Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Г. Курбатов, О функционально-дифференциальных уравнениях с непрерывными коэффициентами,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 6, 850–852

https://www.mathnet.ru/mzm4208

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
28 апреля 2025 г., 12:10:57

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 6 (1989)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Г. Курбатов

Описывается класс операторов, действующих и обратимых одновременно в пространствах C и L_∞. Результат применяется к исследованию функционально-дифференциальных уравнений [1, 2]. Близкие вопросы изучались в [3—5].

Пусть E — конечномерное банахово пространство с нормой $|\cdot|$, G — локально компактная компактно порожденная абелева группа с мерой Хаара λ. Обозначим через L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ пространства классов совпадающих почти всюду измеримых функций x: $G \to E$, ограниченных по соответствующим нормам. Через C обозначим подпространство пространства L_∞, состоящее из непрерывных функций.

Алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве L, будем обозначать через $\mathfrak{L}(L)$.

Для $L = L_p$, C и $M \subset G$ обозначим через L^M подпространство функций, равных нулю вне M. Будем говорить, что *память оператора* $T \in \mathfrak{L}(L)$ *содержится в множестве* H, если $TL^M \subset L^{M-H}$ для всех $M \subset G$. Обозначим через $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(L_p)$ замыкание по норме множества операторов, память которых содержится в относительно компактном множестве.

Через $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(L)$ обозначим множество операторов $T \in \mathfrak{T}$, удовлетворяющих следующему условию. Для любого компактного множества $M \subset G$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V нуля группы G, что при $h \in V$ и $x \in L^M$

$$\|[T, S_h]\,x\| \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

где $[T, S] = TS - ST$, а $(S_h x)(t) = x(t + h)$.

Нетрудно видеть, что классы $\mathfrak{T}(L)$ и $\mathfrak{C}(L)$ образуют банаховы алгебры.

П р е д л о ж е н и е 1. *Алгебры* $\mathfrak{C}(L_\infty)$ *и* $\mathfrak{C}(C)$ *канонически изоморфны.*

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1988

Идея доказательства. Если $T \in \mathfrak{C}(L_\infty)$, то подпространство C инвариантно относительно T. И обратно, если $T \in \mathfrak{C}(C)$, то T непрерывен относительно слабой топологии $\sigma(C, L_1)$ и поэтому расширяется до оператора $T \in \mathfrak{C}(L_\infty)$.

Предложение 2. *Алгебра $\mathfrak{C}(C)$ состоит из операторов вида*

$$(Tx)_{(t)} = \int d\,\mu_t(s)x(t-s),$$

где μ_t $(t \in G)$ — семейство ограниченных мер на G со значениями в $\mathfrak{L}(E)$, удовлетворяющее следующим условиям.

1) *Меры μ_t равномерно ограничены:* $\sup \| \mu_t \| < \infty$.

2) *Соответствие $t \mapsto \mu_t$ непрерывно по норме пространства мер.*

3) *Меры μ_t стремятся к нулю на бесконечности равномерно по t:* $\lim \sup\limits_t \| \mu_t |_{G \setminus K} \| = 0$ *(предел берется по базе фильтра дополнений $G \setminus K$ к всевозможным компактным множествам $K \subset G$).*

В силу условия 2) операторы класса $\mathfrak{C}$ естественно называть *операторами с непрерывными коэффициентами.*

Теорема. *Оператор $T \in \mathfrak{C}(L_\infty) \approx \mathfrak{C}(C)$ обратим в пространствах L_∞ и C одновременно.*

Идея доказательства. Известно [6], что если $T \in \mathfrak{T}$ обратим, то и $T^{-1} \in \mathfrak{T}$. Используя это, можно показать, что если $T \in \mathfrak{C}$ обратим, то и $T^{-1} \in \mathfrak{C}$, и сослаться на предложение 1.

Пусть далее $G = \mathbf{R}$. Обозначим через W^1_∞ пространство абсолютно непрерывных функций, лежащих в L_∞ вместе с производной, с нормой $\| x \| = \| \dot{x} \|_{L_\infty} + \| x \|_{L_\infty}$. А через $C^1 \subset W^1_\infty$ — подпространство непрерывно дифференцируемых функций.

Пусть D, $B \in \mathfrak{C}(L_\infty) \approx \mathfrak{C}(C)$. Рассмотрим оператор $\mathscr{L}x = Dx + Bx$. Он действует из W^1_∞ в L_∞ и из C^1 в C.

Следствие 1. *Операторы $\mathscr{L}\colon W^1_\infty \to L_\infty$ и $\mathscr{L}\colon C^1 \to C$ обратимы одновременно.*

Доказательство состоит в применении теоремы к оператору $\mathscr{L}U^{-1}$, где $Ux = \dot{x} + x$.

Оператор $\mathscr{L}$ называют *вольтерровым*, если

$$\forall\,(t, x)\{[x(s) = 0 \ (s \leqslant t)] \Rightarrow [(\mathscr{L}x)(s) = 0 \ (s \leqslant t)]\}.$$

Предположим, что операторы D и B вольтерровы. Тогда оператор $\mathscr{L}$ также вольтерров. В этом случае для уравнения

$$\mathscr{L}x = f \tag{1}$$

можно рассмотреть *начальную задачу* (подробнее см. [1, 2])

$$(\mathscr{L}x)(s) = f(s) \ (s \geqslant t), \quad x(s) = \varphi(s) \ (s \leqslant t). \tag{2}$$

Здесь $f \in L_\infty$, $\varphi \in W^1_\infty(-\infty, t]$, а решение x ищется в классе W^1_∞.

Можно предположить, что $f \in C$, а $\varphi \in C^1(-\infty, t]$. В этом случае решение x естественно искать в классе C^1. Хорошо известно [1, 2], что необходимым условием существования решения x, имеющего непрерывную производную, является *условие склейки*

$$(\mathscr{L}\varphi)(t) = f(t).$$

Условие склейки представляется неоправданным с прикладной точки зрения. Поэтому считается, что уравнение (1) предпочтительнее изучать в пространстве W_∞^1 вместо C^1. Предположим, что в представлении $(Dx)(t) = \int_0^{+\infty} d\mu_t(s)\, x(t-s)$.

В соответствии с предложением 2 $\mu_t\{0\} = I$ $(t \in \mathbf{R})$. Это условие обеспечивает существование единственного решения начальной задачи (2) на любом конечном отрезке как в W_∞^1, так и в C^1.

Будем говорить, что уравнение (1) *устойчиво по норме* W_∞^1 (*по норме* C^1), если существует такая константа K, что для любой начальной точки $t \in \mathbf{R}$ и любых $f \in L_\infty$ и $\varphi \in W_\infty^1(-\infty, t]$ (любых $f \in C^1$ и $\varphi \in C^1(-\infty, t]$, удовлетворяющих условию склейки) решение x задачи (2) лежит в $W_\infty^1(-\infty, +\infty)$ (в $C^1(-\infty, +\infty)$) и удовлетворяет оценке $\|x\| \leqslant K(\|f\| + \|\varphi\|)$.

Следствие 2. *Уравнение* (1) *устойчиво по норме* W_∞^1 *тогда и только тогда, когда оно устойчиво по норме* C^1.

Таким образом, с математической точки зрения условие склейки можно считать непринципиальным.

Доказательство. Оператор $\mathscr{L}$ назовем *в-обратимым*, если $\mathscr{L}^{-1}$ существует и является вольтерровым. Устойчивость по норме W_∞^1 равносильна [7] в-обратимости оператора $\mathscr{L}\colon W_\infty^1 \to L_\infty$, а устойчивость по норме C^1 — равносильна [8] в-обратимости оператора $\mathscr{L}\colon C^1 \to C$. Из теоремы легко выводится, что оба эти оператора в-обратимы одновременно. Подробные доказательства см. [9].

Воронежский государственный университет

Поступило 30.06.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахмеров Р. Р. и др. Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ. 1982. Т. 19. С. 55—126. 2. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 3. Забрейко П. П. Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: ЯГУ. 1976. С. 39—47. 4. Шнейберг И. Я. Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск: УГУ. 1977. Вып. 1. С. 13—22. 5. Kamenskii G. A., Myshkis A. D., Skubachevskii A. L. Časopis pro pěstování mathematiku // Praha. 1986. № 111. P. 254—266. 6. Курбатов В. Г. Деп. в ВИНИТИ. 1987. № 1307—В87 (Реферат: РЖМат. 1987. 6Б303). 7. Курбатов В. Г. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 27. № 6. С. 963—972. 8. Курбатов В. Г. Деп. в ВИНИТИ, 1980, № 2139—80 (Реферат: РЖМат., 1980, 9Б614). 9. Курбатов В. Г. Деп. в ВИНИТИ, 1986, № 4556—В86 (Реферат: РжМат., 1986, 9Б313).