Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №2

Владимиру Ивановичу Смирнову к его 130-летию

УСРЕДНЕНИЕ И ДВУХМАСШТАБНАЯ СХОДИМОСТЬ В СОБОЛЕВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

© В. В. ЖИКОВ, С. Е. ПАСТУХОВА

Изучается с учетом эффекта Лаврентьева двухмасштабная сходимость в пространстве Орлича–Соболева на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с ε-периодическим показателем $p_\varepsilon(x) = p(x/\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1]$. Доказана структурная теорема для двухмасштабного предела последовательности потенциальных полей ∇u^ε, принадлежащих пространству Орлича–Лебега $L^{p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$ при условии равномерной по ε ограниченности норм $\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^{p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)}$. Аналогичная структурная теорема доказана для двухмасштабного предела последовательности соленоидальных полей. Эти результаты необходимы для обоснования процедуры усреднения монотонных уравнений вида $\operatorname{div} A(x/\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) = \operatorname{div} F$, где ε-периодический по пространственной переменной символ $A(x/\varepsilon, \xi)$ удовлетворяет по ξ условиям коэрцитивности и роста степенного типа с показателем $p_\varepsilon(x)$. Подобные уравнения возникают, например, в известных моделях электрореологических и термореологических жидкостей или в модели термистора.

§1. О методах усреднения задач с нестандартными условиями коэрцитивности и роста

1.1. В ряде разделов механики и физики возникают уравнения, в которых характер нелинейности меняется от точки к точке. Эти уравнения могут отвечать вариационным постановкам, и тогда можно говорить о функционалах и соответствующих им лагранжианах с нестандартными

Ключевые слова: усреднение, двупараметрическая сходимость в пространствах с переменными показателями, структурные теоремы для двупараметрических пределов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (задание № 1.3270.2017/ПЧ).

условиями коэрцитивности и роста. Таковы, например, лагранжианы вида

$$f(x,\xi) = |\xi|^{p(x)}, \tag{1.1}$$

где $p(x)$ — измеримая функция со значениями между α и β, $1 < \alpha \leqslant \beta < \infty$. Что касается аргумента ξ, то для задач классического вариационного исчисления — это вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, пробегающий $\mathbb{R}^d$, а для задач теории упругости или гидромеханики — это симметрическая матрица $\xi = \{\xi_{ij}\}$. Соответствующие (1.1) уравнения Эйлера–Лагранжа содержат $p(\,\cdot\,)$-лапласиан. В простейшем случае, когда $p = 2$, имеем обычный лапласиан $\Delta = \operatorname{div}\nabla$. При произвольном постоянном $p > 1$ возникает p-лапласиан Δ_p, действующий по правилу $\Delta_p u = \operatorname{div}(p|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, и это правило формально остаётся в силе в случае переменного показателя p.

В задачах усреднения, связанных с периодическими структурами, лагранжиан специальным образом зависит от малого параметра ε и требуется совершить "имеющий физический смысл" предельный переход при $\varepsilon \to 0$, что составляет основную проблему усреднения.

С самого начала (т.е. с 70-ых годов прошлого века) в теории усреднения изучались, притом достаточно успешно, нелинейные задачи. Использовались различные асимптотические методы, такие как Г-сходимость, двухмасштабные разложения, компенсированная компактность (см. об этих методах, например, монографию [1] и ссылки в ней). При этом довольно долгое время удавалось усреднить только выпуклые по ξ и ε-периодические по x лагранжианы $f(x/\varepsilon, \xi)$, удовлетворяющие стандартной оценке коэрцитивности и роста

$$c_1|\xi|^\alpha - c_0 \leqslant f(y,\xi) \leqslant c_0 + c_2|\xi|^\alpha, \quad c_1 > 0,\ \alpha > 1,$$

для п.в. $y \in \mathbb{R}^d$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Обобщением стандартного класса является класс, определяемый оценкой

$$c_1|\xi|^\alpha - c_0 \leqslant f(y,\xi) \leqslant c_0 + c_2|\xi|^\beta, \quad c_1 > 0,\ 1 < \alpha < \beta < \infty,$$

в который входят степенные лагранжианы (1.1) с переменным показателем. Несмотря на конкретный и внешне простой вид, лагранжианы типа (1.1) вызывали серьезные трудности. Указанных выше асимптотических методов оказалось недостаточно. Постепенно выяснилось, что при усреднении общих лагранжианов эффективны не столько асимптотические приемы, сколько соображения теории двойственности [2, 3, 4].

1.2. В последнее время появились выходящие за рамки вариационных постановок физические модели с сильной неоднородностью, меняющей от точки к точке само уравнение состояния. К ним относятся модели термистора [5, 6], электрореологической или термореологической жидкостей

[8, 7], для усреднения которых потребовались новые методы или существенная модификация существующих. В общем случае в этих моделях участвует нелинейный переменного порядка дифференциальный оператор, более общей структуры, чем $p(\,\cdot\,)$-лапласиан. Например, здесь может быть монотонный оператор вида $\operatorname{div} A_\varepsilon$, действующий из подходящего пространства Орлича–Соболева в сопряженное пространство, где $A_\varepsilon = A(x/\varepsilon, \nabla u)$ и символ $A(y,\xi) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ есть каратеодориева вектор-функция, 1-периодическая по y и удовлетворяющая по ξ условию коэрцитивности и роста степенного вида с измеримым 1-периодическим показателем $p(y)$, а именно,

$$\begin{aligned} A(y,\xi)\cdot\xi &\geqslant c_0|\xi|^{p(y)} - 1, \quad c_0 > 0, \\ |A(y,\xi)|^{p'(y)} &\leqslant c_1|\xi|^{p(y)} + 1, \quad p'(y) = p(y)/(p(y)-1). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Усреднение подобного типа операторов изучалось в [9] и [10].

В [9] для усреднения уравнений электрореологической жидкости использовались разработанные в [11] особые приёмы перехода к пределу в обобщенных уравнениях Навье–Стокса, а также аппарат двухмасштабной сходимости. (Ранее двухмасштабная сходимость в различных версиях применялась в усреднении широко и успешно на протяжении почти тридцати лет в основном в линейной теории.) В работе [9] на показатель p в условии типа (1.2) накладываются дополнительные ограничения. Одно из них диктуется техникой двухмасштабной сходимости. Оно состоит в том, что диапазон значений функции p достаточно узок:

$$\alpha \leqslant p(y) \leqslant \beta, \quad \beta < \alpha^*, \tag{1.3}$$

где α^* — сопряженный по Соболеву показатель. Это ограничение возникало и ранее при усреднении вариационных задач векторной природы (см. [1, 2, 3])

В [10] получено усреднение краевой задачи Дирихле для эллиптического скалярного уравнения монотонного типа с учетом эффекта Лаврентьева. Оператор задачи удовлетворяет условиям коэрцитивности и роста типа (1.2) с переменным периодическим показателем $p(y)$, подчиненным двусторонней оценке $(1.3)_1$, где константы $\alpha > 1$ и $\beta > \alpha$ произвольны. При таких весьма общих условиях на $p(y)$ соответствующее задаче пространство Орлича–Соболева определено неоднозначно и можно ввести самое узкое и самое широкое пространства, обозначаемые через H и W соответственно. Пространство H определяется как замыкание гладких функций в W. Эффектом Лаврентьева принято называть несовпадение этих пространств: $H \neq W$. Им обусловлена особого рода неединственность в рассматриваемых задачах: можно выделять решения, по

крайней мере, двух типов. Это H- и W-решения, вообще говоря, не совпадающие для произвольной правой части уравнения. Любопытно заметить, что при несовпадении этих двух выделенных решений, кроме них, может существовать континуум различных между собой слабых решений. Чтобы исключить эффект Лаврентьева, достаточно потребовать log-гёльдеровость показателя p. Разные аспекты разрешимости подобного сорта нестандартных задач обсуждаются в обзоре [12].

В [10] в присутствии эффекта Лаврентьева рассматривались решения двух типов: H- и W-решения. Для каждого типа решений найдена своя процедура усреднения. Ее обоснование проведено с помощью подходящих вариантов леммы о компенсированной компактности, которые доказываются в работе. Аналогичный результат для векторных задач получается при таком же ограничения на верхнюю границу β, что выше (т.е. $\beta<\alpha^*$).

Идеи из [9] и [10] подхвачены в работе [13], где изучается усреднение систем эллиптических монотонных уравнений с условиями коэрцитивности и роста типа (1.2), в которых вместо степенной функции $|\xi|^{p(y)}$ задействована так называемая $\mathcal{N}$-функция $M(y,\xi)$, удовлетворяющая дополнительному условию типа log-гёльдеровости по пространственной переменной y. Авторы [13] декларируют о новой технике, которую они используют для обоснования заимствованной из [10] процедуры усреднения применительно к своей ситуации. Это техника объединяет одновременно двухмасштабную сходимость и так называемую модулярную сходимость.

1.3. В настоящей работе наша цель — адаптировать технику двухмасштабной сходимости для нестандартных монотонных уравнений, в том числе векторных, которые описаны в пункте 1.2. С помощью этой техники результат усреднения, аналогичный тому, что получен в [10], должен быть перенесён на векторные задачи так, чтобы отказаться от требования (1.3) достаточной узости диапазона значений показателя $p(y)$ в условии коэрцитивности и роста типа (1.2).

Итак, ориентиром для нас является задача

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A(x/\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) &= \operatorname{div} F \quad \text{в } \Omega, \\ u^\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ — неизвестная функция, $F : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times n}$ и $A : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times n} \to \mathbb{R}^{d\times n}$ даны. При этом монотонная фунция $A(y,\xi)$ того же типа, как в (1.2). От показателя $p(y)$ дополнительно требуем, чтобы было справедливо *неравенство Пуанкаре для* 1*-периодических функций из пространства Орлича–Соболева на*

ячейке периодичности (см. (2.15)). Требование выполнено, например, если показатель непрерывен, что отнюдь не обязательно (более подробно см. пункт 2.4).

Дадим некоторые пояснения, показывающие, в какой степени неоднородна рассматриваемая задача. Для каждого ε решение u^ε принадлежит зависящему от ε пространству Орлича–Соболева $W = W_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$, $p_\varepsilon(x) = p(x/\varepsilon)$, или его подпространству $H = H_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$ (см. их определения в §2) и удовлетворяет естественному интегральному тождеству на пробных функциях из того же пространства W или H соответственно. Взяв само решение как пробную функцию в этом тождестве, получим энергетическое равенство, из которого благодаря условиям корцитивности и роста вытекает равномерная по ε ограниченность градиента решения ∇u^ε и потока $z^\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon, \nabla u^\varepsilon)$:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)}\,dx \leqslant C, \qquad \int\limits_\Omega |z^\varepsilon|^{p'_\varepsilon(x)}\,dx \leqslant C.$$

Отталкиваясь от свойств равномерной ограниченности, мы доказываем структурные теоремы для двухмасштабных пределов последовательностей ∇u^ε и z^ε с учетом эффекта Лаврентьева, т.е. отслеживая тип решения u^ε. На основании этих теорем можно перейти к пределу в интегральном тождестве для исходной задачи и получить в пределе ту или иную усредненную задачу в зависимости от типа решения. Описание усредненных задач дано в [10]. В данной статье мы ограничиваемся структурными теоремами для двухмасштабной сходимости в пространствах Орлича с осциллирующим показателем $p_\varepsilon(x)$ (см. теоремы 6.3 и 6.4). Приведено более или менее автономное их доказательство, делается минимум ссылок на предыдущие результаты, хотя в задачах с постоянным показателем нелинейности $p > 1$ двухмасштабная сходимость использовалась и ранее. Кроме того, для удобства чтения в отдельный раздел собраны необходимые сведения о пространствах переменного порядка. Собственно предельный переход в задаче типа (1.4) на основе описанных выше структурных теорем предполагается подробно объяснить в последующей публикации, причем многие из необходимых приёмов и соображений отражены уже в работах [9] и [10].

Замысел этой работы возник летом 2016 года, когда законодатель в усреднении задач с нестандартными условиями роста Василий Васильевич Жиков был полон сил, творческих планов и задумок. Безвременная кончина оборвала наше многолетнее сотрудничество. Но основной массив текста из §§2–6 был в целом готов к декабрю 2016 г., Василий Васильевич успел прочитать и одобрить его. Имеющий вводный характер §1 написан

уже после ухода В. В. Жикова из жизни. Этот параграф можно рассматривать как миниобзор по его работам, относящимся к данной теме.

§2. О пространствах Орлича

Естественно обобщить классические пространства Лебега и Соболева на случай переменного показателя суммируемости. Так возникают соответствующие пространства Орлича–Лебега и Орлича–Соболева. Напомним некоторые сведения из теории этих пространств (более подробно см., например, [14, 15, 12]).

2.1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей и пусть

$$\begin{gathered} p:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R} \text{ — измеримая ограниченная функция,} \\ 1<\alpha\leqslant p(x)\leqslant\beta<\infty. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Обозначим через $L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)$ класс измеримых функций $u:\Omega\to\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$, таких, что

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,dx<\infty.$$

Наделив класс нормой

$$\|u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)}=\inf\Big\{\lambda>0:\int\limits_\Omega|\lambda^{-1}u|^{p(x)}dx\leqslant 1\Big\}\quad\text{(норма Люксембурга)},\tag{2.2}$$

получим рефлексивное банахово пространство. Вложение

$$L^\beta(\Omega)^n\subset L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)\subset L^\alpha(\Omega)^n$$

вытекает из двусторонней оценки

$$\int\limits_\Omega(|u(x)|^\alpha-1)\,dx\leqslant\int\limits_\Omega|u(x)|^{p(x)}\,dx\leqslant\int\limits_\Omega(1+|u(x)|^\beta)\,dx.\tag{2.3}$$

Если конечен функционал $\int\limits_\Omega|u(x)|^{p(x)}\,dx$, точная нижняя грань в (2.2) достигается, т.е.

$$\|u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)}=\lambda\Longleftrightarrow\int\limits_\Omega\left|\lambda^{-1}u\right|^{p(x)}\,dx=1.$$

Отсюда вытекают *свойство единичного шара*

$$\|u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)}\leqslant 1\Longleftrightarrow\int\limits_\Omega|u|^{p(x)}\,dx\leqslant 1,$$

а также соотношения

$$\|u\|^{\alpha}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} - 1 \leqslant \int\limits_{\Omega} |u|^{p(x)}\,dx \leqslant \|u\|^{\beta}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + 1, \tag{2.4}$$

означающие, что эквивалентны два понятия ограниченности: в смысле интегрального функционала $\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx$ и в смысле соответствующей ему нормы Люксембурга.

Сходимость в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ также можно понимать двояко, по норме и в смысле интегрального функционала:

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \to 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{\Omega} |u^\varepsilon - u|^{p(x)}\,dx \to 0. \tag{2.5}$$

Это следует из того, что

$$\|u\|^{\beta}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\Omega} |u|^{p(x)}\,dx \leqslant \|u\|^{\alpha}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, \qquad \text{если } \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1. \tag{2.6}$$

Известно, что сопряженным к $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ будет пространство $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, где $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ — сопряженный по Гёльдеру показатель, который вычисляется поточечно. В силу неравенства (2.1), имеем

$$1 < \beta' \leqslant p'(x) \leqslant \alpha' < \infty, \tag{2.7}$$

где верхняя и нижняя границы – сопряженные по Гёльдеру показатели к α и β.

Учитывая двустороннюю оценку (2.7), для функций из пространства $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ имеем аналогичное (2.6) утверждение, а именно,

$$\|u\|^{\alpha'}_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\Omega} |u|^{p'(x)}\,dx \leqslant \|u\|^{\beta'}_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}, \qquad \text{если } \|u\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1. \tag{2.8}$$

Справедливо неравенство Гёльдера

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot u\,dx \leqslant 2\|v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\|u\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.9}$$

(константа здесь загрублена и заведомо не точна).

2.2. Теперь определим пространство Орлича–Соболева

$$W = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)}\,dx < \infty\} \tag{2.10}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Здесь и далее $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ $(\gamma \geqslant 1)$ — пространство Соболева функций, определенных в области Ω и имеющих нулевой след на границе $\partial\Omega$.

Известно, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ не плотно в $W_0^{1,p(\,\cdot\,)}(\Omega)$, вообще говоря. Поэтому естественно возникает ещё одно пространство Орлича–Соболева

$$H = H_0^{1,p(\,\cdot\,)}(\Omega) \quad \text{— замыкание } C_0^\infty(\Omega) \text{ в } W. \tag{2.12}$$

В общем случае $H \neq W$ и, если $\operatorname{codim}_W H > 1$, существуют пространства Орлича–Соболева V, промежуточные между H и W, $H \subset V \subset W$.

Важно знать, когда $H = W$. Для этого требуются довольно тонкие свойства показателя p; например, одной непрерывности недостаточно. Однако, если показатель обладает логарифмическим модулем непрерывности, т.е.

$$|p(x) - p(x')| \leqslant \frac{k}{\ln(1/|x - x'|)}, \quad x, x' \in \Omega,\ |x - x'| \leqslant \frac{1}{2},$$

то $H = W$, см. [16, 17, 12].

2.3. Аналогично можно ввести пространство Орлича–Лебега $L^{p(\,\cdot\,)}(\square)$ периодических функций с ячейкой периодичности $\square = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$, норму Люксембурга $\|u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\square)}$ определяем так же, как в (2.2), заменив Ω на $\square$.

Пространства Орлича–Соболева на ячейке $\square$ (широкое и узкое) определяются как подпространства обычного пространства Соболева 1-периодических функций $W^{1,1}(\square)$:

$$\begin{gathered} W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square) = \Big\{ u \in W^{1,1}(\square) : \int\limits_{\square} |\nabla u(y)|^{p(y)}\, dy < \infty, \ \int\limits_{\square} u(y)\, dy = 0 \Big\}, \\ H^{1,p(\,\cdot\,)}(\square) \quad \text{— замыкание } C^\infty_{\mathrm{per}}(\square) \text{ в } W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square), \end{gathered} \tag{2.13}$$

при этом вводится норма

$$\|u\|_{W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square)} = \|\nabla u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\square)}.$$

В общем случае $H^{1,p(\,\cdot\,)}(\square) \neq W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square)$.

2.4. Из определения пространства Орлича–Соболева (см. (2.10), (2.11)) следует, что вложение его в пространство Орлича–Лебега с тем же показателем p находится под вопросом. Вложение $W_0^{1,p(\,\cdot\,)}(\Omega) \subset L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)$ имеет место, если выполнено неравенство Фридрихса

$$\|u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)} \leqslant C_F \|\nabla u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)}, \quad u \in W_0^{1,p(\,\cdot\,)}(\Omega). \tag{2.14}$$

Аналогично, для пространств периодических функций имеем вложение пространств $W^{1,p(\cdot)}(\square) \subset L^{p(\cdot)}(\square)$, если выполнено неравенство Пуанкаре

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\square)} \leqslant C_P \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\square)}, \quad u \in W^{1,p(\cdot)}(\square). \tag{2.15}$$

В свою очередь, неравенство (2.14) гарантировано (см., например, [12] или [14]), если показатель p непрерывен на $\overline{\Omega}$. Более того, можно допустить разрывный показатель, но тогда должно быть достаточно малым колебание p на Ω — величина $\operatorname{osc}_\Omega p$. Последнее условие можно расширить, допуская конечное разбиение области Ω на подобласти Ω_i, так что достаточно малы колебания $\operatorname{osc}_{\Omega_i} p$. Аналогично выглядят условия на периодический показатель $p \in L^\infty(\square)$, которые обеспечивают неравенство Пуанкаре (2.15).

§3. Двухмасштабная сходимость в пространстве $L^1(\Omega)$

3.1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $\mathcal{M}(\Omega)$ множество конечных борелевых мер на замыкании $\overline{\Omega}$. Изучим ограниченную в $L^1(\Omega) = L^1(\Omega, dx)$ (dx – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$) последовательность функций u^ε,

$$\int\limits_\Omega |u^\varepsilon|\, dx \leqslant K < \infty. \tag{3.1}$$

Напомним типы слабой сходимости для последовательности функций из $L^1(\Omega)$.

Последовательность функций u^ε слабо сходится к функции $u \in L^1(\Omega)$, $u^\varepsilon \rightharpoonup u$, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega u^\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx \tag{3.2}$$

для любой пробной функции $\varphi \in L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$.

Последовательность функций u^ε (слабо) сходится к мере $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, $u^\varepsilon\, dx \rightharpoonup d\mu$, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega u^\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega \varphi(x)\, d\mu \tag{3.3}$$

для любой пробной функции $\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

Согласно известному принципу компактности [18], при условии (3.1) найдётся подпоследовательность $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ такая, что $u^{\varepsilon'}$ сходится к некоторой мере $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Компактность в смысле слабой сходимости (3.2) не гарантирована условием ограниченности (3.1) и наблюдается только при выполнении дополнительных условий.

Теорема 3.1 (см. [19, гл. VIII]). *При условии* (3.1) *эквивалентны утверждения:*

(i) *из последовательности* u^ε *можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции* $u \in L^1(\Omega)$*;*

(ii) $\forall \tau{>}0\ \exists \nu{>}0$, *такое, что* $\int_B |u^\varepsilon|\,dx \leqslant \tau$ *равномерно по* ε *для любого измеримого множества* B *с мерой Лебега* $|B| \leqslant \nu$.

Свойство (ii) называется равностепенной интегрируемостью.

Приведём некоторые примеры.

1° Единичный куб $\square = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ является ячейкой периодичности 1-периодических функций, заданных на $\mathbb{R}^d$. Пусть

$$\langle\,\cdot\,\rangle = \int\limits_{\square} \cdot\, dy - \text{ среднее по ячейке.}$$

Через $L^\alpha(\square)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, обозначаем пространство Лебега 1-периодических функций.

Напомним *свойство среднего значения периодической функции*:

$$\begin{aligned} &\text{если } b \in L^\alpha(\square)\,(1 \leqslant \alpha < \infty), \quad b_\varepsilon(x) = b(x/\varepsilon), \\ &\text{то } b_\varepsilon \rightharpoonup \langle b\rangle \text{ в } L^\alpha(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Кроме того,

$$\int\limits_B |b_\varepsilon|^\alpha\, dx \leqslant 2|B|\langle |b|^\alpha\rangle \tag{3.5}$$

для достаточно малых ε. Здесь B — любое измеримое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$. Утверждения (3.4) и (3.5) доказаны, например, в [1, гл. I, §1].

В силу (3.4), пример слабо сходящейся последовательности в $L^1(\Omega)$ даёт функция $b_\varepsilon(x) = b(\frac{x}{\varepsilon})$, $b \in L^1(\square)$. Равностепенная интегрируемость этой последовательности вытекает из неравенства (3.5) при $\alpha = 1$.

2° Теперь пусть

$$b_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} b\Big(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\Big), \quad b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} b\, dx = 1, \quad x_0 \in \Omega, \quad \varepsilon{>}0.$$

Тогда $b_\varepsilon(x)$ есть так называемая дельта-образная последовательность: $b_\varepsilon(x)\,dx \rightharpoonup d\mu$ при $\varepsilon \to 0$, $d\mu = \delta(x - x_0)\,dx$, где $\delta(x - x_0)$ — сосредоточенная в точке x_0 дельта-функция. Очевидно, что равностепенной интегрируемости здесь нет.

3.2. Введём двухмасштабную сходимость последовательности $u^\varepsilon \in L^1(\Omega)$, обобщающую обычную сходимость в смысле мер (см. (3.3)). Далее обозначаем через S пространство функций $\psi(x,y)$, $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \mathbb{R}^d$, которые 1-периодичны по y и непрерывны по совокупности переменных, с естественной нормой $\|\cdot\|_S = \|\cdot\|_{C(\overline{\Omega}\times\square)}$. Иными словами, S — это пространство непрерывных функций на декартовом произведении компакта $\overline{\Omega}$ и d-мерного тора. Через $\mathcal{M}\,(\Omega\times\square)$ обозначаем пространство конечных борелевых мер на произведении $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^d$, 1-периодических по второму аргументу.

Определение 3.2. *Скажем, что последовательность u^ε слабо двухмасштабно сходится к мере $\mu \in \mathcal{M}\,(\Omega\times\square)$, $u^\varepsilon(x)\,dx \overset{2}{\rightharpoonup} d\mu(x,y)$, если*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)u^\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_\Omega\int\limits_\square \psi(x,y)\,d\mu(x,y) \tag{3.6}$$

для любой пробной функции $\psi \in S$.

Типичный пример пробной функции в (3.6) — это произведение $\varphi(x)b(y)$, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $b \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$ или конечная сумма подобного сорта произведений $\sum_i \varphi_i(x)b_i(y)$. В частности, взяв в качестве пробной не зависящую от y функцию $\varphi(x)$, получим предел в смысле сходимости мер $u^\varepsilon(x)\,dx \rightharpoonup d\mu^0(x)$ (см. (3.3)) для некоторой меры $\mu^0 \in \mathcal{M}\,(\Omega)$. Сравнивая этот предел с двухмасштабным, имеем

$$\int\limits_\Omega \varphi(x)\,d\mu^0(x) = \int\limits_\Omega \varphi(x)\int\limits_\square d\mu(x,y),$$

откуда $d\mu^0(x) = \int_\square d\mu(x,y)$.

Справедлив следующий принцип компактности.

Предложение 3.3. *Всякая ограниченная в $L^1(\Omega)$ последовательность содержит слабо двухмасштабно сходящуюся подпоследовательность, пределом которой является мера из $\mathcal{M}\,(\Omega\times\square)$.*

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{S}$ счетное всюду плотное в S множество и изучим функционал

$$I_\varepsilon(\psi) = \int\limits_\Omega u^\varepsilon(x)\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx$$

для фиксированной функции $\psi \in \widetilde{S}$. Поскольку

$$|I_\varepsilon(\psi)| \leqslant \max_{x\in\overline{\Omega}}\Big|\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|\int\limits_\Omega |u^\varepsilon(x)|\,dx \overset{(3.1)}{\leqslant} K\max_{\overline{\Omega}\times\square}|\psi(x,y)|, \tag{3.7}$$

последовательность $I_\varepsilon(\psi)$ ограничена. По некоторой подпоследовательности (обозначаем её по-прежнему через ε) имеется сходимость $I_\varepsilon(\psi) \to I(\psi)$ для любой функции $\psi \in \widetilde{S}$. Верна вытекающая из (3.7) оценка

$$|I(\psi)| \leqslant K \max_{\overline{\Omega}\times\square} |\psi(x,y)|.$$

Существование такой подпоследовательности устанавливается с помощью канторовского диагонального процесса. Полученный функционал $I(\psi)$ непрерывен по $\psi \in \widetilde{S}$ в норме $\|\cdot\|_S$, его можно продолжить по непрерывности на всё пространство S и задать с помощью некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}$ $(\Omega \times \square)$,

$$I(\psi) = \int\limits_\Omega \int\limits_\square \psi(x,y)\, d\mu(x,y). \tag{3.8}$$

Ввиду плотности $\widetilde{S}$ в S имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega u^\varepsilon(x)\psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\psi) = I(\psi) = \int\limits_\Omega \int\limits_\square \psi(x,y)\, d\mu(x,y), \quad \psi \in S.$$

Получено предельное соотношение (3.6), означающее сходимость

$$u^\varepsilon(x)\, dx \overset{2}{\rightharpoonup} d\mu(x,y). \qquad \square$$

§4. Двухмасштабная сходимость в $L^\alpha(\Omega)$ при $\alpha>1$

4.1. Будем различным способом усиливать условие ограниченности (3.1) на последовательность u^ε с тем, чтобы в представлении (3.8) возникла абсолютно непрерывная мера. Сначала предположим, что u^ε ограничена в $L^\alpha(\Omega)$, $1<\alpha<\infty$, т.е.

$$\int\limits_\Omega |u^\varepsilon|^\alpha\, dx \leqslant K < \infty. \tag{4.1}$$

Тогда помимо оценки (3.7) для функционала $I_\varepsilon(\psi)$ можно утверждать (по неравенству Гёльдера и в силу (4.1)), что

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon(\psi)| &\leqslant \Big(\int\limits_\Omega |u^\varepsilon(x)|^\alpha\, dx\Big)^{\frac{1}{\alpha}} \Big(\int\limits_\Omega \Big|\psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^{\alpha'} dx\Big)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ &\leqslant K^{\frac{1}{\alpha}} \Big(\int\limits_\Omega \Big|\psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^{\alpha'} dx\Big)^{\frac{1}{\alpha'}}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

и в пределе вывести

$$|I(\psi)| \leqslant K^{\frac{1}{\alpha}} \Bigg(\int\limits_{\Omega} \int\limits_{\square} |\psi(x,y)|^{\alpha'} \, dx \, dy \Bigg)^{\frac{1}{\alpha'}}. \tag{4.3}$$

Здесь мы воспользовались *свойством среднего значения* в следующей форме:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} \Phi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \, dx = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\square} \Phi(x,y) \, dx \, dy \tag{4.4}$$

для любой $\Phi \in S$. Это — некоторое обобщение упомянутого выше (см. (3.4)) свойства среднего значения периодической функции. Участвующие в (4.4) функции называют локально-периодическими. Свойство среднего значения в форме (4.4) и даже в более общей форме будет обсуждаться ниже (см. лемму 4.1).

Оценка (4.3) показывает, что $I(\psi)$ — функционал, непрерывный относительно нормы $\|\cdot\|_{L^{\alpha'}(\Omega\times\square)}$. Поскольку множество S плотно в $L^{\alpha'}(\Omega \times \square)$, функционал $I(\psi)$, изначально определенный на S, продолжается на $L^{\alpha'}(\Omega \times \square)$ с сохранением оценки (4.3). При этом функционал допускает представление

$$I(\psi) = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\square} \psi(x,y) u(x,y) \, dx \, dy \tag{4.5}$$

для некоторой $u \in L^{\alpha}(\Omega \times \square)$.

Из (3.8) и (4.5) получаем $d\mu = u(x,y) \, dx \, dy$, т.е. мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $dx \, dy$ с плотностью $u(x,y)$ из $L^{\alpha}(\Omega\times\square)$.

Таким образом, при условии (4.1) общее определение 3.2 приводит к слабой двухмасштабной сходимости в пространстве $L^{\alpha}(\Omega)$ с показателем $1<\alpha<\infty$, (она изучалась, например, в [22], а при $\alpha = 2$ в [20, 21]),

$$u^{\varepsilon}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} u(x,y) \quad \text{в } L^{\alpha}(\Omega), \tag{4.6}$$

где предельный элемент $u \in L^{\alpha}(\Omega \times \square)$, а соотношение (3.6) принимает форму

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) u^{\varepsilon}(x) \, dx = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\square} \psi(x,y) u(x,y) \, dx \, dy, \quad \psi \in S. \tag{4.7}$$

Двухмасштабная сходимость (4.7) влечет следующие простейшие свойства:

$$u^{\varepsilon}(x) \rightharpoonup \langle u(x, \cdot\,) \rangle \quad \text{в} \quad L^{\alpha}(\Omega), \tag{4.8}$$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon}(x)|^{\alpha}\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\square}|u(x,y)|^{\alpha}\,dx\,dy. \tag{4.9}$$

4.2. Введём условие ограниченности, аналогичное по форме (4.1) и вместе с тем более сильное, с переменным показателем суммируемости

$$p\in C(\overline{\Omega}),\quad 1<\alpha\leqslant p(x)\leqslant\beta<\infty, \tag{4.10}$$

а именно,

$$\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon}(x)|^{p(x)}\,dx\leqslant K<\infty. \tag{4.11}$$

Очевидно, что из (4.11) следует ограниченность типа (4.1) в силу соотношения (2.3). Более сильное условие ограниченности (4.11) определяет для предельного элемента в (4.6) более сильное условие суммируемости, чем указанное ранее. В самом делее, функционал $I_{\varepsilon}(\psi)$, $\psi\in S$ оценим, используя неравенство Юнга,

$$I_{\varepsilon}(\psi)=\int\limits_{\Omega}u^{\varepsilon}(x)\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx\leqslant\int\limits_{\Omega}\frac{|u^{\varepsilon}(x)|^{p(x)}}{p(x)}\,dx+\int\limits_{\Omega}\frac{|\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})|^{p'(x)}}{p'(x)}\,dx. \tag{4.12}$$

Применяя к первому слагаемому последней суммы оценку (4.11), а ко второму — свойство среднего значения (4.4), имеем для предельного функционала

$$I(\psi)\overset{(4.10)}{\leqslant}\frac{1}{\alpha}K+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\square}\frac{|\psi(x,y)|^{p'(x)}}{p'(x)}\,dx\,dy.$$

Полученная оценка показывает, что функционал $I(\psi)$, изначально заданный на $\psi\in S$, по непрерывности продолжается с плотного множества S на всё пространство Лебега–Орлича $L^{p'(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)$, состоящее из функций $\psi(x,y)$ с конечным интегралом

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\square}|\psi(x,y)|^{p'(x)}\,dx\,dy.$$

Поэтому $I(\psi)$ допускает представление (4.5), в котором функция u принадлежит пространству $L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)$, сопряженному к $L^{p'(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)$.

Таким образом, при условии ограниченности (4.11) получили двухмасштабную сходимость $u^{\varepsilon}(x)\overset{2}{\rightharpoonup}u(x,y)$ в $L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)$ с предельным элементом $u\in L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)$. Здесь переменный показатель зависит от одной только первой переменной, $p=p(x)$.

4.3. Теперь изучим двухмасштабную сходимость последовательности $u^\varepsilon(x)$, подчиненной условию ограниченности с осциллирующим показателем суммируемости,

$$\int\limits_\Omega |u^\varepsilon(x)|^{p_\varepsilon(x)}\,dx \leqslant K < \infty, \tag{4.13}$$

где

$$\begin{aligned} &p_\varepsilon(x) = p(\varepsilon^{-1}x), \quad p(y) \text{ — измеримая 1-периодическая функция,} \\ &\quad 1 < \alpha \leqslant p(y) \leqslant \beta < \infty. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Так же, как в (4.12), с помощью неравенства Юнга запишем оценку

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\psi) &= \int\limits_\Omega u^\varepsilon(x)\psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx \leqslant \int\limits_\Omega \frac{|u^\varepsilon(x)|^{p_\varepsilon(x)}}{p_\varepsilon(x)}\,dx + \int\limits_\Omega \frac{|\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})|^{p'_\varepsilon(x)}}{p'_\varepsilon(x)}\,dx \\ &\overset{(4.13)}{\leqslant} \frac{1}{\alpha}K + \int\limits_\Omega \frac{|\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})|^{p'_\varepsilon(x)}}{p'_\varepsilon(x)}\,dx, \quad \psi \in S, \quad p'_\varepsilon(x) = \frac{p_\varepsilon(x)}{p_\varepsilon(x) - 1}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Для предельного перехода в последнем интеграле применим свойство среднего значения в следующей наиболее общей форме.

Напомним, что функция $\Phi(x, y)$, заданная на $\Omega \times \square$ называется *каратеодориевой*, если выполнены два условия: $\Phi(x, y)$ непрерывна по $x \in \Omega$ для п.в. $y \in \square$; $\Phi(x, y)$ измерима по $y \in \square$ при каждом $x \in \Omega$. Из этих условий вытекает, что суперпозиция $\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ есть измеримая функция.

Лемма 4.1 ([22, Лемма 3.1]). *Если каратеодориева функция $\Phi(x, y)$ 1-периодична по y и удовлетворяет оценке $|\Phi(x, y)| \leqslant \Phi_0(y)$ для некоторой $\Phi_0 \in L^1_{\mathrm{per}}(\square)$, то имеет место предельное соотношение* (4.4).

Функцию $\Phi(x, y)$ из леммы 4.1 будем называть *допустимой*. Допустимыми являются функции $\Phi \in S$, и этим обстоятельством мы воспользовались ранее в п. 4.1.

По лемме 4.1 выводим из (4.15) оценку для предельного функционала

$$I(\psi) = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(\psi) \leqslant \frac{1}{\alpha}K + \int\limits_\Omega \int\limits_\square \frac{|\psi(x, y)|^{p'(y)}}{p'(y)}\,dx\,dy, \quad \psi \in S,$$

(здесь допустимой будет функция $\frac{|\psi(x,y)|^{p'(y)}}{p'(y)} \leqslant \frac{1}{\beta'}(1 + m^{\alpha'})$, где $m = \max_{\overline{\Omega} \times \square} |\psi(x, y)|$, в силу неравенств из (4.14)). Это означает, что функционал $I(\psi)$, изначально заданный на $\psi \in S$, по непрерывности может быть продолжен с плотного множества S на всё пространство Лебега–Орлича

$L^{p'(\cdot)}(\Omega\times\square)$ с переменным периодическим показателем $p'=p'(y)$. Поэтому $I(\psi)$ допускает представление (4.5), в котором u — некоторый элемент из сопряженного к $L^{p'(\cdot)}(\Omega\times\square)$ пространства $L^{p(\cdot)}(\Omega\times\square)$, $p=p(y)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Пусть последовательность $u^\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию ограниченности* (4.13). *Тогда (быть может, после перехода к подпоследовательности) имеет место двухмасштабная сходимость*

$$\begin{gathered} u^\varepsilon(x) \xrightharpoonup{2} u(x,y) \quad \text{в } L^\alpha(\Omega), \\ u\in L^{p(\cdot)}(\Omega\times\square), \quad p=p(y), \end{gathered} \tag{4.16}$$

в частности, справедливо предельное соотношение (4.7).

Дальнейшая наша задача — расширить множество пробных функций в предельном соотношении (4.7) для двухмасштабной сходимости при условии (4.13).

Предложение 4.3. *Если $\varphi\in C(\overline{\Omega})$, $b\in L^{p(\cdot)}(\square)$, $b_\varepsilon(x)=b\bigl(\frac{x}{\varepsilon}\bigr)$, то $b_\varepsilon\varphi\in L^{p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$ и*

$$\|b_\varepsilon\varphi\|^\alpha_{L^{p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)}\leqslant c(\|b\|^\beta_{L^{p(\cdot)}(\square)}+1), \quad c=\mathrm{const}(\beta,\Omega,\varphi). \tag{4.17}$$

Доказательство. Применяя неравенство (3.5) к 1-периодической функции $w(y)=|b(y)|^{p(y)}$, $w\in L^1(\square)$, имеем

$$\int\limits_\Omega |b_\varepsilon\varphi|^{p_\varepsilon(x)}\,dx\leqslant C\int\limits_\Omega |b_\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)}\,dx\leqslant 2C|\Omega|\int\limits_\square |b(y)|^{p(y)}\,dy,$$

где $C=(\max_{\overline{\Omega}}|\varphi|)^\beta+1$. Отсюда в силу сооношений типа (2.4) следует оценка (4.17). $\square$

Предложение 4.4. *Пусть последовательность $u^\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию ограниченности* (4.13) *и имеет место двухмасштабная сходимость* (4.16). *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_\Omega u^\varepsilon(x)\Phi\Bigl(x,\frac{x}{\varepsilon}\Bigr)\,dx=\int\limits_\Omega\int\limits_\square u(x,y)\Phi(x,y)\,dx\,dy, \tag{4.18}$$

если $\Phi(x,y)=\varphi(x)b(y)$, где $\varphi\in C(\overline{\Omega})$ и $b\in L^{p'(\cdot)}(\square)$.

Доказательство. Сначала заметим, что оба интеграла в (4.18) конечны, в силу неравенства Гёльдера для пространств Орлича (см. (2.9)). При этом в допредельном интеграле имеем $\Phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\in L^{p'_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, если учесть

структуру функции $\Phi(x,y)$ и предложение 4.3 (точнее, его аналог с функцией b из $L^{p'(\,\cdot\,)}(\square)$).

Чтобы доказать соотношение (4.18) на пробной функции

$$\Phi(x,y)=\varphi(x)b(y)$$

указанного типа, найдем такие $b^\delta\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$, что

$$\int\limits_{\square}|b(y)-b^\delta(y)|^{p'(y)}\,dy\leqslant\delta,$$

где $\delta>0$ сколь угодно мало. Запишем представление

$$\begin{aligned}
I(\varepsilon)&:=\int\limits_{\Omega}u^\varepsilon(x)\Phi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\square}u(x,y)\Phi(x,y)\,dx\,dy\\
&=\int\limits_{\Omega}u^\varepsilon(x)\varphi(x)\Big(b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)-b^\delta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,dx\\
&\qquad+\Big[\int\limits_{\Omega}u^\varepsilon(x)\varphi(x)b^\delta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,dx-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\square}u(x,y)\varphi(x)b^\delta(y)\,dx\,dy\Big]\\
&\qquad+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\square}u(x,y)\varphi(x)(b^\delta(y)-b(y))\,dx\,dy\\
&=:I_1(\varepsilon)+I_2(\varepsilon)+I_3.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

Наша цель — показать, что $\lim_{\varepsilon\to0}I(\varepsilon)=0$.

К интегралам $I_1(\varepsilon)$ и I_3 применим неравенства Гёльдера типа (2.9). Например,

$$|I_3|\leqslant2c_\varphi\|u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)}\|b^\delta-b\|_{L^{p'(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)},\quad c_\varphi=\mathrm{const}(\varphi).$$

Используя ненравенства типа (2.8) для нормы пространства $L^{p'(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)$, имеем

$$\begin{aligned}
\|b^\delta-b\|^{\alpha'}_{L^{p'(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)}&\leqslant\int\limits_{\Omega\times\square}|b^\delta(y)-b(y)|^{p'(y)}\,dx\,dy\\
&=|\Omega|\int\limits_{\square}|b^\delta(y)-b(y)|^{p'(y)}\,dy\leqslant|\Omega|\delta
\end{aligned}$$

в силу выбора b^δ. Аналогично оцениваем интеграл $I_1(\varepsilon)$:

$$|I_1(\varepsilon)| \leqslant 2c_\varphi \|u^\varepsilon\|_{L^{p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)} \|b^\delta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) - b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\|_{L^{p'_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)},$$

$$\Big\|b^\delta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) - b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big\|^{\alpha'}_{L^{p'_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)} \leqslant \int\limits_\Omega \Big|b^\delta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) - b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^{p'(\frac{x}{\varepsilon})}\,dx.$$

Возвращаясь к (4.19), из приведенных выше оценок и в силу условия ограниченности (4.13), выводим

$$|I(\varepsilon)| \leqslant c\Big(\int\limits_\Omega \Big|b^\delta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) - b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^{p'(\frac{x}{\varepsilon})}\,dx\Big)^{\frac{1}{\alpha'}} + |I_2(\varepsilon)| + c\delta^{\frac{1}{\alpha'}},$$

$$c = \mathrm{const}(K, \Omega, \varphi, \|u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)}).$$

По лемме 4.1 и выбору b^δ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \Big|b^\delta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) - b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^{p'(\frac{x}{\varepsilon})}\,dx = |\Omega|\int\limits_\square |b^\delta(y) - b(y)|^{p'(y)}\,dy \leqslant |\Omega|\delta,$$

а по определению двухмасштабной сходимости $\lim_{\varepsilon\to 0} I_2(\varepsilon) = 0$.

Суммируя полученные результаты, имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|I(\varepsilon)| \leqslant C\delta^{\frac{1}{\alpha'}}, \quad C = \mathrm{const}(K, \Omega, \varphi, \|u\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega\times\square)}),$$

и в силу произвольной малости δ получаем соотношение (4.18), что и требовалось. $\square$

§5. Двухмасштабная сходимость в пространствах Соболева

5.1. Сначала введём специальные пространства вектор-функций.

Назовём $z\in L^1(\Omega)^d$ соленоидальной, и в этом случае пишем

$$\operatorname{div} z = \operatorname{div}_x z = 0,$$

если

$$\int\limits_\Omega z\cdot\nabla\varphi\,dx = 0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Аналогично, назовём 1-периодическую вектор-функцию $z \in L^1(\square)^d$, $\square = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ — ячейка периодичности, соленоидальной (пишем $\operatorname{div}_y z = 0$), если

$$\langle z\cdot\nabla\varphi\rangle = \int\limits_\square z\cdot\nabla\varphi\,dy = 0 \quad \forall\varphi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square).$$

Напомним введенное ранее обозначение для среднего по ячейке $\langle\,\cdot\,\rangle = \int\limits_\square \cdot\,dy$.

Пусть $W^{1,\alpha}(\square)$ $(1<\alpha<\infty)$ — замыкание множества $C^\infty_{\rm per}(\square)$ по норме $\|u\|_{W^{1,\alpha}(\square)} = \langle |u|^\alpha + |\nabla u|^\alpha\rangle^{\frac{1}{\alpha}}$. Отметим неравенство Пуанкаре

$$\langle |u|^\alpha\rangle \leqslant c_P\langle |\nabla u|^\alpha\rangle, \quad u\in W^{1,\alpha}(\square), \quad \langle u\rangle = 0, \tag{5.1}$$

благодаря которому можно задать норму на подпространстве

$$\{u\in W^{1,\alpha}(\square):\ \langle u\rangle = 0\}$$

выражением $\langle |\nabla u|^\alpha\rangle^{\frac{1}{\alpha}}$ и это подпространство отождествить с пространством потенциальных векторов

$$V^\alpha_{\rm pot}(\square) = \{\nabla u:\ u\in W^{1,\alpha}(\square)\}. \tag{5.2}$$

Неравенство Пуанкаре (5.1) гарантирует следующие свойства:

i) $V^\alpha_{\rm pot}(\square)$ замкнуто в $L^\alpha(\square)^d$;
более того

ii) $V^\alpha_{\rm pot}(\square)$ совпадает с замыканием множества $\{\nabla u:\ u\in C^\infty_{\rm per}(\square)\}$ в $L^\alpha(\square)^d$.

Очевидно, что любой вектор $v\in V^\alpha_{\rm pot}(\square)$ имеет нулевое среднее, $\langle v\rangle = 0$.

Пусть $V^\beta_{\rm sol}(\square)$ — множество всех соленоидальных периодических векторов, принадлежащих $L^\beta(\square)^d$. Из определения соленоидального вектора получаем, что

$$V^\alpha_{\rm pot}(\square)^\perp = V^{\alpha'}_{\rm sol}(\square) \tag{5.3}$$

в смысле двойственности пространств $L^\alpha(\square)^d$ и $L^{\alpha'}(\square)^d$, $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Заметим также, что

$$(V^\alpha_{\rm pot}(\square)\oplus\mathbb{R}^d)^\perp = \{z\in V^{\alpha'}_{\rm sol}(\square):\ \langle z\rangle = 0\}. \tag{5.4}$$

5.2. Изучим двухмасштабные пределы, связанные с последовательностями функций из соболевского пространства $W^{1,\alpha}(\Omega)$ $(\alpha>1)$. Пусть последовательность u^ε ограничена в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, т.е.

$$\int\limits_\Omega (|u^\varepsilon|^\alpha + |\nabla u^\varepsilon|^\alpha)\,dx \leqslant K < \infty, \tag{5.5}$$

и пусть (быть может, после перехода к подпоследовательности)

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad u^\varepsilon \to u \text{ в } L^\alpha(\Omega), \quad \nabla u^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} z(x,y) \text{ в } L^\alpha(\Omega)^d. \tag{5.6}$$

Предложение 5.1. *В предположениях* (5.5), (5.6) *справедливы соотношения*

$$\nabla u^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} \nabla u(x) + v(x,y), \quad v(x,y)\in L^\alpha(\Omega, V^\alpha_{\rm pot}(\square)), \tag{5.7}$$

иными словами, найдется такая $U \in L^\alpha(\Omega, W^{1,\alpha}(\square))$, *что*

$$\nabla u^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} \nabla u(x) + \nabla_y U(x,y).$$

Доказательство. Взяв произвольные

$$\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad b \in V_{\mathrm{sol}}^{\alpha'}(\square), \quad \langle b \rangle = 0, \tag{5.8}$$

изучим интеграл

$$I(\varepsilon) = \int\limits_\Omega \nabla u^\varepsilon \cdot b_\varepsilon \varphi \, dx = \int\limits_\Omega \nabla(u^\varepsilon \varphi) \cdot b_\varepsilon \, dx - \int\limits_\Omega u^\varepsilon \nabla\varphi \cdot b_\varepsilon \, dx =: I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon), \tag{5.9}$$

где $b_\varepsilon(x) = b(\frac{x}{\varepsilon})$. Используем следующее свойство соленоидального вектора b:

$$\int\limits_\square b(y) \cdot \nabla\eta(y) \, dy = 0 \quad \forall \eta \in C_{\mathrm{per}}^\infty(\square) \Longrightarrow \int\limits_\Omega b_\varepsilon(x) \cdot \nabla\eta(x) \, dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

По замыканию последнее равенство распространяется на пробные функции из $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Отсюда заключаем, что в (5.9) $I_1(\varepsilon) = 0$, так как $u^\varepsilon \varphi \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Далее, учитывая слабую сходимость $b_\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $L^{\alpha'}(\Omega)$ (см. (3.4)) и сильную сходимость $u^\varepsilon \to u$ в $L^\alpha(\Omega)$ (см. (5.6)), находим $\lim_{\varepsilon\to 0} I_2(\varepsilon) = 0$.

В итоге, переходя к пределу в (5.9), получаем $\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = 0$. С другой стороны, двухмасштабная сходимость $\nabla u^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} z(x,y)$ означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \int\limits_\Omega \int\limits_\square z(x,y) b(y) \varphi(x) \, dx \, dy.$$

Отсюда

$$0 = \int\limits_\Omega \int\limits_\square z(x,y) b(y) \varphi(x) \, dx \, dy$$

и в силу выбора φ и b (см. (5.8)) имеем

$$0 = \int\limits_\square z(x,y) b(y) \, dy \Longrightarrow z(x,\,\cdot\,) \in V_{\mathrm{pot}}^\alpha(\square) \oplus \mathbb{R}^d,$$

где на последнем шаге использовано соотношение ортогональности (5.4).

В соответствии с полученной структурой вектора $z(x,\,\cdot\,)$ запишем разложение

$$z(x,y) = \langle z(x,\,\cdot\,) \rangle + v(x,y), \; v(x,y) \in L^\alpha(\Omega, V_{\mathrm{pot}}^\alpha(\square)).$$

Поскольку $\langle v(x,\,\cdot\,) \rangle = 0$, то по свойству двухмасштабной сходимости (см. (4.8))

$$\nabla u^\varepsilon(x) \rightharpoonup \langle z(x,\,\cdot\,) \rangle \quad \text{в } L^\alpha(\Omega)^d.$$

С другой стороны, $\nabla u^\varepsilon(x) \rightharpoonup \nabla u(x)$ в $L^\alpha(\Omega)^d$ (см. (5.6)). Поэтому $\langle z(x,\,\cdot\,)\rangle = \nabla u(x)$ и, значит, доказана сходимость

$$\nabla u^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} \nabla u(x) + v(x,y), \quad v(x,y) = \nabla_y U(x,y), \quad U \in L^\alpha(\Omega, W^{1,\alpha}(\square)),$$

что и требовалось получить. Предложение 5.1 доказано. □

5.3. Теперь изучим двухмасштабный предел последовательности соленоидальных векторов z^ε, таких что

$$\|z^\varepsilon\|_{L^{\alpha'}(\Omega)^d} \leqslant K < \infty. \tag{5.10}$$

а также даже более общей последовательности векторов.

Предложение 5.2. *Пусть* $\operatorname{div} z^\varepsilon = g^\varepsilon$ *(в смысле* $\mathcal{D}'(\Omega)$*),*

$$g^\varepsilon \rightharpoonup g \ \text{ в } L^{\alpha'}(\Omega), \qquad z^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} z(x,y) \ \text{ в } L^{\alpha'}(\Omega)^d. \tag{5.11}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_y z(x,y) = 0, \\ &\operatorname{div}_x \langle z(x,\,\cdot\,)\rangle = g \quad (\text{в смысле } \mathcal{D}'(\Omega)). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Доказательство. По условию для z^ε выполнено тождество

$$\int\limits_\Omega z^\varepsilon \cdot \nabla\eta\, dx = -\int\limits_\Omega g^\varepsilon \eta\, dx, \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.13}$$

Отсюда, взяв $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $w \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$, $w_\varepsilon(x) = w(\frac{x}{\varepsilon})$, имеем

$$\int\limits_\Omega z^\varepsilon \cdot \nabla(\varepsilon w_\varepsilon \varphi)\, dx = \int\limits_\Omega z^\varepsilon \cdot (\nabla_y w)\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\varphi(x)\, dx + \varepsilon \int\limits_\Omega w_\varepsilon z^\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx = -\varepsilon \int\limits_\Omega g^\varepsilon w_\varepsilon \varphi\, dx$$

и, переходя к двухмасштабному пределу, получаем

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\square z(x,y) \cdot \nabla_y w(y) \varphi(x)\, dx\, dy = 0 \Longrightarrow \int\limits_\square z(x,y) \cdot \nabla_y w(y)\, dy = 0.$$

Соотношение $(5.12)_1$ установлено.

Запишем $z(x,y) = \langle z(x,\,\cdot\,)\rangle + p(x,y)$, $p(x,\,\cdot\,) \in V^{\alpha'}_{\mathrm{sol}}(\square)$, $\langle p(x,\,\cdot\,)\rangle = 0$, и заметим, что $z^\varepsilon(x) \rightharpoonup \langle z(x,\,\cdot\,)\rangle$ в $L^{\alpha'}(\Omega)^d$ по свойству двухмасштабной сходимости. Тогда переходя к пределу в тождестве (5.13) с учетом $(5.11)_1$, получаем

$$\int\limits_\Omega \langle z(x,\,\cdot\,)\rangle \cdot \nabla\eta(x)\, dx = -\int\limits_\Omega g\eta\, dx, \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega),$$

что означает равенство $(5.12)_2$. Предложение 5.2 доказано. □

Следствие. *Если* $\operatorname{div} z^\varepsilon = 0$ (в смысле $\mathcal{D}'(\Omega)$) *и* $z^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} z(x,y)$ в $L^{\alpha'}(\Omega)^d$, *то*

$$\operatorname{div}_x \langle z(x,\,\cdot\,)\rangle = 0 \quad (\text{в смысле } \mathcal{D}'(\Omega)), \quad z(x,\,\cdot\,) \in V^{\alpha'}_{\mathrm{sol}}(\square).$$

§6. Двухмасштабная сходимость в пространствах Орлича–Соболева с осциллирующим показателем

6.1. Изучим двухмасштабную сходимость функций из пространств Орлича–Соболева $W_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$ и $H_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$ (см. определение этих пространств при каждом фиксированном ε в (2.10)–(2.12)). Условия на переменный ε-периодический показатель $p_\varepsilon(x)$ те же, что в (4.14). В частности, $p_\varepsilon(x)$ получен из 1-периодического показателя $p(y)$ с помощью сжатия аргумента, $p_\varepsilon(x) = p(\frac{x}{\varepsilon})$.

В терминах пространств Орлича–Соболева $W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square)$ и $H^{1,p(\,\cdot\,)}(\square)$ на ячейке периодичности $\square$ (см. (2.13)) определим, вообще говоря, не совпадающие между собой пространства периодических потенциальных полей

$$\begin{aligned} V^{(1)}_{\mathrm{pot}}(\square) &= \{\nabla u :\ u \in W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square)\},\\ V^{(2)}_{\mathrm{pot}}(\square) &= \{\nabla u :\ u \in H^{1,p(\,\cdot\,)}(\square)\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

(В обозначении опускаем зависимость этих пространств от показателя $p(\,\cdot\,)$, чтобы избежать излишней громоздкости). Очевидно, что

$$V^{(2)}_{\mathrm{pot}}(\square) \subset V^{(1)}_{\mathrm{pot}}(\square) \subset V^{\alpha}_{\mathrm{pot}}(\square).$$

Отметим свойства пространств (6.1), которые являются аналогами свойств i), ii) для $V^{\alpha}_{\mathrm{pot}}(\square)$ (см. пункт 5.1):

(i) $V^{(1)}_{\mathrm{pot}}(\square)$ — замкнутое подпространство в $L^{p(\,\cdot\,)}(\square)^d$;

(ii) $V^{(2)}_{\mathrm{pot}}(\square)$ есть замыкание $\{\nabla u :\ u \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)\}$ по $L^{p(\,\cdot\,)}(\square)^d$-норме.

В $L^{p'(\,\cdot\,)}(\square)^d$ выделим подпространства соленоидальных векторов (широкое и узкое):

$V^{(1)}_{\mathrm{sol}}(\square)$ — множество соленоидальных векторов из $L^1(\square)^d$ с конечной $L^{p'(\,\cdot\,)}(\square)^d$-нормой,

$V^{(2)}_{\mathrm{sol}}(\square)$ — замыкание множества гладких соленоидальных векторов по $L^{p'(\,\cdot\,)}(\square)^d$-норме.

Имеют место соотношения ортогональности

$$V^{(2)}_{\mathrm{pot}}(\square)^\perp = V^{(1)}_{\mathrm{sol}}(\square), \quad V^{(1)}_{\mathrm{pot}}(\square)^\perp = V^{(2)}_{\mathrm{sol}}(\square) \tag{6.2}$$

в смысле двойственности между пространствами $L^{p(\cdot)}(\square)^d$ и $L^{p'(\cdot)}(\square)^d$. Это — аналоги соотношения (5.3). Менее очевидное соотношение $(6.2)_2$ доказано, например, в [10].

6.2. Пусть последовательность $u^\varepsilon(x)$ ограничена в $W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, т.е.

$$\|u^\varepsilon\|_{W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)} \leqslant K < \infty. \tag{6.3}$$

Наша цель — изучить двухмасштабный предел последовательности градиентов $\nabla u^\varepsilon(x)$.

Как следствие из (6.3), последовательность $u^\varepsilon(x)$ ограничена в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ и можно считать, что имеют место сходимости (5.6), (5.7), а именно,

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad u^\varepsilon \to u \quad \text{в } L^\alpha(\Omega), \\ \nabla u^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} \nabla u(x) + v(x,y), \quad v(x,y) \in L^\alpha(\Omega, V^\alpha_{\text{pot}}(\square)). \end{gathered} \tag{6.4}$$

Но теперь о предельной компоненте $v(x,y)$ можно утверждать большее. Для этого воспользуемся обобщающим (4.9) свойством полунепрерывности снизу для выпуклых интегральных функционалов относительно двухмасштабной сходимости.

Лемма 6.1 ([22, Теорема 7.1]). *Пусть последовательность вектор-функций $w^\varepsilon(x)$ ограничена в $L^\alpha(\Omega)^n$ и $w^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} w(x,y)$ в $L^\alpha(\Omega)^n$, а интегрант $f(y,\xi)$ ($y \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^n$) таков, что*

i) *$f(\,\cdot\,,\xi)$ измерим и периодичен с ячейкой периодичности $\square = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ при каждом $\xi \in \mathbb{R}^n$;*

ii) *$f(y,\xi)$ выпуклый по ξ, $0 \leqslant f(y,\xi) \leqslant f_0(\xi)$, где $f_0(\xi)$ — непрерывная функция;*

iii) *$f(y,0) = 0$.*

Тогда справедливо неравенство

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega f\Big(\frac{x}{\varepsilon}, w^\varepsilon(x)\Big)\,dx \geqslant \int\limits_\Omega \int\limits_\square f(y, w(x,y))\,dx\,dy. \tag{6.5}$$

Степенной интегрант $f(y,\xi) = |\xi|^{p(y)}$ удовлетворяет условиям леммы 6.1 с $n = d$ и, согласно (6.3), (6.5), для последовательности ∇u^ε из (6.4) имеем

$$\infty > \liminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^{p(\frac{x}{\varepsilon})}\,dx \geqslant \int\limits_\Omega \int\limits_\square |\nabla u(x) + v(x,y)|^{p(y)}\,dx\,dy.$$

Отсюда заключаем, что

$$v(x,\,\cdot\,) \in V^{(1)}_{\text{pot}}(\square) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega. \tag{6.6}$$

6.3. Теперь изучим последовательность $u^\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям (6.3), (6.4). Естественен вопрос о возможности замены свойства (6.6) на более сильное:

$$v(x,\,\cdot\,) \in V_{\rm pot}^{(2)}(\square) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega. \tag{6.7}$$

Ответ утвердительный, если *выполнено неравенство Пуанкаре* (2.15). Для обоснования полезна следующая лемма.

Лемма 6.2. *Пусть* $b \in V_{\rm sol}^{(1)}(\square)$, $\langle b\rangle = 0$ *и выполнено неравенство Пуанкаре* (2.15). *Тогда найдётся кососимметрическая матрица* $B = \{B_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant d}$, *такая что* $B_{ij} \in L^{p'(\,\cdot\,)}(\square)$ *и*

$$\operatorname{div} B = b, \qquad m.e.\ \frac{\partial}{\partial x_j} B_{ij} = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{6.8}$$

Равенства (6.8) *понимаются в смысле* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *либо в смысле интегрального тождества на периодических функциях*

$$\int\limits_{\square} B_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int\limits_{\square} b_i \varphi\, dx, \quad \varphi \in C_{\rm per}^\infty(\square). \tag{6.9}$$

В формулах (6.8), (6.9), а также всюду далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d.

Доказательство. Для вектора $b = \{b_i\}_{i=1}^d$ рассмотрим уравнения на ячейке

$$\operatorname{div}(|\nabla\Phi^i|^{p(\,\cdot\,)-2}\nabla\Phi^i) = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{6.10}$$

Под решением понимаем функцию $\Phi^i \in W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle |\nabla\Phi^i|^{p(\,\cdot\,)-2}\nabla\Phi^i \cdot \nabla\varphi\rangle = -\langle b_i\varphi\rangle, \quad \varphi \in W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square), \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{6.11}$$

Благодаря неравенству Пуанкаре (2.15) имеет место вложение

$$W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square) \subset L^{p(\,\cdot\,)}(\square),$$

и правая часть (6.11) задаёт функционал на $W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square)$, так как

$$\langle b_i\varphi\rangle \leqslant 2\|b_i\|_{L^{p'(\,\cdot\,)}(\square)}\|\varphi\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\square)} \leqslant 2C_P\|b_i\|_{L^{p'(\,\cdot\,)}(\square)}\|\nabla\varphi\|_{L^{p(\,\cdot\,)}(\square)}.$$

Разрешимость нелинейных уравнений (6.10) может быть доказана с помощью вариационного подхода (см., например, [12, раздел 2]).

Искомую матрицу $B = \{B_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ определим через компоненты потока в задаче (6.10), а именно, положим $B_{ij} = |\nabla\Phi^i|^{p(x)-2}\frac{\partial\Phi^i}{\partial x_j}$. Очевидно, что $B_{ij} \in L^{p'(\,\cdot\,)}(\square)$ и $\operatorname{div} B = b$. Кроме того, матрица B кососимметрична, коль скоро вектор b соленоидален.

В самом деле, полагая в (6.11) $\varphi = \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$, $\eta \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$, имеем

$$-\langle b \cdot \nabla \eta \rangle = -\Big\langle b_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \Big\rangle = \Big\langle B_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\Big)\Big\rangle = \Big\langle B_{ij} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_i}\Big\rangle,$$

откуда в силу соленоидальности b следует условие ортогональности

$$\langle B \cdot \nabla^2 \eta \rangle = 0. \tag{6.12}$$

Здесь $\nabla^2 \eta = \{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ и при каждом x в качестве $\nabla^2 \eta(x)$ может выступать произвольная симметричная матрица. Отсюда, используя аппарат точек Лебега, посредством стягивания носителя матричной функции $\nabla^2 \eta$ в x_0 — произвольную точку Лебега для матрицы B — выводим из (6.12) поточечное условие ортогональности: $B(x) \cdot S = 0$ для почти всех x, где S — любая симметричная матрица. Условие ортогональности в таком виде влечёт кососимметричность матрицы B (см. об этом подробнее в разделе 6.6). $\square$

Следствие из леммы 6.2 *В условиях леммы* 6.2, *взяв* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *имеем представление*

$$\varphi(x) b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) = \operatorname{div}\Big(\varepsilon \varphi(x) B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) - \varepsilon B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \nabla \varphi(x) \quad \text{в смысле } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{6.13}$$

в котором первое слагаемое есть соленоидальный вектор в смысле $\mathcal{D}'(\Omega)$, *т.е.*

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div}\Big(\varepsilon \varphi(x) B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) \cdot \nabla \eta \, dx = 0, \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{6.14}$$

Доказательство. В силу (6.8) имеем $b(y) = \operatorname{div}_y B(y)$ и $b(\frac{x}{\varepsilon}) = \operatorname{div}\big(\varepsilon B(\frac{x}{\varepsilon})\big)$, откуда следует (6.13). Соотношение (6.14) доказываем, интегрируя по частям:

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div}\Big(\varphi(x) B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) \cdot \nabla \eta(x) \, dx = -\int\limits_\Omega \varphi(x) B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \cdot \nabla^2 \eta(x) \, dx = 0.$$

Равенство интеграла нулю верно, поскольку $B(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla^2 \eta(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$ ввиду того, что матрицы $\nabla^2 \eta$ и B являются симметричной и кососимметричной соответственно. $\square$

Замечание. Лемма 6.2 обобщает известное утверждение о представлении периодического соленоидального вектора $b \in L^2(\square)^d$ с нулевым средним $\langle b \rangle$ в виде дивергенции от кососимметрической периодической матрицы, $b = \operatorname{div} B$, $B \in W^{1,2}(\square)^{d \times d}$, доказанное, например, в [1, гл. I, §1].

6.4. Предполагая, что выполнено неравенство Пуанкаре (2.15), вернёмся к последовательности функций $u^\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям (6.3), (6.4), и докажем для её двухмасштабного предела $\nabla u(x) + v(x,y)$ свойство (6.7). Напомним, что по определению пространства $H_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$ функция u^ε может быть приближена в норме этого пространства как угодно точно функцией из $C_0^\infty(\Omega)$.

Сначала предположим, что сама последовательность гладкая, т.е. $u^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда, взяв произвольные $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $b \in V_{\mathrm{sol}}^{(1)}(\square)$, $\langle b\rangle = 0$, запишем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \varphi(x) b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\cdot\nabla u^\varepsilon\,dx\\
&\overset{(6.13)}{=} \int\limits_\Omega \operatorname{div}\Big(\varepsilon\varphi(x)B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\cdot\nabla u^\varepsilon\,dx - \varepsilon\int\limits_\Omega B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla\varphi(x)\cdot\nabla u^\varepsilon\,dx\\
&\overset{(6.14)}{=} -\varepsilon\int\limits_\Omega B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla\varphi(x)\cdot\nabla u^\varepsilon\,dx\\
&\overset{(2.9)}{\leqslant} 2\varepsilon\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^{p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)^d}\Big\|B\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla\varphi\Big\|_{L^{p'_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)^d} = O(\varepsilon),
\end{aligned}\tag{6.15}$$

где на последнем шаге учли оценку (6.3) и равномерную по ε ограниченность $B(\frac{x}{\varepsilon})\nabla\varphi(x)$ в $L^{p'(\,\cdot\,)}(\Omega)^d$ в силу (3.5). Отсюда вычисляем предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \varphi(x)b\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\cdot\nabla u^\varepsilon\,dx = 0$$

и его же находим, используя двухмасштабную сходимость последовательности ∇u^ε на пробной функции $\varphi(x)b(\frac{x}{\varepsilon})$, что возможно в силу предложения 4.4. Тогда

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega\int\limits_\square \varphi(x)b(y)\cdot(\nabla u(x) + v(x,y))\,dx\,dy = 0\\
&\qquad\Longrightarrow \int\limits_\Omega\int\limits_\square \varphi(x)b(y)\cdot v(x,y)\,dx\,dy = 0
\end{aligned}\tag{6.16}$$

(последнее — в силу равенства $\langle b\rangle = 0$), и на основании соотношения ортогональности $(6.2)_1$ получаем (6.7).

В общем случае найдём аппроксимацию $\widetilde{u}^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, такую что

$$\|u^\varepsilon - \widetilde{u}^\varepsilon\|_{H_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

Очевидно, что последовательности u^ε и $\widetilde{u}^\varepsilon$ имеют один и тот же двухмасштабный предел. Запишем цепочку соотношений типа (6.15) для $\widetilde{u}^\varepsilon$ и в пределе получим то же равенство (6.16) с последующим выводом (6.7).

В итоге доказана следующая теорема.

Теорема 6.3. *Пусть последовательность функций $u^\varepsilon \in W_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$ подчинена условиям ограниченности и сходимости* (6.3), (6.4). *Тогда двухмасштабный предел $\nabla u(x) + v(x,y)$ её градиента $\nabla u^\varepsilon(x)$ обладает свойством* (6.6).

Более того, если $u^\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$, то имеет место (6.7) *при условии, что справедливо неравенство Пуанкаре* (2.15).

6.5. Теперь изучим двухмасштабный предел последовательности соленоидальных векторов z^ε, заданных в области Ω. Соленоидальность понимается в смысле распределений $\mathcal{D}'(\Omega)$, т.е. выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega z^\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{6.17}$$

Предполагаем условие ограниченности

$$\|z^\varepsilon\|_{L^{p'_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)^d} \leqslant K < \infty, \tag{6.18}$$

и сходимость

$$z^\varepsilon(x) \overset{2}{\rightharpoonup} z(x,y) \quad \text{в } L^{\beta'}(\Omega)^d. \tag{6.19}$$

Применяя предложение 5.2 и следствие к нему, видим, что

$$\operatorname{div}_y z(x,y) = 0,$$
$$\operatorname{div}_x \langle z(x,\,\cdot\,)\rangle = 0 \quad (\text{в смысле } \mathcal{D}'(\Omega)).$$

По лемме 6.1 получаем

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |z^\varepsilon|^{p'(\frac{x}{\varepsilon})}\, dx \geqslant \int\limits_\Omega \int\limits_\square |z(x,y)|^{p'(y)}\, dx\, dy,$$

откуда следует, что

$$z(x,\,\cdot\,) \in V_{\mathrm{sol}}^{(1)}(\square) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega. \tag{6.20}$$

При условии (6.18) тождество (6.17) распространяется по замыканию на пробные функции $\varphi \in H_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$. Рассмотрим случай, когда (6.17) выполнено на ещё более широком множестве пробных функций, а именно, для $\varphi \in W_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$. Это усиленное свойство соленоидальности, которое обозначаем как

$$z^\varepsilon \in L_{\mathrm{sol}}^{p'_\varepsilon(\,\cdot\,),(2)}(\Omega), \tag{6.21}$$

может наследоваться двухмасштабным пределом $z(x,y)$. А именно,

$$z(x,\,\cdot\,) \in V^{(2)}_{\mathrm{sol}}(\square) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega \tag{6.22}$$

при условии, что справедливо неравенство Пуанкаре (2.15).

В самом деле, взяв $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $w \in W^{1,p(\,\cdot\,)}(\square) \subset L^{p(\,\cdot\,)}(\square)$, запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \varphi(x)(\nabla w)\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\cdot z^\varepsilon\,dx \\
&\quad= \int\limits_\Omega \nabla\left(\varepsilon\varphi(x)w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right)\cdot z^\varepsilon\,dx - \varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\varphi(x)w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\cdot z^\varepsilon\,dx \\
&\quad= -\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\varphi(x)w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\cdot z^\varepsilon\,dx = O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Упрощение на втором шаге произошло за счет того, что $\varphi(x)w(\frac{x}{\varepsilon})$ принадлежит пространству $W_0^{1,p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$ и z^ε – соленоидальный вектор в расширенном смысле (6.21). Кроме того, элементы $\nabla\varphi(x)w(\frac{x}{\varepsilon})$ и z^ε принадлежат сопряженным пространствам $L^{p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)^d$ и $L^{p'_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)^d$, при этом равномерно по ε ограничены в соответствующих нормах. Тогда по неравенству Гёльдера (2.9) последний интеграл в (6.23) имеет оценку

$$\int\limits_\Omega \nabla\varphi(x)w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\cdot z^\varepsilon\,dx \leqslant 2\|\nabla\varphi(x)w\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\|_{L^{p_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)^d}\|z^\varepsilon\|_{L^{p'_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)^d} \leqslant C.$$

Переходя к двухмасштабному пределу в (6.23), получаем

$$\int\limits_\Omega\int\limits_\square \varphi(x)\nabla w(y)\cdot z(x,y)\,dx\,dy = 0$$

(здесь сыграл свою роль аналог предложения 4.4 для последовательности, равномерно ограниченной в $L^{p'_\varepsilon(\,\cdot\,)}(\Omega)$), откуда по свойствам функции w на основании соотношения ортогональности $(6.2)_2$ выводим (6.22).

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 6.4. *Пусть последовательность векторов z^ε, соленоидальных в смысле распределений на области Ω, подчинена условиям ограниченности и сходимости* (6.18), (6.19). *Тогда двухмасштабный предел $z(x,y)$ этой последовательности обладает свойством* (6.20).

Если выполнено неравенство Пуанкаре (2.15), *то соленоидальность векторов z^ε в усиленном смысле* (6.21) *влечет свойство* (6.22).

6.6. Поясним, почему кососимметрична матрица B, удовлетворяющая (6.12).

Лемма 6.5. *Пусть матрица $B \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^{d\times d}$ $(\gamma \geqslant 1)$ такова, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} B \cdot \nabla^2 \eta \, dx = 0, \quad \nabla^2 \eta = \left\{ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{1 \leqslant i,j \leqslant d}, \tag{6.24}$$

для любой функции $\eta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ с конечным носителем. Тогда матричная функция $B = \{B_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ кососимметрична, а именно, для всех i, j имеем $B_{ij}(x) = -B_{ji}(x)$, x — любая её точка Лебега.

Доказательство. Далее обозначаем через $Q_r = Q_r(x_0)$ куб с центром в точке x_0, ребра которого параллельны осям координат и равны r, $0 < r \leqslant 1$. Будем использовать локализованные в $Q_r(x_0)$ ограниченные функции вида $\varphi_r(x) = \varphi(r^{-1}(x - x_0))$, $\operatorname{supp} \varphi \subset Q_1(0)$, $\int\limits_{Q_1} \varphi \, dx \neq 0$.

Напомним, что если $f \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\gamma \geqslant 1$, то для п. в. x_0

$$\lim_{r\to 0} r^{-d} \int\limits_{Q_r} |f(x) - f(x_0)|^{\gamma} \, dx = 0 \tag{6.25}$$

и такие точки называют точками Лебега функции f. Из (6.25) следует

$$\lim_{r\to 0} r^{-d} \int\limits_{Q_r} f(x)\varphi_r(x) \, dx = f(x_0) \int\limits_{Q_1} \varphi(x) \, dx, \quad Q_r = Q_r(x_0), \tag{6.26}$$

для любой функции $\varphi_r(x)$ указанного выше типа.

Пусть x_0 — точка Лебега для B. Не ограничивая общности, считаем (для упрощения обозначений), что $x_0 = 0$. Подставим в (6.24) в качестве пробной локализованную в $Q_r(0)$ функцию

$$\eta(x) = \eta^{ij}(x) = x_i x_j \varphi_r(x), \quad \varphi_r(x) = \varphi(x/r), \quad \operatorname{supp} \varphi \subset Q_1(0),$$

где i, j — любая фиксированная пара индексов, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$. При этом пусть $\varphi(x) = \alpha(x_1) \cdots \alpha(x_d)$, $\operatorname{supp} \alpha \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \equiv I$; функция $\alpha(t)$ и её производные $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$ обладают свойствами

$$\langle \alpha \rangle_I \neq 0, \ \langle \alpha' \rangle_I = 0, \ \langle \alpha' t \rangle_I = 0, \ \langle \alpha'' t^2 \rangle_I = 0, \tag{6.27}$$

где $\langle \cdot \rangle_I = \int_I \cdot \, dt$. Существование такой функции $\alpha(t)$ проверено ниже.

Изучим для выбранной функции η матрицу второго градинта $\nabla^2\eta$. Её элемент с фиксированными индексами $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant d$ вычисляется как

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_k \partial x_m} &= \delta_{ik}\delta_{jm}\varphi_r(x) + \delta_{ik}\frac{x_j}{r}\Big(\partial_m\varphi\Big)\Big(\frac{x}{r}\Big) + \delta_{jk}\frac{x_i}{r}(\partial_m\varphi)\Big(\frac{x}{r}\Big)\\ &+ \delta_{im}\frac{x_j}{r}(\partial_k\varphi)\Big(\frac{x}{r}\Big) + \delta_{jm}\frac{x_i}{r}(\partial_k\varphi)\Big(\frac{x}{r}\Big) + \frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r}(\partial_k\partial_m\varphi)\Big(\frac{x}{r}\Big),\end{aligned} \tag{6.28}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, $\partial_m\varphi(y) = \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_m}$.

Пусть e^{ij} — матрица, у которой только элементы с индексами i, j ненулевые и притом единичные. Матрицы такого вида образуют базис в пространстве симметричных матриц. Тогда в силу (6.28) и свойств функции φ найдём предел

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} r^{-d}\int\limits_{Q_r} B\cdot\nabla^2\eta\,dx &= \lim_{r\to 0} r^{-d}\int\limits_{Q_r} B(x)\cdot e^{ij}\varphi_r(x)\,dx\\ &\overset{(6.26)}{=} B(0)\cdot e^{ij}\int\limits_{Q_1}\varphi(x)\,dx.\end{aligned} \tag{6.29}$$

С другой стороны, в силу (6.24) этот предел равен нулю. Поскольку

$$\int\limits_{Q_1}\varphi(x)\,dx = \langle\alpha\rangle_I^d \neq 0,$$

то из (6.29) следует $B(0)\cdot e^{ij} = B_{ij}(0) + B_{ji}(0) = 0$. Индексы i, j произвольны, поэтому кососимметричность матрицы $B(0)$ проверена.

Осталось показать существование функции $\alpha(t)$ со свойствами (6.27). Положим $\alpha(t) = \beta(t) - (a_2t^2 + a_4t^4)\beta(t)$, где $\beta(t)$ — некоторая четная достаточно регулярная функция, $\operatorname{supp}\beta \subset I$ (возможный вариант её приведён ниже), а коэффициенты $a_2, a_4 \in \mathbb{R}$ определяются по $\beta(t)$ так, чтобы выполнялись последние два равенства в (6.27). Заметим, что $\langle\alpha'\rangle_I = 0$ ввиду четности функции $\alpha(t)$. Для отыскания a_2, a_4 получаем систему линейных алгебраических уравнений. Разрешимость её проверяется непосредственно для конкретной четной функции $\beta(t)$, такой что $\beta(t) = 0$ при $t \leqslant -1/2$, $\beta(t) = 8(t+1/2)^2$ при $-1/2 < t \leqslant -1/4$ и $\beta(t) = -8t^2 + 1$ при $-1/4 \leqslant t \leqslant 0$. В этом случае также проверяется первое условие в (6.27). □

Список литературы

[1] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[2] Жиков В. В., *Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **47** (1983), №5, 961–998.

[3] Жиков В. В., *Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **50** (1986), №4, 675–710.
[4] Жиков В. В., *Эффект Лаврентьева и усреднение нелинейных вариационных задач*, Дифференц. уравнения **27** (1991), №1, 42–50.
[5] Zhikov V. V., *On some variational problems*, Russ. J. Math. Phys. **5** (1997), no. 1, 105–116.
[6] Жиков В. В., *Разрешимость трехмерной задачи о термисторе*, Тр. МИАН **261** (2008), 101–114.
[7] Ruzicka M. *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, Lecture Notes in Math., vol.1748, Springer, Berlin, 2000.
[8] Жиков В. В., *Оценки типа Мейерса для решения нелинейной системы Стокса*, Дифференц. уравнения **33** (1997), №1, 107–114.
[9] Zhikov V. V., *Homogenization of a Navier–Stokes type system for electrorheological fluid*, Complex Var. Elliptic Equ. **56** (2011), no. 7–9, 545–558.
[10] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Усреднение монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста переменного порядка*, Мат. заметки **90** (2011), №1, 53–69.
[11] Жиков В. В., *Об одном подходе к разрешимости обобщенных уравнений Навье–Стокса*, Функц. анал. и его прил. **43** (2009), №3, 33–53.
[12] Жиков В. В., *О вариационных задач и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста*, Пробл. мат. анал. **54** (2011), 23–112.
[13] Bulicek M., Gwiazda P., Kalousek M., Swierczewska–Gwiazda A. *Homogenization of nonlinear elliptic systems in nonreflexive Musielak–Orlicz spaces*, `arXiv:1703.08355`.
[14] Kovacik O., Rakosnik J. *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), no. 6, 592–618.
[15] Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Math., vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.
[16] Жиков В. В., *Об эффекте Лаврентьева*, Докл. РАН **345** (1995), №1, 10–14.
[17] Zhikov V. V., *On Lavrentiev's phenomenon*, Russ. J. Math. Phys. **3** (1995), no. 2, 249–269.
[18] Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М. 1977.
[19] Экланд И., Темам Р., *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М. 1979.
[20] Nguetseng G., *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), no. 3, 608–623.
[21] Allaire G., *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), no. 6, 1482–1518.
[22] Жиков В. В., *О двухмасштабной сходимости*, Тр. семин. им. И. Г. Петровского **23** (2003), 149–187.

Московский технологический университет (МИРЭА),
пр. Вернадского, 78, 119454 Москва, Россия
E-mail: `pas-se@yandex.ru`

Поступило 30 августа, 2017 г.