Ю. В. Дымченко, Равенство емкости и модуля конденсатора на поверхности, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 112–133

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

Ю. В. Дымченко

РАВЕНСТВО ЕМКОСТИ И МОДУЛЯ КОНДЕНСАТОРА НА ПОВЕРХНОСТИ

1. Основные определения и обозначения

Пусть G – область в $\overline{R^n}$, E_0, E_1 – замкнутые непересекающиеся множества из $\overline{G}$. Тройку множеств (E_0, E_1, G) с указанными свойствами назовем конденсатором. Обозначим через $F = (G, ds_F^2)$ поверхность над G с положительно определенной метрикой

$$ds_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)dx_i dx_j,$$

где $g_{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, – непрерывные функции на G, $g(x) = \det(g_{ij}(x))$, $d\sigma = \sqrt{g(x)}dx$ – элемент объема поверхности F. Обозначим через $B(x,r)$ открытый шар с центром в точке x радиуса r, а через $m(A)$ – n-мерную меру Лебега множества $A \subset R^n$.

Пусть $\varphi : R^+ \mapsto R^+$ – N-функция (т. е. выпуклая функция φ такая, что $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi'(t) = \infty$, см. [2]), удовлетворяющая условию: существует C такое, что для любого $t > 0$

$$\varphi(2t) \leqslant C\varphi(t). \tag{1}$$

Это условие равносильно следующему [2]: существует $p > 1$ такое, что

$$1 < \frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leqslant p$$

для любого $t > 0$. Отсюда следует, что для любых $a \geqslant 1$ и $t > 0$ верно неравенство

$$\varphi(at) \leqslant a^p \varphi(t). \tag{2}$$

Если функция φ к тому же еще такова, что $\varphi(\sqrt{t})$ выпукла, то выполняется неравенство

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \varphi\left(\frac{|x-y|}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right),$$

Работа выполнена при поддержке программы "Университеты России" (грант No. 991282).

если x, $y \geqslant 0$. Действительно, в силу выпуклости $\varphi(\sqrt{t})$, имеем

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\varphi\left(\frac{|x-y|}{2}\right)=\varphi\left(\sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}}\right)+\varphi\left(\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varphi\left(\sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}+\frac{(x-y)^2}{4}}\right)$$

$$=\varphi\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\varphi(\sqrt{x^2})+\varphi(\sqrt{y^2})\right)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x)+\varphi(y)\right).$$

Отсюда интегрированием получим для неотрицательных функций f, $g : G \mapsto R$ неравенство

$$\int\varphi\left(\frac{f(x)+g(x)}{2}\right)d\sigma+\int\varphi\left(\frac{|f(x)-g(x)|}{2}\right)d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\int\varphi(f(x))d\sigma+\int\varphi(g(x))d\sigma\right),$$

которое переходит в известное неравенство Кларксона (см. [4]), если $\varphi(t)=t^p$, $p\geqslant 2$, $g_{ij}(x)=\delta_{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$ (здесь и далее, если в интеграле не указаны пределы интегрирования, то подразумевается интегрирование по G).

Кривой назовем образ открытого интервала при непрерывном отображении. Пусть дано некоторое семейство кривых $\Gamma\subset G$. (φ,F)-модулем семейства Γ назовем величину

$$M_{\varphi,F}(\Gamma)=\inf\int\varphi(\rho)d\sigma,$$

где инфимум берется по борелевским неотрицательным функциям таким, что для любой кривой $\gamma\in\Gamma$ выполнено $\int\limits_\gamma\rho ds_F\geqslant 1$. Такие функции ρ называются допустимыми (будем пользоваться обозначением $\rho\wedge M_{\varphi,F}(\Gamma)$). Инфимум в определении модуля семейства кривых можно считать по допустимым функциям, полунепрерывным снизу в R^n, так как для любой борелевской функции можно найти сходящуюся к ней монотонно возрастающую последовательность полунепрерывных снизу функций.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для почти всех кривых, если семейство кривых, для которых оно неверно, имеет (φ, F)-модуль, равный нулю. Легко видеть, что инфимум в определении указанного модуля можно брать по борелевским неотрицательным функциям, для которых неравенство $\int\limits_{\gamma} \rho ds_F \geqslant 1$ выполняется лишь для почти всех $\gamma \in \Gamma$. Такие функции назовем почти допустимыми для $M_{\varphi,F}(\Gamma)$. Функцию ρ назовем экстремальной для $M_{\varphi,F}(\Gamma)$, если она почти допустима и

$$M_{\varphi,F}(\Gamma) = \int \varphi(\rho) d\sigma. \tag{4}$$

Пусть кривая γ задана параметризацией $x(t)$, $t_1 < t < t_2$. По определению, кривая γ соединяет точки a и b из R^n, если существуют пределы

$$\lim_{t \to t_1} x(t) = a \quad \text{и} \quad \lim_{t \to t_2} x(t) = b.$$

Будем говорить, что кривая соединяет два множества, если она соединяет какую-либо точку одного множества с некоторой точкой другого множества. С помощью квадратичной формы ds_F определим длину кривой $\gamma \subset G$ и расстояние между двумя точками x и y из G:

$$s_F(\gamma) = \int\limits_{\gamma} ds_F, \qquad d_F(x, y) = \inf\{s_F(\gamma), \gamma \text{ соединяет } x \text{ и } y \text{ в } G\}.$$

Если дана последовательность кривых γ_k, $k = 1, 2, \dots$ и кривая γ, то будем говорить, что γ_k сходятся к γ $(\gamma_k \to \gamma)$, если существуют такие параметризации $x_k(t)$ и $x(t)$ кривых γ_k и γ, $0 < t < 1$, что $x_k(t) \rightrightarrows x(t)$ на $(0, 1)$ при $k \to \infty$, где равномерная сходимость понимается по метрике ds_F.

Пространством $L_{\varphi,F}(G)$ назовем пространство функций u, для которых $\int\limits_G \varphi(u) d\sigma < \infty$. Аналогично [2], определим норму в нем следующим образом:

$$||u||_{\varphi,F} = \sup\left\{ \int uv\, d\sigma, \quad \int \psi(v) d\sigma \leqslant 1 \right\},$$

где ψ – N-функция, дополнительная к φ (т.е. $\psi(u) = \sup\limits_{v>0}(uv - \varphi(v))$, $u > 0$).

Введем в рассмотрение билинейную форму

$$\mathcal{E}_F(a,b) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)a_i b_j,$$

где $a,b \in R^n$, а матрица (g^{ij}) обратна матрице (g_{ij}). Соответствующую квадратичную форму $\mathcal{E}_F(a,a)$ будем обозначать через $\mathcal{E}_F(a)$.

Пространством $L^1_{\varphi,F}(G)$ назовем пространство функций u с $\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla u))d\sigma < \infty$. Норму в $L^1_{\varphi,F}(G)$ определим соотношением:

$$\|u\|_{L^1_{\varphi,F}(G)} = \sup\left\{ \int \mathcal{E}_F(\nabla u, \nabla v)\, d\sigma, \quad \int \psi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla v))d\sigma \leqslant 1 \right\}.$$

Введем также пространство функций $L_{n,\varphi,F}(G)$, состоящее из тех функций $u = (u_1, \ldots, u_n) : G \mapsto R^n$, для которых

$$\int \varphi\left(\mathcal{E}_F^{1/2}(u)\right) d\sigma < \infty.$$

Для него норму определим следующим образом:

$$\|u\|_{n,\varphi,F} = \sup\left\{ \int \mathcal{E}_F(u,v)\, d\sigma,\ \int \psi\left(\mathcal{E}_F^{1/2}(v)\right) d\sigma \leqslant 1 \right\}.$$

Если $g_{ij} = \delta_{ij}$, $i,j = 1,\ldots,n$, то введенные пространства обозначим соответственно через $L_\varphi(G)$, $L^1_\varphi(G)$ и $L_{n,\varphi}(G)$.

Пусть Γ – семейство локально спрямляемых кривых, соединяющих E_0 и E_1 в G. Тогда (φ,F)-модуль этого семейства кривых назовем (φ,F)-модулем конденсатора (E_0,E_1,G) и обозначим через$M_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)$.

φ-емкость конденсатора (E_0,E_1,G) определим следующим равенством:

$$C_{\varphi,F}(E_0,E_1,G) = \inf \int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla v))d\sigma,$$

где инфимум берется по локально липшицевым в $G \setminus \{\infty\}$ функциям v, удовлетворяющим условиям: $0 \leqslant v \leqslant 1$ в G, $\lim\limits_{x\to E_j} v(x) = j$, $j = 0,1$. Такие функции v назовем допустимыми для $C_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)$. Функцию u назовем экстремальной функцией для емкости $C_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)$, если она является пределом в $L^1_{\varphi,F}(G)$ некоторой последовательности допустимых функций и

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla u))d\sigma = C_{\varphi,F}(E_0,E_1,G).$$

Пусть даны открытые множества D_k, $k=1,2,\dots$ и D. Будем говорить, что множества D_k исчерпывают D изнутри, если $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = D$, $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$.

2. Вспомогательные утверждения

При наложенных условиях на функцию φ можно доказать, используя методы из [2], что сходимость последовательности u_k к u по норме в рассматриваемых пространствах эквивалентна сходимости в среднем, т.е. что если $\|u_k - u\| \to 0$ при $k\to\infty$, то

$$\int \varphi(|u_k - u|)d\sigma \to 0$$

для пространства $L_{\varphi,F}(G)$,

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_k - u))d\sigma \to 0$$

для $L_{n,\varphi,F}(G)$ и

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla u_k - \nabla u))d\sigma \to 0$$

для $L^1_{\varphi,F}(G)$. Докажем это утверждение, например, для пространства $L_{n,\varphi,F}(G)$.

Лемма 1. *Если функция φ удовлетворяет условию* (1)*, то из условия*

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m)) \to 0 \quad \textit{при} \quad m\to\infty$$

следует, что $\|u_m\| \to 0$ при $m\to\infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем натуральное k такое, что $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. В силу неравенства (1),

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(2^k u_m)) \to 0$$

при $m \to \infty$, т.е. при больших m

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(2^k u_m)) < 1.$$

Используя неравенство Юнга, для любой функцияя $w \in L_{n,\psi,F}(G)$ такой, что $\int \psi(\mathcal{E}_F^{1/2}(w)) \leqslant 1$, получаем

$$\int \mathcal{E}_F(2^k u_m, w)d\sigma \leqslant \int \mathcal{E}_F^{1/2}(2^k u_m)\mathcal{E}_F^{1/2}(w)d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(2^k u_m)) + \int \psi(\mathcal{E}_F^{1/2}(w)) < 2.$$

Отсюда, в силу произвольности w, вытекает неравенство $2^k \|u_m\|_{n,\varphi,F} < 2$, т.е. $\|u_m\|_{n,\varphi,F} < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $\|u\|_{n,\varphi,F} \leqslant 1$, *то* $v = \frac{u\varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u))}{\mathcal{E}_F^{1/2}(u)} \in L_{n,\psi,F}(G)$ *и* $I(v) = \int \psi(\mathcal{E}_F^{1/2}(v))d\sigma \leqslant 1$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$\int \mathcal{E}_F(u,v)d\sigma \leqslant \|u\|_{n,\varphi,F} I(v) \tag{5}$$

для $u \in L_{n,\varphi,F}(G)$ и любой функции $v \in L_{n,\psi,F}(G)$ такой, что $I(v) > 1$.

Из определения выпуклой функции вытекает, что $\psi(\alpha t) \leqslant \alpha\psi(t)$ при $\alpha < 1$. Следовательно,

$$\psi\left(\frac{\mathcal{E}_F^{1/2}(v)}{I(v)}\right) \leqslant \frac{\psi\left(\mathcal{E}_F^{1/2}(v)\right)}{I(v)}.$$

Отсюда

$$\int \psi\left(\frac{\mathcal{E}_F^{1/2}(v)}{I(v)}\right) d\sigma \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$\int \mathcal{E}_F\left(u, \frac{v}{I(v)}\right) d\sigma \leqslant \|u\|_{n,\varphi,F},$$

и мы получаем неравенство (5).

Пусть теперь $\|u\|_{n,\varphi,F} \leqslant 1$, G_m, $m = 1, 2, \ldots$, – исчерпание G областями конечной лебеговой меры,

$$u_m(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G_m \cap \{x : \mathcal{E}_F^{1/2}(u(x)) \leqslant m\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Последовательность u_m сходится в $L_{n,\varphi,F}(G)$ к u при $m \to \infty$ в среднем, следовательно, и по норме. По построению, $\varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m)) \in L_{n,\psi,F}(G)$. Если утверждение леммы неверно, то существует M такое, что при $m > M$

$$\int \psi\left(\varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m))\right) d\sigma > 1.$$

Используя известные свойства выпуклых функций и неравенство (5) с $v = \frac{u_m \varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m))}{\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m)}$, получим, что при $m > M$ для некоторого $c > 0$

$$\int \psi\left(\varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m))\right) d\sigma <$$

$$\int \left\{\psi\left(\varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m))\right) d\sigma + \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m))\right\} d\sigma - c =$$

$$\int \mathcal{E}_F^{1/2}(u_m)\varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m)) d\sigma - c \leqslant \|u_m\|_{n,\varphi,F} \int \psi\left(\varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_m))\right) d\sigma - c.$$

Это противоречит тому, что $\|u_m\|_{n,\varphi,F} \to \|u\|_{n,\varphi,F} \leqslant 1$ при $m \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $\|u\|_{n,\varphi,F} \leqslant 1$, *то* $\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(u)) d\sigma \leqslant \|u\|_{n,\varphi,F}$.

Доказательство. Пусть v – функция, удовлетворяющая условию предыдущей леммы. Имеем следующую цепочку соотношений:

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(u)) d\sigma < \int \mathcal{E}_F^{1/2}(u)\varphi'(\mathcal{E}_F^{1/2}(u)) d\sigma = \int \mathcal{E}_F(u, v) d\sigma \leqslant \|u\|_{n,\varphi,F}.$$

Из леммы 3 следует, что если последовательность $u_m \in L_{n,\varphi,F}(G)$ сходится по норме, то она сходится и в среднем.

Используя технику из [2], можно доказать, что пространства $L_{\varphi,F}(G)$ и $L_{n,\varphi,F}(G)$ полны. Докажем, например, полноту пространства $L_{n,\varphi,F}(G)$.

Теорема 1. *Пространство $L_{n,\varphi,F}(G)$ полно.*

Доказательство. Пусть дана фундаментальная в $L_{n,\varphi,F}(G)$ последовательность u_m, т. е.

$$\lim_{p,q\to\infty} \|u_p - u_q\|_{n,\varphi,F} = 0.$$

Тогда

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(u_p - u_q))d\sigma \to 0$$

при p, $q \to \infty$. Отсюда следует, что последовательность $u_m(x)$ сходится по мере. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(x)$, сходящуюся почти всюду в G к некоторой функции $u_0(x)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $p, q > N$ и для любой функции $v \in L_{n,\psi,F}(G)$, удовлетворяющей условию $\int \psi(\mathcal{E}_F^{1/2}(v))d\sigma \leqslant 1$, выполнено неравенство

$$\int \mathcal{E}_F(u_{m_p} - u_{m_q}, v)d\sigma < \varepsilon.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $q \to \infty$ и используя лемму Фату, получим:

$$\int \mathcal{E}_F(u_{m_p} - u_0, v)d\sigma \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\|u_{m_p} - u_0\|_{n,\varphi,F} \leqslant \varepsilon$, поэтому $u_{m_p} - u_0 \in L_{n,\varphi,F}(G)$, $u_0 \in L_{n,\varphi,F}(G)$ и u_{m_k} сходится по норме к u_0 в $L_{n,\varphi,F}(G)$. Таким образом, $u_m \to u_0$ в $L_{n,\varphi,F}(G)$ при $k \to \infty$.

Лемма 4. *Пусть Γ – некоторое семейство кривых в R^n. $M_{\varphi,F}(\Gamma) = 0$ в том и только в том случае, когда существует неотрицательная функция $h \in L_{\varphi,F}(R^n)$ такая, что $\int\limits_\gamma h ds_F = \infty$ для любой $\gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Пусть существует функция h с требуемыми свойствами. Тогда для любого натурального k $\frac{h}{k} \wedge M_{\varphi,F}(\Gamma)$. Отсюда

$$M_{\varphi,F}(\Gamma) \leqslant \int \varphi\left(\frac{h}{k}\right) d\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Обратно, пусть $M_{\varphi,F}(\Gamma) = 0$. Тогда существуют кривые $\rho_k \wedge M_{\varphi,F}(\Gamma)$ такие, что $\int \varphi(\rho_k)d\sigma < (2C)^{-k}$, где C – константа из (1).

Пусть $h=\varphi^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} C^k\varphi(\rho_k)\right)$. Имеем:

$$\int \varphi(h)d\sigma=\sum_{k=1}^{\infty} C^k \int \varphi(\rho_k)d\sigma<\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}=1$$

и вместе с тем для любой кривой $\gamma\in\Gamma$

$$\int\limits_{\gamma} h ds_F=\int\limits_{\gamma} \varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} C^k\varphi(\rho_k)\right) ds_F \geqslant \int\limits_{\gamma} \varphi^{-1}\left(C^k\varphi(\rho_k)\right) ds_F \geqslant$$

$$\int\limits_{\gamma} \varphi^{-1}\left(\varphi(2^k\rho_k)\right) ds_F=2^k\int\limits_{\gamma}\rho_k ds_F\geqslant 2^k\to\infty \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* Γ *– семейство кривых в* R^n. *Если* $\int\varphi(|\rho_k-\rho|)d\sigma\to 0$ *при* $k\to\infty$, *то существует подпоследовательность* ρ_{k_l} *такая, что для любого* $\varepsilon>0$ *существует семейство* $\Gamma_\varepsilon\subset\Gamma$, *удовлетворяющее условиям:* $M_{\varphi,F}(\Gamma_\varepsilon)<\varepsilon$ *и* $\int\limits_{\gamma}|\rho_{k_l}-\rho|ds_F \rightrightarrows 0$ *при* $l\to\infty$ *на* $\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon$.

Доказательство. Пусть k_l – такая последовательность натуральных чисел, для которой

$$\int\varphi(|\rho_{k_l}-\rho|)d\sigma<(2C)^{-k}.$$

Обозначим

$$f_l=|\rho_{k_l}-\rho|,\quad A_l=\{\gamma\in\Gamma:\int\limits_{\gamma} f_l ds_F>2^{-l}\},\quad B_s=\bigcup_{l>s}A_l.$$

Пусть s_0 такое, что $2^{-s_0}<\varepsilon$. Покажем, что за Γ_ε можно принять семейство B_{s_0}. Имеем:

$$M_{\varphi,F}(A_l)\leqslant\int\varphi(2^l f_l)d\sigma\leqslant C^l\int\varphi(f_l)d\sigma<2^{-l},$$

$$M_{\varphi,F}(B_{s_0})\leqslant\sum_{l>s_0}M_{\varphi,F}(A_l)\leqslant 2^{-s_0}<\varepsilon,$$

а на $\Gamma \setminus B_{s_0}$ для всех $l > s_0$ получаем

$$\int\limits_{\gamma} f_l ds_F \leqslant 2^{-l},$$

т.е. $\int\limits_{\gamma} |\rho_{k_l} - \rho| ds_F \rightrightarrows 0$.

В качестве следствия получаем обобщение для случая (φ, F)-модуля результата из [8], которое будет использоваться далее.

Следствие. *Если* $\int \varphi(|\rho_k - \rho|)d\sigma \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то существует подпоследовательность* ρ_{k_l} *такая, что* $\int\limits_{\gamma} |\rho_{k_l} - \rho| ds_F \to 0$ *при* $l \to \infty$ *для почти всех* $\gamma \in \Gamma$.

Действительно, возьмем в лемме $\varepsilon = \frac{1}{m}$. Тогда существуют Γ_m с $M_{\varphi,F}(\Gamma_m) < \frac{1}{m}$ такие, что для любого натурального m на $\Gamma \setminus \Gamma_m$ $\int\limits_{\gamma} |\rho_{k_l} - \rho| ds_F \to 0$, следовательно, сходимость имеет место на $\Gamma \setminus \Gamma_0$, где $\Gamma_0 = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Gamma_m$ и $M_{\varphi,F}(\Gamma_0) = 0$.

Теорема 2. *Пространство* $L^1_{\varphi,F}(G)$ *полно.*

Доказательство. Пусть последовательность u_k фундаментальна в $L^1_{\varphi,F}(G)$, т.е.

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla u_k - \nabla u_l))d\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad k,\, l \to \infty.$$

Докажем, что существует функция $u \in L^1_{\varphi,F}(G)$ такая, что $u_k \to u$ при $k \to \infty$ в $L^1_{\varphi,F}(G)$.

Можно считать, что $m(G) < \infty$ и на G $c_1|a|^2 \leqslant \mathcal{E}_F(a) \leqslant c_2|a|^2$, $c_1 ds^2 \leqslant ds_F^2 \leqslant c_2 ds^2$, $c_1 d\sigma \leqslant dx \leqslant c_2 d\sigma$ (c_1, c_2 – некоторые положительные константы), иначе разбивая $G \setminus \{\infty\}$ на счетное число множеств G_l, $l = 1, 2, \ldots$, компактно лежащих в G и удовлетворяющих вышеприведенным условиям, получим для каждого из этих множеств функцию $u^l \in L^1_{\varphi,F}(G_l)$ такую, что $u_k \to u^l$ на G_l при $k \to \infty$. Далее, положив $u = u^l$ на G_l, $l = 1, 2, \ldots$, легко получаем, что $u \in L^1_{\varphi,F}(G)$ и $u_k \to u$ на G.

При таких условиях на G пространства $L_{\varphi,F}(G)$, $L^1_{\varphi,F}(G)$ и $L_{n,\varphi,F}(G)$ совпадают соответственно с пространствами $L_\varphi(G)$,

$L_\varphi^1(G)$ и $L_{n,\varphi}(G)$. По теореме 1, существует функция $f \in L_{n,\varphi,F}(G)$ такая, что

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla u_k - f))d\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, по следствию из леммы 5 существует подпоследовательность u_{k_l}, для которой

$$\int\limits_\gamma |\nabla u_{k_l} - f| ds_F \leqslant c_1^{-1/2} \int\limits_\gamma \mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla u_{k_l} - f) ds_F \to 0, \quad \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0,$$

где Γ – семейство всех локально спрямляемых кривых в G, а $M_{\varphi,F}(\Gamma_0) = 0$. По лемме 4 существует функция $h \in L_{\varphi,F}(G)$ такая, что $\int\limits_\gamma h ds_F = \infty$ для любой $\gamma \in \Gamma_0$. По неравенству Гельдера имеем (см. [2]):

$$\int (1 + |x|)^{1-n} h(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int \varphi(h) dx + 1\right) \left(\int \psi((1 + |x|)^{1-n}) dx + 1\right) \leqslant$$

$$\left(\int \varphi(h) dx + 1\right) (m(G)\psi(1) + 1) < \infty.$$

Значит, по теореме из [8], потенциал U_1^h является суммируемой функцией в G и множество E тех точек из G, где $U_1^h = \infty$, имеет лебегову меру 0. Дальнейшее доказательство проводится так же, как и в [8].

Пусть

$$0 < \varepsilon < 1/2, \quad K = \left\{\eta \in R^n : \frac{1}{2} \leqslant |\eta| \leqslant \frac{3}{2}\right\},$$

G_k – открытые множества, исчерпывающие изнутри $G \setminus (E_0 \cup E_1)$.

Функции

$$\log \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\eta_i\eta_j}, \ \log \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\infty)\eta_i\eta_j} \quad \text{и} \quad \log\sqrt{g(x)}$$

непрерывны соответственно на $G \times K$, K и G (вторая функция рассматривается, если $\infty \in G$). Следовательно, для любого k

они равномерно непрерывны на $(\overline{G}_k \setminus \{\infty\}) \times K$, K и $\overline{G}_k \setminus \{\infty\}$, соответственно, т.е. для данного $\varepsilon > 0$ существует δ_k такое, что для любых x', $x'' \in \overline{G}_k$: $|x' - x''| < \delta_k$ и для любых η', $\eta'' \in K$ таких, что $|\eta' - \eta''| < \delta_k$, имеют место неравенства:

$$\sqrt{\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x')\eta'_i\eta'_j}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x'')\eta''_i\eta''_j}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\sqrt{\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\infty)\eta'_i\eta'_j}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\infty)\eta''_i\eta''_j}} < 1 + \varepsilon, \qquad \sqrt{\frac{g(x')}{g(x'')}} < 1 + \varepsilon \tag{6}$$

(второе неравенство опускается, если $\infty \notin G$).

Пусть $d_k = d(\partial G_k, \partial G_{k+1})$, $k \geqslant 1$. Положим для единообразия рассуждений $d_0 = \delta_0 = \infty, G_0 = G_{-1} = \emptyset$.

Лемма 6. *Существует функция $\alpha_\varepsilon(x) \in C^\infty(G \setminus (E_0 \cup E_1))$, удовлетворяющая условиям:*

1. $0 < \alpha_\varepsilon(x) < 1$, $\alpha_\varepsilon(x) < d(x, \partial G \cup E_0 \cup E_1)$, $|\nabla \alpha_\varepsilon(x)| < \min(1, \varepsilon)$, *если* $x \in G \setminus (E_0 \cup E_1)$,
2. $\alpha_\varepsilon(x) < d_k$, $\alpha_\varepsilon(x) < \delta_{k+1}$, $|\nabla \alpha_\varepsilon(x)| < \delta_{k+1}$ *при* $x \in G_k \setminus G_{k-1}$.

Доказательство. Пусть $a_k = \min\{1, d_k, \delta_{k+1}\}$, $b_k = \min\{1, \delta_{k+1}, \varepsilon\}$. Существует функция $\beta_k(x) \in C^\infty(G)$ такая, что $\beta_k(x) \geqslant 0$ в G, $\beta_k(x) > 0$ в $G_k \setminus G_{k+1}$ и $\beta_k(x) = 0$ на $(G \setminus G_{k+1}) \cup G_{k-2}$. Умножая на константу, можно считать, что

$$\beta_k(x) < \frac{1}{3}\min\{a_{k-1}, a_k, a_{k+1}\}, \quad |\nabla \beta_k(x)| < \frac{1}{3}\min\{b_{k-1}, b_k, b_{k+1}\},$$

$$3\beta_k(x) < d(x, \partial G \cup E_0, \cup E_1), \quad \text{если} \quad x \in G_{k+1} \setminus G_{k-2}.$$

Тогда функция $\alpha_\varepsilon(x) = \sum\limits_k \beta_k(x)$ удовлетворяет условиям леммы.

Теорема 3. *Инфимум в определении $M_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)$ можно брать только по непрерывным в $G\setminus(E_0\cup E_1)$ допустимым функциям.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon>0$ и функция $\rho\wedge M_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)$ такова, что $\int\varphi(\rho)d\sigma < M_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)+\varepsilon$. Пусть также $\chi(x)\in C^\infty(R^n)$, $\operatorname{supp}\chi\subset B(0,1)$, $\int\chi(x)dx=1$. Рассмотрим функцию

$$\rho_\varepsilon(x)=\int\limits_{B(0,1)}\rho(x+\alpha_\varepsilon(x)y)\chi(y)dy.$$

Очевидно, что $\rho_\varepsilon(x)\in C^\infty(G\setminus(E_0\cup E_1))$.

Пусть $\gamma\in\Gamma$. Тогда

$$\int\limits_\gamma\rho_\varepsilon\,ds_F=\int\limits_\gamma\int\limits_{B(0,1)}\rho(x+\alpha_\varepsilon(x)y)\chi(y)dy\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)dx_idx_j}=$$

$$\int\limits_{B(0,1)}\chi(y)dy\int\limits_\gamma\rho(x+\alpha_\varepsilon(x)y)\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)dx_idx_j}.$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $z(x)=x+\alpha_\varepsilon(x)y$, ds – элемент длины кривой γ в евклидовой метрике. Тогда

$$\int\limits_\gamma\rho(z(x))\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds}}ds=$$

$$=\int\limits_{z(\gamma)}\rho(z)\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(z)\frac{dz_i}{ds}\frac{dz_j}{ds}}\frac{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds}}}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(z)\frac{dz_i}{ds}\frac{dz_j}{ds}}}ds. \qquad (7)$$

Возьмем точку $x\in\gamma\setminus\{\infty\}$, в которой существует касательная к γ. Тогда существует k такое, что $x\in G_k$. Следовательно, $z(x)\in G_{k+1}$ и $|z-x|<\delta_{k+1}$ по построению функции $\alpha_\varepsilon(x)$. Имеем также:

$$\left|\frac{dx}{ds}\right|=1,\quad\left|\frac{dz}{ds}-\frac{dx}{ds}\right|<\delta_{k+1}.$$

Отсюда следует, что для H^1-почти всех $x \in \gamma$ дробь под интегралом в правой части (7) не меньше $(1+\varepsilon)^{-1}$. Так как $z(\gamma) \in \Gamma$, то в силу допустимости ρ получаем, что

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad \int\limits_{\gamma} \rho_\varepsilon \, ds_F \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon},$$

т.е. $(1+\varepsilon)\rho_\varepsilon \wedge M_{\varphi,F}(\Gamma)$. Далее,

$$\int \varphi(\rho_\varepsilon) d\sigma = \int \varphi \left(\int\limits_{B(0,1)} \rho(x+\alpha_\varepsilon(x)y)\chi(y)dy \right) d\sigma_x \leqslant$$

$$\leqslant \int d\sigma_x \int\limits_{B(0,1)} \varphi(\rho(x+\alpha_\varepsilon(x)y))\chi(y)dy =$$

$$= \int\limits_{B(0,1)} \chi(y)dy \int \varphi(\rho(x+\alpha_\varepsilon(x)y))d\sigma_x.$$

Можно считать, что внутренний интеграл берется по $G \setminus (E_0 \cup E_1)$. Оценим его, положив снова $z(x) = x + \alpha_\varepsilon(x)y$:

$$\int\limits_{G\setminus(E_0\cup E_1)} \varphi(\rho(x+\alpha_\varepsilon(x)y))d\sigma_x = \int\limits_{z(G\setminus(E_0\cup E_1))} \varphi(\rho(z))\frac{d\sigma_x}{d\sigma_z} d\sigma_z,$$

где

$$\frac{d\sigma_x}{d\sigma_z} = \lim_{r\to 0} \frac{\sigma(B(x,r))}{\sigma(z(B(x,r)))}.$$

Эта формула верна, так как отображение $z(x)$ иньективно и поэтому отображение $z : G \setminus (E_0 \cup E_1) \mapsto z(G \setminus (E_0 \cup E_1))$ взаимно однозначно. $z(B(x,r))$ содержит шар с центром $z(x)$ и радиусом $\inf\limits_{|x'-x|=r} |z(x') - z(x)|$. Но

$$|z(x')-z(x)| \geqslant |x'-x| - |\alpha_\varepsilon(x') - \alpha_\varepsilon(x)| \geqslant (1-\varepsilon)r, \quad \text{так как} \quad |\nabla \alpha_\varepsilon| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\frac{d\sigma_x}{d\sigma_z} \leqslant \lim_{r\to 0} \frac{\int\limits_{B(x,r)} \sqrt{g(w)}dw}{\int\limits_{B(z(x),(1-\varepsilon)r)} \sqrt{g(w)}dw} =$$

$$= \frac{\sqrt{g(x)}}{(1-\varepsilon)^n \sqrt{g(z(x))}} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^n}$$

в силу свойств функции $\alpha_\varepsilon(x)$. Итак, мы получили, что

$$\int\limits_{G\setminus(E_0\cup E_1)} \varphi(\rho_\varepsilon) d\sigma \leqslant \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^n} \int\limits_{G\setminus(E_0\cup E_1)} \varphi(\rho) d\sigma.$$

Функция $(1+\varepsilon)\rho_\varepsilon \wedge \Gamma$, непрерывна в $G \setminus (E_0 \cup E_1)$ и

$$\int \varphi((1+\varepsilon)\rho_\varepsilon) d\sigma \leqslant (1+\varepsilon)^p \int \varphi(\rho_\varepsilon) d\sigma \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{(1-\varepsilon)^n} \int \varphi(\rho) d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{(1-\varepsilon)^n} (M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G) + \varepsilon),$$

где p – константа из (2). Лемма доказана.

Лемма 7.

$$\max_{|\eta|=1} \frac{\sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \eta_i \eta_j}{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij} \eta_i \eta_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Доказательство этой леммы приведено в [3].

3. Равенство (φ, F)-модуля и (φ, F)-емкости

Теорема 4.

$$M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G) = C_{\varphi,F}(E_0, E_1, G),$$

если для любой точки из $\partial G \setminus \{\infty\}$ существует ее окрестность U такая, что $\int\limits_{U\cap G} d\sigma < \infty$.

Доказательство. Докажем сначала неравенство

$$M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G) \leqslant C_{\varphi,F}(E_0, E_1, G). \tag{8}$$

Возьмем произвольную функцию v, допустимую для $C_{\varphi,F}(E_0, E_1, G)$. Аналогично [1], покажем, что функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla v(x)), & x \in G \setminus \{\infty\}, \\ 0, & x \in R^n \setminus G \end{cases}$$

для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{\gamma} \left| \frac{dv}{ds}(x(s)) \right| ds \geqslant 1.$$

Из леммы 7 следует, что

$$\left| \frac{dv}{ds}(x(s)) \right|^2 \leqslant \mathcal{E}_F(\nabla v) \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}.$$

Отсюда вытекает допустимость функции $\rho(x)$ для $M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G)$. Следовательно,

$$M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G) \leqslant \int \varphi(\rho) d\sigma = \int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla v)) d\sigma.$$

В силу произвольности v неравенство (8) доказано.

Докажем теперь обратное неравенство. В определении модуля конденсатора при ограничениях, наложенных в формулировке теоремы, инфимум можно брать по функциям, положительным в $\overline{G} \setminus \{\infty\}$. Как и в [1], взяв непрерывную в G функцию f , положительную в любой ограниченной части $\overline{G}$ и такую, что $\int \varphi(f) d\sigma$ меньше любого наперед заданного числа, образуем новую функцию $\rho' = \max(\rho, f)$. Она будет удовлетворять всем вышеперечисленным условиям и $\int \varphi(\rho') d\sigma$ будет сколь угодно мало отличаться от $\int \varphi(\rho) d\sigma$. Такая функция f существует в силу условия теоремы.

Итак, пусть $M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G) < \infty$, ρ допустима для $M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G)$, непрерывна в $G \setminus (E_0 \cup E_1)$, полунепрерывна снизу в R^n, положительна в $\overline{G} \setminus (E_0 \cup E_1 \cup \{\infty\})$ и $\int \varphi(\rho) d\sigma < M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G) + \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть также G_{ik}, $k = 1, 2, \dots,$ – открытые множества, исчерпывающие снаружи E_i, $i = 0, 1$ (т.е. $\overline{G_{ik}} \supset G_{i,k+1}$, $k = 1, 2, \dots,$ $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_{ik} = E_i$, $i = 0, 1$), и такие, что $G_{01} \cap G_{11} = \emptyset$. Считаем, что $\infty \notin \partial G_{ik}$, $i = 0, 1$, $k = 1, 2, \dots,$ и, если $\infty \in \overline{G} \setminus (E_0 \cup E_1)$, то пусть $\infty \in \overline{G} \setminus (G_{01} \cup G_{11})$.

Обозначим

$$V_{01} = V_{11} = \overline{G} \setminus (G_{01} \cup G_{11}), \quad V_{ik} = (G_{i,k-1} \setminus G_{ik}) \cap G, \quad V_k = V_{0k} \cup V_{1k},$$

$$\alpha_k = d_F(\partial G_{0k} \cup \partial G_{1k}, \partial G_{0,k+1} \cup \partial G_{1,k+1}) > 0, \quad k \geqslant 1, \quad i = 0, 1.$$

Возьмем последовательность ε_k такую, что

$$2^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k < \varepsilon, \qquad \frac{\varepsilon_k}{\inf\limits_{V_k\cap G}\rho} < \alpha_k, \qquad k = 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

где p – константа из (2). Предположим сначала, что $\partial G \setminus (E_0 \cup E_1) \neq \emptyset$.

Пусть Δ_k, $k \geqslant 1$, – исчерпание области G изнутри открытыми множествами. Возьмем k_l настолько большим, что

$$\int\limits_{B_{k_l}} \varphi(\rho)d\sigma < \varepsilon_l^{p+1} \tag{10}$$

при $l \geqslant 1$, где

$$B_{k_1} = (G\setminus\Delta_{k_1})\cap(\overline{V}_1\cup V_2), \quad B_{k_l} = (G\setminus\Delta_{k_l})\cap(V_{l-1}\cup\overline{V}_l\cup V_{l+1}), \quad l \geqslant 2.$$

Положим

$$B = \bigcup_l B_{k_l}.$$

Если $\partial G \subset E_0 \cup E_1$, то полагаем $B = \emptyset$. Кроме того, если $\infty \in G \setminus (E_0 \cup E_1)$, то можно считать, что $\infty \in V_1 \setminus B$. Пусть $W_l = B \cap G \cap V_l$. Введем функцию

$$\rho_1 = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\varepsilon_k}, & x \in W_k, \\ 0, & x \in \overline{R^n} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} W_k. \end{cases}$$

Функция $\rho_2 = \rho + \rho_1$ допустима для $M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{W_k}\varphi(\rho_2)d\sigma = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{W_k}\varphi\left(\left(1+\frac{1}{\varepsilon_k}\right)\rho\right)d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{W_k}\varphi\left(\frac{2\rho}{\varepsilon_k}\right)d\sigma < 2^p\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k^{-p}\int\limits_{W_k}\varphi(\rho)d\sigma < \frac{\varepsilon}{2}$$

в силу (2), (9) и (10). Отсюда

$$\int\varphi(\rho_2)d\sigma = \int\limits_{G\setminus B}\varphi(\rho)d\sigma + \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{W_k}\varphi(\rho_2)d\sigma < M_{\varphi,F}(E_0, E_1, G) + \varepsilon. \tag{11}$$

При помощи рассуждений, аналогичных приведенным в [1], получаем, что

$$\exists k\colon \forall\gamma\in\Gamma_k \quad \int\limits_{\gamma} \rho_2\, ds_F > 1-\varepsilon, \tag{12}$$

где Γ_k – семейство кривых, соединяющих G_{0k} и G_{1k} в G.

Введем функцию

$$\rho'(x)=\begin{cases} \dfrac{\rho_2(x)}{1-\varepsilon}, & x\in G\setminus(G_{0k}\cup G_{1k}),\\ 0, & x\notin G\setminus(G_{0k}\cup G_{1k}). \end{cases}$$

Она локально ограничена на $G\setminus(E_0\cup E_1)$. Покажем, что функция

$$v(x)=\inf\int\limits_{\gamma(x)}\rho'\, ds_F,$$

где инфимум берется по всем кривым $\gamma(x)$, соединяющим G_{0k} с точкой x, локально липшицева в $G\setminus(\overline{G_{0k}\cup G_{1k}})$ и почти всюду удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla v)\leqslant\rho'. \tag{13}$$

Возьмем точку x и некоторый шар $B(x,t_0)$, принадлежащие $G\setminus(\overline{G_{0k}\cup G_{1k}})$. Пусть $x'=x+t\theta$, где $0<t\leqslant t_0$, $\theta\in R^n$, $|\theta|=1$. Имеем:

$$v(x+t\theta)-v(x)=v(x')-v(x)\leqslant\int\limits_{x}^{x'}\rho'\, ds_F.$$

Здесь интеграл берется по отрезку $[x,x']$. Далее получаем:

$$\int\limits_{x}^{x'}\rho'\, ds_F\leqslant\max_{B(x,t)}\rho'\int\limits_{0}^{t}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x+r\theta)\theta_i\theta_j}\, dr.$$

Объединяя эти два неравенства, деля на t и устремляя t к нулю, находим:

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i\frac{\partial v}{\partial x_i}=\frac{dv}{d\theta}\leqslant\rho'(x)\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\theta_i\theta_j}.$$

Отсюда

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)\theta_i\theta_j}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}\theta_i\theta_j\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}}{\sum\limits_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)\theta_i\theta_j}\leqslant\rho'.$$

Переходя к максимуму по θ и используя лемму 7, получим (13).

Кроме того, $v(x)=0$ на E_0 и $v(x)\geqslant 1$ на E_1. Таким образом, функция $\widetilde{v}=\min(1,v)$ допустима для $C_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)$. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$C_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)\leqslant\int\limits_G\varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla\widetilde{v}))d\sigma\leqslant\int\limits_G\varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla v))d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\int\varphi(\rho')d\sigma\leqslant\int\varphi\left(\frac{\rho_2}{1-\varepsilon}\right)d\sigma\leqslant\frac{1}{(1-\varepsilon)^p}\int\varphi(\rho_2)d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(1-\varepsilon)^p}(M_{\varphi,F}(E_0,E_1,G)+\varepsilon).$$

В силу произвольности ε теорема доказана.

4. Существование и единственность экстремальных функций для модуля и емкости

В этой части работы наложим на функцию φ следующее ограничение: либо $\varphi(\sqrt{t})$ выпукла, либо $\varphi(t)=t^s$, $s>1$.

Теорема 5. *Пусть Γ – семейство кривых в R^n. Тогда существует единственная (с точностью до множества лебеговой меры нуль) экстремальная функция для $M_{\varphi,F}(\Gamma)$.*

Доказательство. Если $M_{\varphi,F}(\Gamma)=\infty$, то в качестве экстремальной функции можно взять $\rho\equiv\infty$.

Пусть $M_{\varphi,F}(\Gamma)<\infty$ и ρ_k – последовательность допустимых функций такая, что $\int\varphi(\rho_k)d\sigma\to M_{\varphi,F}(\Gamma)$ при $k\to\infty$. Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi(\sqrt{t})$ выпукла. Используя (3), получим:

$$\int\varphi\left(\frac{\rho_k+\rho_l}{2}\right)d\sigma+\int\varphi\left(\frac{\rho_k-\rho_l}{2}\right)d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\int\varphi(\rho_k)d\sigma+\int\varphi(\rho_l)d\sigma\right).$$

Так как функция $\frac{\rho_k+\rho_l}{2} \wedge M_{\varphi,F}(\Gamma)$, а при больших k, l правая часть последнего неравенства сколь угодно мало отличается от $M_{\varphi,F}(\Gamma)$, то из этого неравенства следует фундаментальность последовательности ρ_k, а в силу полноты пространства $L_{\varphi,F}(R^n)$ – ее сходимость к некоторой функции ρ из этого пространства:

$$\int \varphi(|\rho_k - \rho|)d\sigma \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Поэтому для почти всех $\gamma \in \Gamma$ существует подпоследовательность ρ_{k_m} такая, что $\int\limits_\gamma |\rho_{k_m} - \rho| ds_F \to 0$, а это значит, что ρ почти допустима для $M_{\varphi,F}(\Gamma)$ и, очевидно, для нее выполняется равенство (4).

Если ρ' – еще одна экстремальная функция, то применяя (3) с $f = \rho$, $g = \rho'$ и проводя аналогичные рассуждения, получим, что $\int \varphi(|\rho' - \rho|)d\sigma = 0$, т.е. $\rho' = \rho$ почти всюду.

Для случая $\varphi(t) = t^s$, $s > 1$, доказательство проводим подобным образом, используя неравенство Кларксона.

Теорема 6. *Если $C_{\varphi,F}(E_0, E_1, G) > 0$, то существует единственная (с точностью до множества лебеговой меры нуль) экстремальная функция для $C_{\varphi,F}(E_0, E_1, G)$ такая, что $\lim\limits_{x \to E_j, x \in \gamma} u(x) = j$, $j = 0, 1$, для почти всех кривых γ, соединяющих E_0 и E_1 в G. Кроме того, любая последовательность допустимых функций $u_k(x)$, для которой*

$$\int \varphi(\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla u_k))d\sigma \to C_{\varphi,F}(E_0, E_1, G), \tag{14}$$

сходится к $u(x)$ при $k \to \infty$ почти всюду в $G \setminus (E_0 \cup E_1)$.

Доказательство. Пусть u_k – любая последовательность допустимых функций, для которой выполняется (14).

Используя неравенства Кларксона, если $\varphi(t) = t^s$, или неравенство (3), если $\varphi(\sqrt{t})$ выпукла, можно показать равномерную выпуклость пространства $L_{n,\varphi,F}(G)$, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что для любых f_1, $f_2 \in L_{n,\varphi,F}(G)$ с $\|f_1\| \leqslant 1$ и $\|f_2\| \leqslant 1$ из неравенства $\|f_1 - f_2\| \geqslant \varepsilon$ следует неравенство $\|f_1 + f_2\| \leqslant 2(1 - \delta)$.

Используя метод работы [5], получим, что u_k сходится к некоторой функции $u \in L^1_{\varphi,F}(G)$. Определим множество E, семейства кривых Γ, Γ_0 и функцию h так же, как и в теореме 2.

Пусть дана кривая γ из $\Gamma \setminus \Gamma_0$. Возьмем точку x_0, лежащую на $\gamma \setminus E$, и предположим, что последовательность $u_k(x_0)$ сходится. Рассмотрим дугу $\gamma' \subset \gamma$, которая соединяет x_0 с E_0. Если $x \in \gamma' \setminus E$, то в силу неравенства

$$\int_{x_0}^{x} |\nabla u_k - \nabla u| ds \leqslant \int_{\gamma} |\nabla u_k - \nabla u| ds,$$

где первый интеграл берется по части кривой γ, соединяющей x_0 с x, получим, что

$$u_k(x) - u_k(x_0) = \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i =$$

$$u(x) - u(x_0), \quad k \to \infty, \quad x \in \gamma' \setminus E,$$

т.е. на $\gamma' \setminus E$ $u_k(x) \rightrightarrows u(x)$. Из этого соотношения и того факта, что $u_k(x) \to 0$ при $x \to E_0$, $x \in \gamma'$, получаем, что $u(x) \to 0$ при $x \to E_0$, $x \in \gamma'$.

Таким образом, мы доказали, что по почти всем кривым $u(x) \to 0$, когда $x \to E_0$ и, аналогично, $u(x) \to 1$, если $x \in E_1$. Кроме того, так как любую точку $x \in G \setminus E$ можно соединить с x_0 кривой из $\Gamma \setminus \Gamma_0$, то можно заметить, что $u_k(x) \to u(x)$ при $k \to \infty$ на $G \setminus E$.

Далее предположим, что последовательность $u_k(x_0)$ не сходится. Это значит, что существуют две подпоследовательности $u'_k(x_0) \to c'$ и $u''_k(x_0) \to c''$ при $k \to \infty$, где $c' \neq c''$. Рассуждая аналогично, получим функции $u'(x)$ и $u''(x)$, соответственно, которые связаны в $G \setminus E$ равенством $u''(x) = u'(x) - c' + c''$. Отсюда для всех кривых $\gamma \in \Gamma$ $u''(x) - u'(x) = c'' - c'$, $x \in \gamma \setminus E$. Но так как $u''(x) - u'(x) \to 0$, если $x \to E_0 \cup E_1$ по почти всем указанным кривым, то $c' - c'' = 0$ и $u'(x) = u''(x)$ почти всюду в G. Теорема доказана.

Литература

1. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств,* в настоящем сборнике.
2. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича,* М., 1958.
3. В. М. Миклюков, *Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей,* Изв. РАН, Сер.мат. **60**, No. 4 (1996), 111–158.

4. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения,* М., 1977.
5. В. А. Шлык, *Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 168–182.
6. В. А. Шлык, *О равенстве p-емкости и p-модуля,* Сиб. мат. журн. **34**, No. 6 (1993), 216–221.
7. В. А. Шлык, *Об единственности экстремальной функции для p-емкости конденсатора,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 228–234.
8. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion,* Acta Math. **126**, No. 3 (1957), 171–219.
9. J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality,* Ark. Mat. **13**, No. 1 (1975), 131–144.

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток
E-mail: dymch@nt.pin.dvgu.ru

Поступило 29 июня 2000 г.