ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 9 (232)

В. М. Борок, Я. И. Житомирский УДК 517.944

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, I. ЕДИНСТВЕННОСТЬ

В работе рассматривается задача Коши для линейных дифференциальных уравнений вида

$$\partial u(x, t)/\partial t = P(\partial/\partial x)\, u(x, t) + \sum_{j=1}^{q} Q_j(\partial/\partial x)\, u(x, t_j), \quad (x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times [0, T],$$
$$0 < t_1 < \ldots < t_q \leqslant T < \infty, \tag{1}$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь $P(s)$, $Q_j(s)$, $j = \overline{1, q}$,—произвольные полиномы относительно $s = (s_1, \ldots, s_n)$ с постоянными (комплексными) коэффициентами, $\sum_{j=1}^{q} |Q_j(s)| \not\equiv 0$. Эти уравнения относятся к числу так называемых нагруженных дифференциальных уравнений. Различные задачи для таких уравнений изучались в работах [1], [2] и других. Уравнения вида (1) могут быть истолкованы: 1) как уравнения с сингулярными (типа дельта-функции по t) коэффициентами (к подобным уравнениям приводит исследование систем с сосредоточенными в определенные моменты времени или на заданных гиперплоскостях элементами); 2) как уравнения с переменными отклонениями (временного) аргумента.

Целью данной статьи является получение максимально широких (в терминах роста решения при $|x| \to \infty$) классов единственности решения задачи Коши (р. з. К.) (1)—(2).

§ 1. Абстрактная схема. Классификация систем

Пусть E—нормированное пространство, P и Q_j $(j = 1, \ldots, q)$—линейные непрерывные операторы из $D \subset E'$ в E'; $u(t)$, $t \in [0, T]$,—элемент пространства E', зависящий от параметра t, причем $u'(t)$—производная по t в слабом смысле.

Однородной абстрактной задачей Коши для нагруженного уравнения будем называть задачу

$$u'(t) = Lu(t) \equiv Pu(t) + \sum_{j=1}^{q} Q_j u(t_j), \quad u(t) \in D, \ t \in [0, T], \tag{3}$$
$$0 < t_1 < \ldots < t_q \leqslant T < \infty,$$
$$u(0) = 0. \tag{4}$$

Пусть Φ и Φ_1—линейные топологические пространства, $\Phi \subset \Phi_1 \subset E$, Φ плотно в E; P^*, Q_j^*, $j = \overline{1, q}$,—линейные непрерывные операторы в Φ_1; пусть операторы P, Q_j $(j = \overline{1, q})$ и P^*, Q_j^* $(j = \overline{1, q})$ связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} (Pu, \varphi) &= (u, P^* \varphi), \\ (Q_j u, \varphi) &= (u, Q_j^* \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\forall u \in D, \ \forall \varphi \in \Phi_1, \\ &j = \overline{1, q}. \end{aligned} \tag{5}$$

Сопряженной к задаче (3)—(4) называется следующая задача: решить систему уравнений

$$dv_k(t)/dt = -P^* v_k(t), \quad v_k(t) \in \Phi_1, \ t \in [0, T], \ k = \overline{1, q}, \tag{6}$$

при условиях

$$v_k(t_k) - \sum_{j=1}^{q} Q_k^* \int_0^{t_j} v_j(\tau)\,d\tau = \varphi_k, \quad k = 1, \dots, q, \tag{7}$$

где $\varphi_k \in \Phi_1$, $k = \overline{1, q}$,—заданные элементы; интегрирование в (7) и дифференцирование в (6) понимается по топологии пространства Φ_1.

Теорема 1. *Пусть*: 1. *при любых* $\varphi_k \in \Phi$, $k = \overline{1, q}$, *задача* (6)—(7) *имеет решение* $v_j(t) \in \Phi_1$, $j = \overline{1, q}$;

2. *задача Коши* $du(t)/dt = Pu$, $u(0) = 0$, $u(t) \in E'$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *имеет лишь тривиальное решение. Тогда задача* (3)—(4) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Используя равенство $d(u(t), v_k(t))/dt = (u'(t), v_k(t)) + (u(t), v_k'(t))$, получим $0 = \int_0^{t_k} (u'(\tau) - Lu(\tau), v_k(\tau))\,d\tau = (u(t_k), v_k(t_k)) - \sum_{j=1}^{q} \left(u(t_j), \int_0^{t_k} Q_j^* v_k(\tau)\,d\tau\right)$, $k = \overline{1, q}$. Суммируя по $k = 1, \dots, q$ и используя (7), получим

$$0 = \sum_{k=1}^{q} (u(t_k), v_k(t_k)) - \sum_{j,\,k=1}^{q} \left(u(t_j), Q_j^* \int_0^{t_k} v_k(\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= \sum_k \left(u(t_k), v_k(t_k) - \sum_j Q_k^* \int_0^{t_j} v_j(\tau)\,d\tau\right) = \sum_k (u(t_k), \varphi_k).$$

Отсюда $u(t_k) = 0$, $k = 1, \dots, q$, и в силу условия 2 теоремы 1 $u = 0$. Теорема доказана.

Применим теорему 1 к задаче (1)—(2). Обозначим

$$E = \left\{e(x) : \|e(x)\| = \int_{R^n} |e(x)|\,\mathscr{E}(x)\,dx < \infty\right\}, \tag{8}$$

где $\mathscr{E}(x) > 0$—заданная непрерывная функция; в роли пространств Φ и Φ_1 будут выступать пространства типа S ([3], гл. IV). Плотность вложения $\Phi \subset E$ будет обеспечена теоремой о запасе функций в пространствах типа S ([3], с. 278). Операторы P и Q_j, $j = \overline{1, q}$, определим на множестве $D \subset E'$, состоящем из функций, обладающих непрерывными производными по x всех достаточно высоких порядков и удовлетворяющих оценкам $|D^r f(x)| \leqslant C_f \mathscr{E}(x)$, $\forall r : |r| \leqslant \max(\deg P, \deg Q_1, \dots, \deg Q_q)$. Операторы P^* и Q_j^*, $j = \overline{1, q}$, определим с помощью формально сопряженных дифференциальных выражений. Требование на характер убывания элементов пространства Φ_1 должно гарантировать выполнение соотношений (5); задача, сопряженная задаче (1)—(2), принимает вид:

$$\partial v_k(x, t)/\partial t = -P^*(\partial/\partial x)\, v_k(x, t), \quad k = 1, \dots, q, \tag{9}$$

$$v_k(x, t_k) - \sum_{j=1}^{q} Q_k^*(\partial/\partial x) \int_0^{t_j} v_j(x, \tau)\,d\tau = \varphi_k(x), \quad (x, t) \in R^n \times [0, T]. \tag{10}$$

Наряду с этой задачей рассмотрим „двойственную сопряженную задачу“:

$$dy_k(s, t)/dt = -P^*(is)\, y_k(s, t), \quad k = \overline{1, q}, \tag{11}$$

$$y_k(s, t_k) - \sum_{j=1}^{q} Q_k^*(is) \int_0^{t_j} y_j(s, \tau)\,d\tau = \psi_k(s), \quad k = \overline{1, q}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) находим

$$y_k(s, t) = \exp\{-tP^*(is)\}\xi_k(s), \quad k=\overline{1, q}, \quad \exp\{-t_k P^*(is)\}\xi_k(s) -$$

$$-\sum_{j=1}^{q} Q_k^*(is) K(P^*(is), t_j)\xi_j(s) = \psi_k(s), \quad K(\alpha, t) \overset{\text{def}}{\equiv} \int_0^t \exp\{-\alpha t\}\, dt. \tag{13}$$

Обозначим через $Q(s)$ матрицу системы (13), $\Delta(s) = \det Q(s)$. Очевидно, $\Delta(s)$ — целая функция $s \in \boldsymbol{C}^n$. Уравнение $\Delta(s)=0$ назовем характеристическим для уравнения (1), а многообразие $Z=\{s \in \boldsymbol{C}^n : \Delta(s)=0\}$ — характеристическим многообразием уравнения (1).

Лемма 1. *Характеристическое многообразие уравнения* (1) *совпадает с множеством корней уравнения*

$$\delta(s) \equiv 1 - \sum_{j=1}^{q} Q_j^*(is) K(-P^*(is), t_j) = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим

$$\delta_q(\lambda, a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_q) = \det(\lambda E - A), \quad A = (a_i b_k)_{i,k=1}^{q}, \tag{15}$$

тогда легко установить по индукции, что

$$\delta_q(\lambda, a_1, \ldots, b_q) \equiv \lambda^q - \lambda^{q-1} \sum_{i=1}^{q} a_i b_i. \tag{16}$$

Но $\Delta(s) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^{q} t_j P^*(is)\right\}\delta_q(1, a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_q)$ при $a_j = Q_j^*(is) \times \times \exp\{t_j P^*(is)\}$, $b_j = K(P^*(is), t_j)$, $j=\overline{1, q}$. Отсюда и из (16) получаем требуемое, поскольку

$$\Delta(s) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^{q} t_j P^*(is)\right\}\delta(s). \tag{17}$$

Уравнение (1) назовем вырожденным, если $Z = \boldsymbol{C}^n$, абсолютно невырожденным, если $Z = \varnothing$, и невырожденным типа a, если $a = \inf_{s \in Z} |\operatorname{Im} s| < \infty$, $Z \neq \varnothing$ (здесь $|\cdot|$ — эвклидова норма).

Из леммы 1 непосредственно вытекает критерий абсолютной невырожденности уравнения (1):

уравнение (1) *является абсолютно невырожденным тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух следующих условий*: $(A_1): P(s) \equiv C$, *имеет место тождество*

$$\sum_{j=1}^{q} Q_j(s) K(-c, t_j) \equiv C_1 \neq 1; \tag{18}$$

$(A_2): q = 1, \ P(s) + Q_1(s) \equiv 0$.

Доказательство. Если $P(s) \equiv C$, то $\Delta(s)$ — полином. Тогда (14) показывает, что условие $Z = \varnothing$ равносильно (18). Если $P(s) \not\equiv \text{const}$, то условие $Z = \varnothing$, приводит к тождеству $\Delta(s) \equiv C \exp\{R(s)\}$, где $C \neq 0$, $R(s)$ — полином. Обозначим $R_1(s) \equiv R(s) + \sum_{j=1}^{q} t_j P^*(is)$, $T_j(s) \equiv -Q_j^*(is)$, $j=\overline{1, q}$, $T_0(s) \equiv P^*(is) + + \sum_{j=1}^{q} Q_j^*(is)$, $t_0 = 0$. Из (15) получим

$$\sum_{j=0}^{q} T_j(s) \exp\{t_j P^*(is)\} \equiv CP^*(is) \exp\{R_1(s)\}, \ s \in \boldsymbol{C}^n. \tag{19}$$

Тождество (19), как нетрудно показать, возможно лишь при условии $T_j(s) \equiv 0$, $0 \leqslant j \leqslant q$, $j \neq j_0$; $T_{j_0}(s) \equiv C_1 P^*(is)$, $C_1 \neq 0$. Очевидно, $j_0 > 0$. Но тогда $q = 1$, $P(s) + Q_1(s) \equiv 0$, что и требовалось.

Кроме того, как нетрудно получить из леммы 1, справедлив критерий вырожденности уравнения (1):

уравнение (1) *является вырожденным тогда и только тогда, когда*

$$P(s) \equiv a, \ \sum_{j=1}^{q} Q_j(s) K(-a, t_j) \equiv 1. \tag{20}$$

§ 2. Теоремы единственности

Будем говорить, что класс функций

$$M_{F(x)} = \{f(x) : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^1 \,\big|\, |f(x)| \leqslant C_f F(x)\},$$

$C_f \geqslant 0$—постоянная, $F(x)$—заданная функция, является классом единственности р. з. К. для уравнения (1), если из условий: а) $u(x, t)$—решение уравнения (1) в слое $\boldsymbol{R}^n \times [0, T]$, б) $u(x, 0) \equiv 0$, $x \in \boldsymbol{R}^n$, в) $u(x, t) \in M_{F(x)}$ при каждом $t \in [0, T]$,—следует, что $u(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times [0, T]$.

Теорема 2. *Классы единственности р. з. К. для абсолютно невырожденного уравнения* (1) *совпадают с классами единственности р. з. К. для уравнения*

$$\partial u(x, t)/\partial t = P(\partial/\partial x) u(x, t). \tag{21}$$

Доказательство. В случае (A_1) уравнение (21) имеет вид $\partial u(x, t)/\partial t = Cu(x, t)$ и единственность р. з. К. для него обеспечена в классе всех функций. Пусть $u(x, t)$—решение уравнения (1) при условии $u(x, 0) = 0$. Можно считать его сколь угодно гладкой (по x) функцией, перейдя в противном случае к рассмотрению $u_1(x, t) = \int u(x - \xi, t) \alpha(\xi) d\xi$, $\alpha(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. Функция $v(x, t) \equiv u(x, t) \exp\{-ct\}$ является (сколь угодно гладким) решением задачи

$$\partial v(x, t)/\partial t = \sum_{j=1}^{q} Q_j(\partial/\partial x) v(x, t_j) \exp\{c(t_j - t)\}, \ v(x, 0) = 0.$$

Интегрируя по t, в пределах от 0 до T, получим

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{q} Q_j(\partial/\partial x) v(x, t_j) \exp\{ct_j\} K(c, t), \tag{22}$$

откуда

$$v(x, t_k) = \sum_{j=1}^{q} Q_j(\partial/\partial x) v(x, t_j) \exp\{ct_j\} K(c, t_k), \quad k = \overline{1, q}.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства операцию $Q_k(\partial/\partial x)$, умножая на $\exp\{ct_k\}$, складывая, а затем, используя (18) и (22), получим $v(x, t) \equiv 0$, откуда $u(x, t) \equiv 0$.

В случае (A_2) речь идет о задаче

$$\partial u(x, t)/\partial t = P(\partial/\partial x)(u(x, t) - u(x, t_1)), \ u(x, 0) = 0. \tag{23}$$

Полагая $v(x, t) = u(x, t) - u(x, t_1)$, получим

$$\partial v(x, t)/\partial t = P(\partial/\partial x) v(x, t), \ v(x, t_1) = 0. \tag{24}$$

Если $u(x, t)$—решение задачи (23) и $u(x, t) \in M_{F(x)}$, то $v(x, t)$—решение задачи (24) и $v(x, t) \in M_{F(x)}$. Если $M_{F(x)}$—класс единственности решения задачи (24), то $v(x, t) \equiv 0$, следовательно, $u(x, t) \equiv u(x, t_1)$. Тогда из (23) следует, что $u(x, t) \equiv 0$. Если же задача (24) имеет решение $v(x, t) \not\equiv 0$, $v(x, t) \in M_{F(x)}$, то

функция $u(x, t) \equiv v(x, t) - v(x, 0) \in M_{F(x)}$, $u(x, 0) \equiv 0$, и как нетрудно видеть, $u(x, t)$—решение (23). Кроме того, $u(x, t) \not\equiv 0$, т. к. в противном случае получим $v(x, t) \equiv 0$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *невырождено*, $a > 0$. *Тогда класс* $M_{F(x)}$, $F(x) = \exp\{\alpha|x|\}$ *при любом* $\alpha < a$ *является классом единственности р. з. К. для этого уравнения.*

Доказательство. Применим теорему 1. Выберем в (8) $\mathscr{E}(x) = \exp\{\alpha|x|\}$, $\Phi = S_{1,A}^{\beta,B}$, $\Phi_1 = S_{1,A_1}^{\beta,B}$ (см. [3]). Очевидно, $\Phi \subset \Phi_1$ при $A_1 > A$. Подберем параметры пространств Φ и Φ_1. Решим сначала задачу (11)—(12) при произвольных $\psi_k(s) \in S_{\beta,B}^{1,A} = \boldsymbol{F}\{\Phi\}$, $k = 1, \ldots, q$, где $\boldsymbol{F}\{\cdot\}$—символ преобразования Фурье. Полагая $\bar{\psi}(s) = (\psi_1(s), \ldots, \psi_q(s))$, найдем решение $\bar{\xi}(s) = (\xi_1(s), \ldots, \xi_q(s))$ системы (13) в виде $\bar{\xi}(s) = Q^{-1}(s)\bar{\psi}(s)$, имеющем смысл в полосе $\Pi_\alpha = \{s \in \boldsymbol{C}^n : |\operatorname{Im} s| \leqslant \alpha\}$. При этом целая функция $\Delta(s)$ порядка роста не выше p при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет при $s \in \Pi_\alpha$ оценке $|\Delta(s)| \geqslant C_1 \exp\{-C_2(\varepsilon)|s|^{p+\varepsilon}\}$, $C_1 > 0$, $C_2(\varepsilon) > 0$, откуда следует, что

$$\|Q^{-1}(s)\| \leqslant C_3 \exp\{C_4(\varepsilon)|s|^{p+\varepsilon}\}, \ s \in \Pi_\alpha, \ C_3 > 0, \ C_4 > 0. \tag{25}$$

Решение $\bar{y}(s, t) = (y_1(s, t), \ldots, y_q(s, t))$ задачи (11)—(12) представим в виде

$$\bar{y}(s, t) = \exp\{-tP^*(is)\} Q^{-1}(s)\bar{\psi}(s). \tag{26}$$

Оценка (25) показывает, что умножение на элементы матрицы $\exp\{-tP^*(is)\} \times Q^{-1}(s)$ является ограниченным оператором в пространстве $S_{\beta,B}^{1,A}$ при $\beta < 1/p$ (A и B любые), переводящем его в пространство $S_{\beta,B}^{1,A_1}$, $A_1 = A + (ea_1)^{-1}$, где $\alpha < a_1 < a$. Тогда задача (9)—(10) при любых $\varphi_k(x) \in \Phi = S_{1,A}^{\beta,B}$ имеет решение $v_k(x, t) \in \Phi_1 = S_{1,A_1}^{\beta,B}$, $k = \overline{1, q}$. Постоянную A следует выбрать из условия $\Phi_1 = S_{1,A_1}^{\beta,B} \subset E$, т. е. $0 < A < (e\alpha)^{-1} - (ea_1)^{-1}$, а постоянную B—произвольно. Пространство $\Phi = S_{1,A}^{\beta,B}$ нетривиально, а следовательно, вложение $\Phi \subset E$ плотно при любых A и B. Таким образом, придем к справедливости условия 1 теоремы 1. Выполнение в E' условия 2 этой теоремы вытекает, напр., из теоремы И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова единственности р. з. К. для уравнений в частных производных [4].

Теорема 4. *Пусть уравнение* (1) *является невырожденным типа* 0, *но* $Z \cap \boldsymbol{R}^n = \varnothing$. *Тогда при любом* $\alpha > 0$ *класс* $M_{F(x)}$, $F(x) = (1 + |x|)^\alpha$, *является классом единственности решения задачи Коши для этого уравнения.*

Доказательство. Выберем теперь в (8) $\mathscr{E}(x) = (1 + |x|)^\alpha$. Тогда $u(x, t) \in E'$ при любом $t \in [0, T]$. Положим $\Phi = \Phi_1 = S^0 \subset E$. Очевидно, для любой достаточно гладкой функции $u \in E'$ и любой $\varphi \in \Phi$ справедливы соотношения (5). Разрешимость в S^0 сопряженной задачи (9)—(10) снова устанавливается на основании рассмотрения двойственной задачи (11)—(12) в пространстве $\boldsymbol{F}\{S^0\} = S_0$ финитных бесконечно дифференцируемых функций. Формула (26) при $s = \sigma \in \boldsymbol{R}^n$ дает решение этой задачи, причем, очевидно, $\bar{y}(\sigma, t) \in S_0$, $t \in [0, T]$. Итак, условие 1) теоремы 1 выполнено; условие 2) также выполнено в силу цитированной выше теоремы И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова. Применяя теорему 1, получим требуемое.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (1) *невырождено. Тогда при любой функции* $F(x) \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$ *класс* $M_{F(x)}$ *является классом единственности решения задачи Коши для уравнения* (1).

Лемма (об обыкновенном нагруженном уравнении). *Пусть* $-\infty \leqslant \alpha \leqslant 0 < t_1 < \ldots < t_q \leqslant \beta \leqslant \infty$, $a \in \boldsymbol{C}^1$, $b_i \in \boldsymbol{C}^1$, $i = \overline{1, q}$, $h_0 \in \boldsymbol{C}^1$. *Уравнение*

$$h'(t) = ah(t) + \sum_{k=1}^{q} b_k h(t_k), \ t \in [\alpha, \beta], \tag{27}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $h(0) = h_0$, *если*

$$\delta = 1 - \sum_{j=1}^{q} K(-a, t_j) b_j \neq 0. \tag{28}$$

Это решение задается формулой

$$h(t) = e^{at} h_0 \left(1 + \frac{K(a, t)}{\delta} \sum_{j=1}^{q} b_j e^{at_j}\right). \tag{29}$$

При $\delta = 0$ *уравнение* (1) *имеет решение* $h(t) \not\equiv 0$, *удовлетворяющее условию* $h(0) = 0$.

Доказательство леммы. Интегрируя уравнение (27) и подставляя $t = t_j$, $j = \overline{1, q}$, придем к системе

$$\bar{h} - (K(-a, t_j) b_k)_{j, k=1}^{q} \bar{h} = h_0 \bar{e}, \tag{30}$$

где $\bar{e} = (\exp\{at_1\}, \ldots, \exp\{at_q\})$, $\bar{h} = (h(t_1), \ldots, h(t_q))$. Определитель системы (30) имеет вид (см. (15), 16)): $\delta_q(1, K(-a, t_1), \ldots, K(-a, t_q), b_1, \ldots, b_q) = \delta$, что и приводит к справедливости всех утверждений леммы, кроме (29). Для получения формулы (29) положим $w(t) = e^{-at} h(t)$; тогда

$$w'(t) = e^{-at} \sum_{k=1}^{q} b_k h(t_k), \quad w(0) = h_0,$$

откуда

$$w(t) = h_0 + K(a, t) \sum_{k=1}^{q} b_k e^{at_k} w(t_k). \tag{31}$$

Полагая здесь $t = t_j$, $j = \overline{1, q}$ и обозначая $\bar{w} = (w(t_1), \ldots, w(t_q))$, $\bar{e}_1 = (1, \ldots, 1)$, получим $R\bar{w} = h_0 \bar{e}_1$, $R = (R_{jk})_{j, k=1}^{q}$, $R_{jk} = \delta_{jk} - K(a, t_j) b_k e^{at_k}$ (δ_{jk} — символ Кронекера), причем $\det R = \delta \neq 0$. Отсюда $\bar{w} = h_0 R^{-1} \bar{e}_1$ и, следовательно,

$$w(t_k) = h_0 \sum_{j=1}^{q} (R^{-1})_{kj}, \quad k = \overline{1, q}.$$

Возвращаясь к (31), получим

$$w(t) = h_0 \left[1 + K(a, t) \sum_{k=1}^{q} b_k e^{at_k} \sum_{j=1}^{q} (R^{-1})_{kj}\right] = h_0 \left[1 + K(a, t) \sum_{k, j} (R^{-1})_{kj} b_k e^{at_k}\right]. \tag{32}$$

Далее, используя формулу для R_{mk}, получим $K(a, t_m) \sum_{k=1}^{q} (R^{-1})_{kj} b_k e^{at_k} = \sum_{k=1}^{q} (R^{-1})_{kj} (\delta_{mk} - R_{mk}) = (R^{-1})_{mj} - \delta_{mj}$, $m, j = \overline{1, q}$. Умножая последнее равенство на $b_m e^{at_m}$ и суммируя по m, а также учитывая определение Δ, получим

$$(1 - \delta) \sum_{k=1}^{q} (R^{-1})_{kj} b_k e^{at_k} = \sum_{m=1}^{q} (R^{-1})_{mj} b_m e^{at_m} - b_j e^{at_j},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{q} (R^{-1})_{kj} e^{at_k} b_k = \frac{b_j e^{at_j}}{\delta}.$$

Используя теперь (32) и возвращаясь к $h(t)$, получим (29). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть $v(\sigma, t) = \boldsymbol{F}\{u(x, t)\}$. Тогда при каждом значении параметра $\sigma \in \boldsymbol{R}^n$, $v(\sigma, t)$—решение уравнения вида (27), где $a = P(i\sigma)$, $b_k = Q_k(i\sigma)$, $k = \overline{1, q}$, и $v(\sigma, 0) \equiv 0$. Условие (28) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{q} K(-P(i\sigma), t_j) Q_j(i\sigma) \neq 1. \tag{33}$$

Сравнивая условие (33) и формулу (17), получим, что (33) равносильно требованию $\Delta(-\sigma) \neq 0$, которое, в силу невырожденности уравнения, имеет место для почти всех $\sigma \in \boldsymbol{R}^n$. Поэтому, учитывая непрерывность $v(\sigma, t)$, заключаем, что $v(\sigma, t) \equiv 0$ и, следовательно, $u(x, t) \equiv 0$.

§ 3. Теоремы неединственности

Прежде всего, докажем следующий факт.

Теорема 6. *Пусть* $s_0 = (s_{01}, \ldots, s_{0n}) \in Z$. *Тогда существует функция* $h(t) \not\equiv 0$, $h(0) = 0$, *такая, что функция*[1] $u(x, t) = \exp\left\{i \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{s}_{0j}\right\} h(t)$ *является решением уравнения* (1).

Для доказательства следует воспользоваться леммой об обыкновенном нагруженном уравнении и учесть, что $s_0 \in Z$.

Следствие. Если уравнение (1) является невырожденным типа a, то при любом $\alpha > a$ класс $M_{F(x)}$, $F(x) = \exp\{\alpha|x|\}$, а при $a = 0$, $Z \cap \boldsymbol{R}^n \neq \varnothing$ класс $M_{F(x)}$, $F(x) = \text{const}$, не является классом единственности решения задачи Коши для (1).

Полученный в этом следствии результат показывает точность найденных в теоремах 3—5 классов единственности р. з. К. для невырожденного уравнения (1).

В случае, когда (1)—вырожденное уравнение, справедлива

Теорема 7. *Однородная задача Коши для вырожденного уравнения* (1) *имеет нетривиальные финитные* (*по* x) *решения.*

Доказательство. В силу критерия вырожденности уравнения (1), речь идет о задаче

$$\partial u(x, t)/\partial t = au(x, t) + \sum_{k=1}^{q} Q_k(\partial/\partial x) u(x, t_k), \quad u(x, 0) = 0$$

при выполнении тождества (20). Рассмотрим преобразование Фурье $v(s, t) = \boldsymbol{F}(u(x, t))$ искомого финитного решения. Функция $v(s, t)$ должна удовлетворять условию $v(s, 0) = 0$ и уравнению (27) при $b_k = Q_k(is)$, $k = \overline{1, q}$. Из (20) и леммы об обыкновенном нагруженном уравнении вытекает существование нетривиального решения $v(s, t)$ этого уравнения, обозначим $\bar{h}(s) = (v(s, t_1), \ldots, v(s, t_q))$. Согласно (30) вектор $\bar{h}(s)$ является решением однородной системы

$$\bar{h}(s) = (K(-a, t_j) Q_k(is))_{j, k=1}^{q} \bar{h}(s), \tag{34}$$

определитель которой (см. (15), (16)) $\delta_q(1, K(-a, t_1), \ldots, K(-a, t_q), Q_1(is), \ldots, Q_q(is)) \equiv 1 - \sum_{j=1}^{q} K(-a, t_j) Q_j(is) \equiv 0$. Можно, не уменьшая общности, считать $Q_1(s) \not\equiv 0$. Минор $A_{11}(s)$ матрицы системы (34), как нетрудно видеть, равен

$$A_{11}(s) \equiv 1 - \sum_{j=2}^{q} K(-a, t_j) Q_j(is) \equiv K(-a, t_1) Q_1(is).$$

[1] Черта сверху означает переход к комплексно сопряженному числу.

Итак, для тех значений s, для которых $Q_1(is) \not\equiv 0$, система (34) имеет решение вида $\overline{h}(s) = \overline{H}(s)\, h_0(s)$, где $h_0(s): \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^1$—произвольная функция, $\overline{H}(s) = \{H_1(is), \ldots, H_q(is)\}$—полиномиальная вектор-функция. Выберем $h_0(s) = \boldsymbol{F}\{g_0(x)\}$, где $g_0(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. Тогда

$$\overline{h}(s) = \boldsymbol{F}\{H_1(\partial/\partial x)\, g_0(x), \ldots, H_q(\partial/\partial x)\, g_0(x)\},$$

$$H_j(\partial/\partial x)\, g_0(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n), \quad j = \overline{1, q}, \text{ и } \overline{h}(s),$$

будучи решением (34) при тех s, для которых $Q_1(is) \neq 0$, в силу аналитичности, удовлетворяет (34) при любом $s \in \boldsymbol{C}^n$.

Из уравнения (27) можно получить

$$v(s, t) = K(-a, t) \sum_{k=1}^{q} Q_k(is)\, v(s, t_k),$$

откуда следует $u(x, t) = K(-a, t)\, R(\partial/\partial x)\, g_0(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, т. к. $g_0(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, а $R(s) = \sum_{k=1}^{q} Q_k(s)\, H_k(s)$—полином. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Искендеров А. Д. О смешанной задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа.—ДАН СССР, т. 199, № 6, 1971, с. 1237—1239.

2. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод.—Дифференц. уравнения, 1977, т. XIII, № 1, с. 105—110.

3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Обобщенные функции. Выпуск 2.—М., 1958, —307 с.

4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши.—УМН, 1953, т. 8, № 6, с. 3—54.

г. Харьков

Поступила
24 III 1979