В. П. Платонов, В. В. Беняш-Кривец, Кольца характеров n-мерных представлений конечно-порожденных групп, *Докл. АН СССР*, 1986, том 289, номер 2, 293–297

УДК 512.547 + 512.552 МАТЕМАТИКА

Академик АН БССР В.П. ПЛАТОНОВ, В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ

КОЛЬЦА ХАРАКТЕРОВ n-МЕРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП

Пусть $\Gamma = \langle g_1, g_2, \ldots, g_m \rangle$ – группа с m образующими. Для произвольного поля K и линейной алгебраической K-группы G совокупность всех n-мерных представлений $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(K))$ естественным образом отождествляется с K-точками некоторого алгебраического многообразия. Для каждого $g \in \Gamma$ определим функцию τ_g на $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(K))$ со значениями в K:

$$\tau_g(\rho) = \mathrm{tr}(\rho(g)), \qquad \rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G(K)),$$

где через $\mathrm{tr}\, X$ обозначается след матрицы X.

Рассмотрим кольцо $T(\Gamma, G(K))$, порожденное функциями τ_g (более точно было бы писать τ_g^G вместо τ_g, но из контекста каждый раз будет видно, о представлениях в какую группу идет речь). Оно называется кольцом характеров представлений группы Γ в $G(K)$. Впервые это кольцо для случая $G(K) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ изучали Вогт [1] и Фрике [2] почти сто лет назад. В настоящее время кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}))$ принято называть кольцом характеров Фрике для группы Γ. Обзор результатов о кольце $T(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}))$ и его применениях к различным задачам теории групп и линейным дифференциальным уравнениям содержится в статье Магнуса [3]. Интересные применения в трехмерной топологии даны в недавней большой работе [4].

Мы рассматриваем здесь более общую, но также классическую ситуацию: кольца характеров $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ и $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$.

Одним из центральных является вопрос о конечной порожденности колец $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ и $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$. В 1972 г. Горовиц [5] показал, что кольцо характеров Фрике $T(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}))$ конечно порождено. Вопрос о конечной порожденности колец $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ и $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ обсуждался Бассом и Любоцки в [6].

Главная цель настоящей статьи – дать ответ на указанный вопрос. А именно, решение вопроса о конечной порожденности колец характеров $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$, $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ содержится в двух следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть группа Γ обладает бесконечной циклической фактор-группой. Тогда для поля K нулевой характеристики справедливы следующие утверждения*:

1) *для всех $n \geqslant 2$ кольцо $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ не является конечно-порожденным*;
2) *для $n \geqslant 4$ кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ не является конечно-порожденным*;
3) *при $n = 3$ кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_3(K))$ конечно порождено для любой группы Γ.*

Во второй теореме рассматривается случай поля K положительной характеристики p. Но прежде отметим, что для конечного поля K кольцо $T(\Gamma, G(K))$ конечно порождено для любой группы Γ. Это легко следует из того факта, что группа Γ обладает лишь конечным числом подгрупп данного индекса.

Теорема 2. *Пусть K – бесконечное поле характеристики $p > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *для любой группы Γ кольцо $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ конечно порождено при $n < p$, а кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ конечно порождено при $n < 2p$*;

2) *если группа Γ обладает бесконечной циклической фактор-группой, то кольца $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ и $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ не являются конечно-порожденными соответственно при $n \geqslant p$ и $n \geqslant 2p$.*

Следует отметить, что для любой подгруппы $H \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ кольцо $T(\Gamma, H)$ является гомоморфным образом кольца $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$, в частности, из бесконечной порожденности $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ следует бесконечная порожденность $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$. Аналогично, если $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ – эпиморфизм, то он индуцирует эпиморфизм $T(\Gamma_1, G(K)) \to T(\Gamma_2, G(K))$; в частности, из бесконечной порожденности $T(\Gamma_2, G(K))$ следует бесконечная порожденность $T(\Gamma_1, G(K))$.

Доказательство сформулированных выше теорем основывается на следующих леммах.

Л е м м а 1. *Пусть поле K бесконечно, $\Gamma = \langle g \rangle$ – бесконечная циклическая группа и $K_1 \supset K$.*

Тогда кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ (соответственно $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$) конечно порождено тогда и только тогда, когда конечно порождено кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K_1))$ (соответственно $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K_1))$).

Л е м м а 2. *Если кольцо $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ (соответственно $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$) не является конечно-порожденным для некоторого n, то для любого $m > n$ кольцо $T(\Gamma, \mathrm{GL}_m(K))$ (соответственно $T(\Gamma, \mathrm{SL}_m(K))$) бесконечно порождено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о получается рассмотрением стандартного вложения $\mathrm{GL}_n(K)$ в $\mathrm{GL}_m(K)$

$$\epsilon\colon X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & E_{m-n} \end{pmatrix}$$

и использованием того факта, что $T(\Gamma, \epsilon(\mathrm{GL}_n(K)))$ является эпиморфным образом $T(\Gamma, \mathrm{GL}_m(K))$.

Л е м м а 3. *Пусть Γ – бесконечная циклическая группа.*

Тогда для поля K нулевой характеристики кольцо $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ не является конечно-порожденным для всех $n \geqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: некоторый конечный набор функций τ_{g^i}, $-l \leqslant i \leqslant l$, порождает кольцо $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$. Тогда для любого $m > l$ мы должны иметь равенство

$$\tau_{g^m} = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} \tau_{g^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \tau_{g^{i_s}}, \tag{1}$$

где $-l \leqslant i_j \leqslant l$, $j = 1, 2, \ldots, s$, $a_{i_1, \ldots, i_s} \in \mathbf{Z}$. Так как группа Γ – бесконечная циклическая, то (1) эквивалентно равенству

$$\mathrm{tr}\, X^m = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} \mathrm{tr}\, X^{i_1} \cdot \mathrm{tr}\, X^{i_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{tr}\, X^{i_s}, \tag{2}$$

где $X = (x_{ij})$ – произвольная матрица из $\mathrm{GL}_n(K)$. Лемма 1 позволяет в качестве X взять "общую" матрицу с независимыми элементами x_{ij}. После умножения обеих частей (2) на подходящую степень $\mathrm{def}\, X$ получим два полинома от x_{ij}, которые принимают одинаковые значения на $\mathrm{GL}_n(K)$ и, следовательно, равны. Так как полином в левой части является однородным, то и полином в правой части должен быть однородным и сравнение степеней показывает, что для каждого набора $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ должно выполняться условие $i_1 + i_2 + \ldots + i_s = m$. Поскольку $m > l$, то $s \geqslant 2$. Положим $X = E_n$ в равенстве (2), тогда

$$n = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} \cdot n^s.$$

Последнее равенство невозможно, поскольку правая часть делится на n^2, а левая нет. Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. *Пусть Γ – бесконечная циклическая группа, K – поле характеристики 0.*

Тогда для $n \geqslant 4$ кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ не является конечно-порожденным.

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно рассмотреть случай $n = 4$. Предположим, что для некоторого l функции τ_{g^i}, $-l \leqslant i \leqslant l$, порождают кольцо $T(\Gamma, \mathrm{SL}_4(K(x)))$, где x – трансцендентный над K элемент. Тогда для любого $m > l$ мы должны иметь равенство

$$(3) \qquad \tau_{g^m} = \sum_{i=-l}^{l} a_i \tau_{g^i} + \sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} \tau_{g^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \tau_{g^{i_s}},$$

где $-l \leqslant i_j \leqslant l$, $j = 1, 2, \ldots, s$, a_i и $a_{i_1,\ldots i_s} \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим представление

$$(4) \qquad \rho\colon g \mapsto X = \mathrm{diag}(x, x, x^{-1}, x^{-1}).$$

Очевидно, что $\mathrm{tr}\, X^d = 2(x^d + x^{-d})$. Для представления (4) мы получаем из (3):

$$(5) \qquad 2(x^m + x^{-m}) =$$
$$= \sum_{i=-l}^{l} 2a_i(x^i + x^{-i}) + \sum_{(i_1,\ldots,i_s)} 2^s a_{i_1\ldots i_s} (x^{i_1} + x^{-i_1}) \cdot \ldots \cdot (x^{i_s} + x^{-i_s}).$$

Так как $m > l$, то равенство (5) может быть записано в виде

$$(5') \qquad P(x) + Q(1/x) = 0,$$

где $P, Q \in \mathbf{Z}[y]$, причем $P, Q \not\equiv 0$, поскольку коэффициент при y^m в P и Q будет отличен от нуля. Невозможность равенства (5′) теперь достаточно очевидна. Полученное противоречие с учетом леммы 1 и завершает доказательство.

Введем следующие обозначения: $C_r = \{1, 2, \ldots, r\}$, $D_r = \{\sigma\colon C_r \to C_p \mid \sigma$ инъективно$\}$.

Лемма 5. *Пусть K – поле характеристики $p > 0$, $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ – такой набор целых чисел, что $r \leqslant p$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_r \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.*

Тогда рациональная функция $\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(r)}^{n_p} \in K(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ *не равна нулю.*

Доказательство теоремы 1. Утверждения 1 и 2 теоремы следуют из лемм 3 и 4, утверждение 3 доказано в [9].

Доказательство теоремы 2 существенно сложнее и не может быть приведено здесь полностью. Мы изложим ниже только ключевые моменты этого доказательства.

Первое утверждение теоремы 2, а именно, утверждение о конечной порожденности кольца $T(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$, может быть выведено из следующего результата Прочези [7]. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_m$ – набор из m общих матриц в $\mathrm{GL}_n(\Omega)$, где $\Omega \supset K$. Прочези доказал, что кольцо A, порожденное всеми функциями $\sigma_i(W)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где σ_i обозначает i-й коэффициент характеристического полинома матрицы W, а W пробегает все одночлены от $X_1, X_2, \ldots, X_m$, является конечно-порожденным. Из условия $p > n$ следует, что всякое $\sigma_i(W)$ можно выразить в виде полинома от $\mathrm{tr}\, W, \mathrm{tr}\, W^2, \ldots, \mathrm{tr}\, W^i$ с коэффициентами из поля $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Значит, кольцо A может быть порождено конечным числом следов $\mathrm{tr}\, W_1, \mathrm{tr}\, W_2, \ldots, \mathrm{tr}\, W_d$. В заключение используем специализацию $X_i \to g_i$, где $\Gamma = \langle g_1, g_2, \ldots, g_m \rangle$.

Конечная порожденность кольца $T(\Gamma, \mathrm{SL}_n(K))$ при $n < 2p$ доказывается похожим образом, если учесть, что здесь достаточно рассмотреть случай $p \leqslant n < 2p$.

Основная тяжесть в доказательстве теоремы 2 ложится на второе утверждение. В то же время мы будем доказывать даже более сильный факт: если функциями τ_g, $g \in \Gamma$, породить алгебру над K, то эта алгебра $T_1(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ не является конечно-порожденной при $n \geqslant p$.

В соответствии с леммой 2 достаточно доказать это утверждение для $n = p$. Кроме того, можно считать, что $\Gamma = \langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Предположим противное, т.е. пусть существует конечная система образующих τ_{g^i}, $-l \leqslant i \leqslant l$, алгебры $T_1(\Gamma, \mathrm{GL}_p(K))$. Тогда для $m > l$ имеем равенство

$$(6)\qquad \tau_{g^m} = \sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s}(g^m)\tau_{g^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \tau_{g^{i_s}},$$

где $-l \leqslant i_j \leqslant l$, $j = 1, 2, \ldots, s$, $a_{i_1\ldots i_s}(g^m) \in K$.

Как и при доказательстве леммы 3, замечаем, что $i_1 + i_2 + \ldots + i_s = m$, в частности, $s \geqslant 2$. Будем считать далее, что $(m, p) = 1$. Если для произвольной диагональной матрицы $\mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ рассмотреть представление $g \mapsto t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_p)$, то получим равенство

$$(7)\qquad t_1^m + t_2^m + \ldots + t_p^m = \sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s}(t^m) \prod_{j=1}^{s} (t_1^{i_j} + t_2^{i_j} + \ldots + t_p^{i_j}),$$

которое выполняется для любых $t_1, t_2, \ldots, t_p \in K^*$. Произведение

$$(8)\qquad \prod_{j=1}^{s} (t_1^{i_j} + t_2^{i_j} + \ldots + t_p^{i_j}) = \sum_{(n_1,\ldots,n_r)} b_{n_1\ldots n_r} \left(\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \cdot t_{\sigma(2)}^{n_2} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(r)}^{n_r} \right),$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = m$ и суммирование ведется по неупорядоченным наборам $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$. Это получается следующим образом: левая часть в (8) есть сумма p^s одночленов, причем вместе с одночленом $t_{i_1}^{n_1} \cdot t_{i_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot t_{i_r}^{n_r}$ входят и все одночлены вида $t_{\sigma(1)}^{n_1} \cdot t_{\sigma(2)}^{n_2} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(r)}^{n_r}$, $\sigma \in D_r$; таким образом, получаем сумму $\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \cdot t_{\sigma(2)}^{n_2} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(r)}^{n_r}$, а целое число $b_{n_1\ldots n_r}$ показывает, сколько таких одинаковых сумм имеется в представлении (8).

По лемме 5 ни одна из сумм $\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \cdot t_{\sigma(1)}^{n_2} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(r)}^{n_r}$ не равна нулю и входящие в нее одночлены отличны от одночленов аналогичной суммы для другого набора $(m_1, m_2, \ldots, m_q) \neq (n_1, n_2, \ldots, n_r)$. Левая часть равенства (8) есть сумма p^s одночленов вида $t_{i_1}^{n_1} \cdot t_{i_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot t_{i_r}^{n_r}$, а правая часть представляет собой сумму из $\sum_{(n_1,\ldots,n_r)} b_{n_1\ldots n_r} \cdot |D_r|$ таких одночленов. Следовательно, $\sum_{(n_1,\ldots,n_r)} b_{n_1\ldots n_r} \times |D_r| = p^s$. Так как $D_r = \dfrac{p!}{(p-r)!}$, а $s \geqslant 2$, то

$$(9)\qquad \sum_{(n_1,\ldots,n_r)} b_{n_1\ldots n_r} \frac{(p-1)!}{(p-r)!} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Из равенств (7), (8) следует, что

$$(10)\qquad t_1^m + t_2^m + \ldots + t_p^m = \sum_{(n_1,\ldots,n_r)} c_{n_1\ldots n_r} \left(\sum_{\sigma \in D_r} t_{\sigma(1)}^{n_1} \cdot t_{\sigma(2)}^{n_2} \cdot \ldots \cdot t_{\sigma(r)}^{n_r} \right),$$

где $c_{n_1\ldots n_r} = \sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s}(t^m) b_{n_1\ldots n_r}^{(i_1,\ldots,i_s)} \in K$.

С учетом (9) получаем соотношение

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_r)} c_{n_1\ldots n_r}\frac{(p-1)!}{(p-r)!}=\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s}(t^m)\times$$

$$\times\left[\sum_{(n_1,\ldots,n_r)} b^{(i_1,\ldots,i_s)}_{n_1\ldots n_r}\frac{(p-1)!}{(p-r)!}\right]=0.$$

С другой стороны, из (10) следует, что $c_m=1$, а все $c_{n_1\ldots n_r}=0$ при $r\geqslant 2$. Следовательно, $\sum_{(n_1,\ldots,n_r)} c_{n_1\ldots n_r}\dfrac{(p-1)!}{(p-r)!}=1$. Полученное противоречие и завершает доказательство бесконечной порожденности алгебры $T_1(\Gamma,\mathrm{GL}_p(K))$.

Доказательство того факта, что кольцо $T(\Gamma,\mathrm{SL}_{2p}(K))$ не является конечнопорожденным, получается с использованием вложения $\mathrm{GL}_p(K)$ в $\mathrm{SL}_{2p}(K)$, $X\mapsto$ $\mapsto\begin{pmatrix}X & 0\\ 0 & \alpha E_p\end{pmatrix}$, где $\alpha=\left(\dfrac{1}{\operatorname{def}X}\right)^{1/p}$.

Институт математики
Академии наук БССР, Минск

Поступило
5 XI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vogt H.* – Ann. Ecole Norm. Sup., 1889, vol. 6, p. 3–72. 2. *Fricke R., Klein F.* Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Leipzig; B.: Teubner, 1897. 3. *Magnus W.* – Res. Math., 1981, vol. 4, № 2, p. 171–192. 4. *Culler M., Shalen P.* – Ann. Math., 1983, vol. 117, № 1, p. 109–145. 5. *Horowitz R.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1972, vol. 25, № 6, p. 635–649. 6. *Bass H., Lubotzky A.* – Israel J. Math., 1983, vol. 44, № 1, p. 1–22. 7. *Procesi C.* – Ibid., 1974, vol. 19, p. 169–182. 8. *Procesi C.* – Adv. in Math., 1976, vol. 19, № 3, p. 306–351. 9. *Беняш-Кривец В.В.* – Докл. АН БССР, 1986, т. 30, № 5, с. 392–395.

УДК 519.95 МАТЕМАТИКА

Академик В.С. ПУГАЧЕВ, И.Н. СИНИЦЫН, В.И. ШИН

УСЛОВНО ОПТИМАЛЬНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРОЦЕССОВ В НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Теория условно-оптимального оценивания состояния и параметров и условно-оптимальной экстраполяции состояния стохастических систем, описываемых дифференциальными [1–6] или разностными [7, 8] уравнениями, распространяется на задачи дискретного оценивания состояния и параметров стохастических систем, описываемых смешанными системами дифференциальных и разностных уравнений. Для решения задач дискретной фильтрации и экстраполяции дается распространение методов нахождения конечномерных распределений случайных процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, развитых в [9, 10] (см. также [2, 6]), на непрерывно-дискретные системы рассматриваемого типа.

1. Рассмотрим стохастическую систему, p-мерный вектор состояния которой Z содержит непрерывно изменяющиеся компоненты (образующие π-мерный вектор