Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Е. Ю. Касьянов, А. В. Копаев, О решении задачи Дирихле для некоторых многомерных областей методом воспроизводящих ядер,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 6, 17–20

https://www.mathnet.ru/ivm5094

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
16 января 2026 г., 12:36:53

Для построения $f \in S(\Gamma)$ достаточно задать $f(\Phi) = f(\Phi_1^k \circ \Phi_2^l)$, и при этом должны выполняться условия (18), т. е. следует потребовать выполнения условий

$$f(\hat{\Phi}_1 \circ \hat{\Phi}_2) = f_2(\hat{\Phi}_1)\hat{\Phi}_1[f_2(\hat{\Phi}_2)] = f_2(\hat{\Phi}_2)\hat{\Phi}_2[f_1(\hat{\Phi}_1)], \quad \hat{\Phi}_1 = \Phi_1^k, \quad \hat{\Phi}_2 = \Phi_2^l, \tag{19}$$

где $f_1(\hat{\Phi}_1)$ и $f_2(\hat{\Phi}_2)$ вычисляются по формулам (19). В частности, при $k = l = 1$ получаем условие

$$x_1\Phi_1(x_2) = x_2\Phi_2(x_1). \tag{20}$$

Предложение. *Из* (20) *следует* (19) *при любых* k *и* l.

Доказательство. Из (19) и (20) следует

$$f(\Phi_1^k)\Phi_1^k[f(\Phi_2)] = x_1\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_1^{k-1}(x_1)\Phi_1^k(x_2) = x_1\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_1^{k-1}[x_1\Phi_1(x_2)] =$$
$$= x_1\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_1^{k-1}(x_2\Phi_2(x_1)) = x_1\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_1^{k-2}[x_1\Phi(x_2)]\Phi_2[\Phi_1^k(x_1)] = \ldots =$$
$$= x_2\Phi_2[x_1\Phi_1(x_1)\ldots,\Phi_1^{k-1}(x_1)] = f(\Phi_2)\Phi_2[f(\Phi_1^k)],$$

т. е. равенство (19) верно при любых $k = l = 1$.

Применяя метод индукции, предположим, что равенство (19) верно в случае произвольного k, и для $l - 1$ докажем справедливость равенства (19) при выполнении (20) для натурального n. Имеем

$$f_1(\Phi_1^k)\Phi_1^k[f_2(\Phi_2^l)] = x_1\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_1^{k-1}(x_1)\Phi_1^k[x_2\Phi_2(x_2)\ldots\Phi_2^{l-1}(x_2)] =$$
$$= x_1\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_1^{k-1}(x_1)\Phi_1^k[x_2\Phi_2(x_2)\ldots\Phi_2^{l-2}(x_2)]\Phi_1^k \circ \Phi_2^{l-1}(x_2) =$$
$$= x_2\Phi_2(x_2)\ldots\Phi_2^{l-2}(x_2)\Phi_2^{l-2}[x_1\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_1^{k-1}(x_1)\Phi_1^k(x_1)] =$$
$$= x_2\Phi_2(x_2)\ldots\Phi_2^{l-2}(x_2)\Phi_2^{l-1}[x_2\Phi_2(x_1\ldots\Phi_1^{k-2}(x_1)\Phi_1^{k-1}(x_1))] =$$
$$= x_2\Phi_2(x_2)\ldots\Phi_2^{l-1}(x_2)\Phi_2^l[x_1\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_1^{k-1}(x_1)] = f_2(\Phi_2^l)\Phi_2^l[f_1(\Phi_1^k)].$$

Это доказывает предложение.

Соответствующий морфизм σ в данном случае определяется равенством $\sigma(x_2) = \{x_1 \in G(\Phi_1) \mid x_1\Phi_1(x_2) = x_2\Phi_1(x_1)\}$, $x_2 \in G(\Phi_2)$. Заметим, что здесь и в других аналогичных случаях $G(\Phi_1)$ и $G(\Phi_2)$ можно заменить их инвариантными частями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведерников В. И., Ведерников С. В. Геометрия однородных пространств, порожденная морфизмами G-пространств // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1987.— Т. 19.— С. 155—185.
2. Ведерников С. В. Однородные пространства, порожденные группой автоморфизмов группы Ли // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1983.— Т. 15.— С. 165—185.

г. Минск

Поступила 25.01.1990

Е. Ю. Касьянов, А. В. Копаев

УДК 517.575

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ МЕТОДОМ ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДЕР

В двумерном случае теорема Римана позволяет свести решение задачи Дирихле для произвольной односвязной области к решению задачи Дирихле для канонической области — круга. Однако нахождение соответствующего конформного отображения, вообще говоря, ничуть не легче задачи Дирихле,

но в некоторых случаях (напр., для полосы) это конформное отображение удается выразить через элементарные функции. Иначе обстоит дело в случае произвольной размерности. Каноническая область — шар по теореме Лиувилля отображается конформно только на полупространство [1]. Поэтому задача Дирихле для других областей требует специальных методов решения.

В данной работе задача Дирихле решается для области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями. При этом ядро интеграла, решающего задачу, выражается через элементарные функции.

§ 1. Представление воспроизводящих ядер суммами рядов специального вида

Обозначим $(n-1)$-мерную гиперплоскость пространства R^n $(n \geqslant 3)$ через $\prod_r = \{\eta \in R^n : \eta_n = r\}$, а через $\prod_r^+ = \{x \in R^n : x_n > r\}$, $\prod_r^- = \{x \in R^n : x_n > r\}$ — соответствующие полупространства; область, ограниченную двумя гиперплоскостями $\prod_r$ и $\prod_{-r}$, — через $D_r = \{x \in R^n : |x_n| < r\}$. Интеграл Пуассона, решающий задачу Дирихле для полупространства $\prod_r^+$, имеет вид [2]:

$$P_{r,g}(x) = \frac{\Gamma(n/2)(x_n - r)}{\pi^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})}{\left(\sum_{k=1}^{n-1} (\eta_k - x_k)^2 + (x_n - r)^2\right)^{n/2}} d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1}, \tag{1}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Рассмотрим задачу Дирихле для области D_r: найти функцию $f(x)$, гармоническую в области D_r и непрерывную в ее замыкании, включая бесконечно удаленную точку, удовлетворяющую краевым условиям

$$\begin{cases} f('\eta, r) = g_1('\eta); \\ f('\eta, -r) = g_2('\eta), \quad '\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}), \end{cases} \tag{2}$$

где $g_1('\eta)$ и $g_2('\eta)$ — заданные функции, непрерывные в R^{n-1}, $g_1(\infty) = g_2(\infty)$.

Пусть функции $g_k('\eta)$ удовлетворяют условиям $|g_k('\eta)| \leqslant A_k/|'\eta|^{n+\alpha_k-1}$, $k = 1, 2$, где A_k, $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_1('x, 2r - x_n + 4rj) - \sum_{j=1}^{\infty} P_1('x, x_n + 4rj) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} P_2('x, x_n + 4rj) - \sum_{j=0}^{\infty} P_2('x, 2r - x_n + 4rj), \tag{3}$$

где $'x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $P_1(x) = P_{r,g_1}(x)(x_n > r)$, $P_2(x) = P_{-r,g_2}(x)(x_n > -r)$.

В силу условий, налагаемых на плотность интеграла Пуассона, каждый из рядов в правой части формулы (3) сходится абсолютно в области D_r. Поэтому формула (3), как нетрудно проверить, определяет единственное решение задачи Дирихле (2).

Пусть

$$K_n(y, z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (z + 4rj)(y + (z + 4rj)^2)^{-n/2}, \quad y \geqslant 0, \quad z = 4rj, \quad j \text{ — целое}.$$

Тогда, меняя в формуле (3) порядок суммирования и интегрирования, получим

$$f(x) = \Gamma(n/2)\pi^{-n/2} \int_{R^{n-1}} g_1('\eta) K_n\left(\sum_{k=1}^{n-1} (\eta_k - x_k)^2, \ r - x_n\right) dV +$$

$$+\Gamma(n/2)\pi^{-n/2}\int\limits_{R^{n-1}} g_2(\eta)K_n\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(\eta_k-x_k)^2,\ r+x_n\Big)dV, \tag{4}$$

где $dV=d\eta_1\times\ldots\times d\eta_{n-1}$. Заметим, что $K_{m+2}(y,\ z)=-(2/m)\,\partial K_m(y,\ z)/\partial y$. Поэтому для решения задачи Дирихле для произвольного n достаточно, используя указанное выше рекуррентное соотношение, решить эту задачу для $n=3$ и $n=4$.

§ 2. Решение задачи Дирихле для $n=4$

Имеем

$$K_4(y,\ z)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(z+4rj)(y+(z+4rj)^2)^{-2}=$$

$$=\frac{i}{64r^2\sqrt{y}}\Big[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Big(j+\frac{z}{4r}+\frac{i\sqrt{y}}{4r}\Big)^{-2}-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\Big(j+\frac{z}{4r}-\frac{i\sqrt{y}}{4r}\Big)^{-2}\Big]=$$

$$=\frac{i\pi^2}{64r^2\sqrt{y}}\Big[\sin^{-2}\Big(\frac{\pi z}{4r}+\frac{i\pi\sqrt{y}}{4r}\Big)-\sin^{-2}\Big(\frac{\pi z}{4r}-\frac{i\pi\sqrt{y}}{4r}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{\pi^2}{16r^2\sqrt{y}}\sin\Big(\frac{\pi z}{2r}\Big)\operatorname{sh}\Big(\frac{\pi\sqrt{y}}{2r}\Big)\Big(\operatorname{ch}\Big(\frac{\pi\sqrt{y}}{2r}\Big)-\cos\Big(\frac{\pi z}{2r}\Big)\Big)^{-2}. \tag{5}$$

Таким образом, $f(x)$ определяется по формуле (4) при $n=4$, а $K_4(y,\ z)$ — по формуле (5) при

$$y=\sum_{k=1}^{3}(\eta_k-x_k)^2,\ z=r-x_4\,(z=r+x_4).$$

Так как в двумерном случае решение задачи Дирихле для области D_r определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{4r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(\eta)\cos\Big(\frac{\pi x_2}{2r}\Big)}{\operatorname{ch}\Big(\frac{\pi}{2r}(\eta-x_1)\Big)-\sin\Big(\frac{\pi x_2}{2r}\Big)}d\eta+\frac{1}{4r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_2(\eta)\cos\Big(\frac{\pi x_2}{2r}\Big)}{\operatorname{ch}\Big(\frac{\pi}{2r}(\eta-x_1)\Big)+\sin\Big(\frac{\pi x_2}{2r}\Big)}d\eta,$$

которая получается тождественным преобразованием формулы Палатини [3], то формула (4) верна и при $n=2$. При этом

$$K_2(y,\ z)=\frac{\pi}{4r}\sin\Big(\frac{\pi z}{2r}\Big)\Big(\operatorname{ch}\Big(\frac{\pi\sqrt{y}}{2r}\Big)-\cos\Big(\frac{\pi z}{2r}\Big)\Big)^{-1},\ K_4(y,\ z)=-\frac{\partial K_2(y,\ z)}{\partial y}.$$

§ 3. Решение задачи Дирихле для $n=3$

Используя формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x^2-(y\cos t+z\sin t)^2}{(x^2+(y\cos t+z\sin t)^2)^2}dt=+(-)\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ x>0\ (x<0),$$

из работы [4], решение задачи Дирихле (3) запишем в виде

$$f(x)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Omega}g_1(\eta)L(r,\ x_3,\ u)d\mu+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Omega}g_2(\eta)L(r,\ -x_3,\ u)d\mu,$$

где

$$L(r,\ x_3,\ u)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(r-x_3+4rj)^2-u^2}{((r-x_3+4rj)^2+u^2)^2}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(3r+x_3+4rj)^2-u^2}{((3r+x_3+4rj)^2+u^2)^2},$$

$$u=u('\eta-'x,\ t)=(\eta_1-x_1)\cos t+(\eta_2-x_2)\sin t,$$

$$\Omega=R^2\times[0,\ 2\pi],\ d\mu=d\eta_1\times d\eta_2\times dt.$$

Учитывая теперь, что

$$\sum_{j=0}^{\infty}(z+j)^{-2}=\psi'(z)\ (z\neq 0,\ -1,\ \ldots),$$

где $\psi(z)=(\ln\Gamma(z))'$, и что для $\psi'(z)$ имеет место интегральное представление

$$\psi'(z)=\int_0^{+\infty}\tau(1-e^{-\tau})^{-1}e^{-\tau z}d\tau\ (\operatorname{Re} z>0),$$

окончательно имеем

$$f(x)=\frac{1}{64\pi^2r^2}\int_{\Omega}d\mu\int_0^{+\infty}g_1('\eta)\tau\operatorname{sh}^{-1}(\tau/2)\cos\left(\frac{\tau u}{4r}\right)\operatorname{sh}\left(\tau\frac{r+x_3}{4r}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{64\pi^2r^2}\int_{\Omega}d\mu\int_0^{+\infty}g_2('\eta)\tau\operatorname{sh}^{-1}(\tau/2)\cos\left(\frac{\tau u}{4r}\right)\operatorname{sh}\left(\tau\frac{r-x_3}{4r}\right)d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— 3-е изд., доп.— М.: Наука, 1984.— 320 с.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.— 296 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного.— 4-е изд., испр.— М.: Наука, 1973.— 736 с.
4. Копаев А. В. О формуле Уиттекера для гармонических функций.— Орел, 1988.— 7 с.— Деп. в ВИНИТИ 20.07.88, № 5825 — В88.

г. Чита
г. Химки Моск. обл.

Поступила
22.12.1989

А. М. Кытманов

УДК 517.554

О ЧИСЛЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматривается вопрос о нахождении числа корней систем алгебраических уравнений в областях, ограниченных алгебраической поверхностью. Эта задача решается с помощью метода исключения, возникшего на основе многомерного логарифмического вычета [1]. Затем рассматривается вопрос о нахождении суммы значений заданной гладкой функции в корнях некоторой (вообще говоря, не алгебраической) системы уравнений в R^n.

1°. Пусть $f_j(z)$ — многочлены от переменной $z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\in C^n$, $j=1,\ \ldots,\ n$. Рассмотрим систему

$$f_1(z)=0,\ \ldots,\ f_n(z)=0. \tag{1}$$

Будем предполагать, что система (1) невырождена, т. е. старшие однородные части P_j многочленов f_j, $j=1,\ \ldots,\ n$, имеют только одну общую точку — начало координат. Как известно, система (1) тогда имеет конечное число корней в C^n. Обозначим это множество корней через E_f. Для систем такого вида в монографии [1] (§ 21) приведены формулы (21.9), позволяющие вычислять в конечном виде (через коэффициенты многочленов f_j) сумму значений любого многочлена P в корнях системы (1).