Доказательство утверждения 2), как известно, вытекает из того, что последовательность чисел $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывающая, откуда следует, что

$$u_n < v_n \leqslant v_1 = (1+1)^2 = 4$$

$$\left[\text{или, при } n \geqslant 5,\ u_n < v_n \leqslant v_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{46\,656}{15\,625} < 3\right].$$

Но неравенство

$$v_n > v_{n+1}$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

или

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

равносильно следующему:

$$\left(\frac{n+1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{1}{n(n+1)^{n+1}},$$

а по лемме

$$\left(\frac{n+1}{n(n+2)}\right)^{n+2} = \frac{1}{(n+1)^{n+2}}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} >$$

$$\frac{1}{(n+1)^{n+2}}\left[1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)}\right] = \frac{1}{(n+1)^{n+2}}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}n}.$$

3. ***Г. Мархасев*** (*Клязьма*). **Вычисление почти треугольных определителей.** *Почти треугольным* будем называть определитель n-го порядка $|a_{ij}|$, в котором $a_{ij}=0$, если $i > j+1$. У него (в отличие от треугольного определителя) помимо не равных нулю элементов, над главной диагональю и на ней имеются не равные нулю элементы в первой диагонали, прилегающей снизу к главной; назовем эту диагональ *поддиагональю*.

Для вычисления такого определителя можно дать правило, играющее в некотором смысле роль правила Саррюса для определителей 3-го порядка.

1. В «первую группу слагаемых» входит единственный член $a_{1n}\prod_{i=1}^{n-1} a_{i+1\,i}$. Ниже приводится определитель, в котором выделены

составляющие это произведение элементы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & \boxed{a_{1n}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \boxed{a_{32}} & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{a_{n\,n-1}} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. «Вторую группу слагаемых» образуют произведения всех элементов поддиагонали, кроме k-го элемента $a_{k+1,k}$, $(k=1, 2, \dots, n-1)$, который заменяется k-м элементом первой строки a_{1k} и $(k+1)$-м элементом последнего столбца a_{k+1n}. Ниже выделены элементы, произведение которых дает k-е слагаемое второй группы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1k}} & \dots a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \boxed{a_{32}} & \dots & a_{3k} & \dots a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k+1\,k} & \dots a_{k+1\,n-1} & \boxed{a_{k+1\,n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \dots & \boxed{a_{n\,n-1}} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Каждое слагаемое «третьей группы слагаемых» есть произведение всех элементов поддиагонали, кроме k-го $a_{k+1,k}$ $(k=1, 2, \dots, n-2)$ и l-го $a_{l+1,l}$ $(l=k+1, \dots, n-1)$. Они заменяются k-м элементом первой строки (a_{1k}), элементом, стоящим на пересечении $(k+1)$-й строки и l-го столбца $(a_{k+1,l})$ и $(l+1)$-м элементом последнего столбца $(a_{l+1,n})$. Ниже выделелы элементы, произведение которых дает слагаемое «третьей группы»:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1k}} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1\,n-1} & \dots & a_{1n} \\
\boxed{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2\,n-1} & \dots & a_{2n} \\
0 & \boxed{a_{32}} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3l} & \dots & a_{3\,n-1} & \dots & a_{3n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a_{k+1\,k} & \dots & \boxed{a_{k+1\,l}} & \dots & a_{k+1\,n-1} & \dots & a_{k+1\,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{l+1\,l} & \dots & a_{l+1\,n-1} & \dots & \boxed{a_{l+1\,n}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \boxed{a_{n\,n-1}} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

Аналогично получают следующие группы слагаемых. Последняя группа содержит единственное слагаемое — произведение элементов главной диагонали.

4. Правило знаков. Слагаемые s-й группы берутся со знаком плюс, если число $n - s$ четно и со знаком минус — в противном случае.

Справедливость указанного правила вычисления почти треугольного определения непосредственно следует из общего правила вычисления определителей n-го порядка.

Сами вычисления иногда удобнее производить в обратном порядке. Предоставляем читателю убедиться в этом на примере вычисления определителя

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
x & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-a & x & a & \dots & 0 & 0 \\
0 & -a & x & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & x & a \\
0 & 0 & 0 & \dots & -a & x
\end{vmatrix}
$$

К вычислению почти треугольных определителей сводится решение системы линейных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1k}x_k + \dots + b_{1n}x_n &= c_1, \\
b_{22}x_2 + \dots + b_{2k}x_k + \dots + b_{2n}x_n &= c_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_{kk}x_k + \dots + b_{kn}x_n &= c_k, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_{nn}x_n &= c_n.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$x_k = (-1)^{k-n-1} \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_n} \begin{vmatrix} b_{k\,k+1} & \dots & b_{kn} & c_k \\ b_{k+1\,k+1} & \dots & b_{k+1\,n} & c_{k+1} \\ 0 & \dots & b_{k+2\,n} & c_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b_{nn} & c_n \end{vmatrix},$$

где

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} & \dots & b_{1i} \\ 0 \;\; b_{22} & \dots & b_{2i} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \;\; 0 & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}.$$

К почти треугольным определителям относятся континуанты[1]).

Через почти треугольные определители выражаются коэффициенты c_k частного $\sum c_i (z - z_0)^i$ от деления ряда $\sum a_i (z - z_0)^i$ на ряд $\sum b_i (z - z_0)^i$ (разумеется, предполагается сходимость двух последних рядов и отсутствие нулей у второго из них). В частности, соответствующие выражения можно найти и для чисел Бернулли[2]).

4. ***Е. Онофраш*** (E. Onofraş, *Яссы, Румыния*). **Одно обобщение теоремы об углах равнобедренного треугольника. 1.** Хорошо известно, что если в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle B$, то и противолежащие этим углам стороны равны: $a = b$. Здесь мы докажем, что *если углы* $\triangle ABC$ *связаны отношением* $A = nB$, *где* n — *целое число, то стороны треугольника связаны зависимостью*

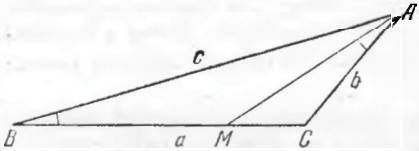

Рис. 1.

$$f_n(a, b, c) = 0, \qquad (1)$$

где f_n — *некоторый многочлен* (порядка не выше чем $2n$), *который может быть определен для каждого* n. При $n = 1$ (т. е. когда $A = B$) соотношение (1) имеет вид $a - b = 0$.

Пусть $n = 2$, т. е. $A = 2B$ (рис. 1). Возьмем на стороне BC такую точку M, что $\angle CAM = \angle MBA$ (т. е. AM — биссектриса угла A). $\triangle ABC \backsim \triangle MAC$; следовательно, $\frac{c}{AM} = \frac{b}{MC} = \frac{a}{b}$, откуда $AM = \frac{bc}{a}$ и $MC = \frac{b^2}{a}$. А так как $\triangle AMB$ равнобедренный, то $BM - AM = 0$, т. е. $\frac{a^2 - b^2}{a} - \frac{bc}{a} = 0$ или

$$f_2(a, b, c) = bc - a^2 + b^2 = 0.$$

[1]) G. Kowalewski, Einführung in die Determinaten theorie, Lpz., 1909, стр. 152.

[2]) См. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.— Л., Гостехиздат, 1950, стр. 257.