsilon_{i,k}\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{k,j}=\varepsilon_{k,j}\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{i,k}.\end{gathered} \tag{2}$$

Подгруппа группы сопрягающих автоморфизмов, состоящая из тех автоморфизмов, которые отображают на себя произведение $a_1a_2\ldots a_n$, является группой кос $\mathfrak{B}_n$ (см., например, [3]). Она порождается автоморфизмами

$$\sigma_i: \begin{cases} a_i \to a_{i+1} \\ a_{i+1} \to a_{i+1}^{-1} a_i a_{i+1} \end{cases} \quad (i=1, \ldots, n-1).$$

Подгруппа группы кос $\mathfrak{B}_n$, порожденная автоморфизмами

$$\rho_{i,j}=\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}\ldots\sigma_{j-2}\sigma_{j-1} \quad (1\leqslant i<j\leqslant n),$$

является группой крашеных кос $\mathfrak{R}_n$ (см. [4]). Центр группы кос $\mathfrak{B}_n$ при $n>2$ совпадает с бесконечной циклической группой, порожденной элементом $\rho_{1,2}\rho_{1,3}\ldots\rho_{1,n}$ (см. [5]). Центр группы крашеных кос $\mathfrak{R}_n$ при