тельности цилиндров можно выделить подпоследовательность (сохраним за ней обозначение $\{u_{h_\nu}(t, x)\}$), обладающую всеми указанными выше свойствами сходимости в любом цилиндре $Q^r{}_\delta$. Пусть $\{u_{h_\nu}(t, x)\}$ сходится к функции $u(t, x)$. Для $u(t, x)$ будут выполняться оценки (11), (15), (17), (18). В силу оценки (17) функция $u(t, x)$ вместе со своими производными u_{x_i} будет равномерно-непрерывной в любом слое $\Pi^\sigma{}_T$.

Легко видеть, что функция $u(t, x)$ почти всюду в Π_T удовлетворяет уравнению (1). Из представления решения задачи (8), (9) (с учетом оценок (15), (16)) через фундаментальное решение (или же из результатов [5]) вытекает, что функция $u(t, x)$ равномерно по $x \in \mathbf{R}^n$ принимает начальные значения.

Замечание 1. Близкие результаты устанавливаются в работе [6].

Замечание 2. Результаты настоящей работы могут быть развиты для случая растущих решений: $|u(t, x)| \leqslant \mathrm{const}(1+|x|)$.

Замечание 3. Все полученные результаты переносятся на случай первой и второй краевых задач, а теорема 3, кроме того, обобщается для случая переменных коэффициентов $a_{ij}=a_{ij}(t, x) \in C^{0,1}(\Pi_T)$.

Автор приносит глубокую благодарность профессору С. Н. Кружкову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кружков С. Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. 1. М., 1969.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1967.
3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980.
5. Кружков С. Н. Результаты о характере непрерывности решений параболических уравнений и некоторые их применения. — Матем. заметки, 1969, 6, вып. 1, 97—108.
6. Аракчеев С. А. Некоторые вопросы регулярности и разрешимости для эллиптических и параболических уравнений. — Динамика сплош. среды, 1976, вып. 27, 16—22.

Поступила в редакцию
05.06.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1986, № 3

УДК 519.95

С. Б. Гашков

О СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ СХЕМ И ФОРМУЛ В НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Настоящая работа продолжает цикл [1—3], посвященный изучению сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в «непрерывных» базисах. Введем нужные определения и обозначения, выделив их знаками Df и □.

Df Замкнутый n-мерный интервал $I=I^n$ — это $\prod_{l=1}^{n}[a_l, b_l]\subset \mathbf{R}^n$, а $|I| = \prod_{l=1}^{n}|I_l| = \prod_{l=1}^{n}|a_l - b_l|$ — его объем. □

Df Схема S в базисе B — такая произвольная последовательность функций $f_1(x), \ldots, f_L(x)$, зависящих, возможно фиктивно, от переменных $\mathbf{x}=x_1, \ldots, x_n$, что

$$((\forall l\in\overline{1, n})(f_l(\mathbf{x})=x_l))\ \&\ ((\forall l\in\overline{n+1, L})(\exists l_1\in\overline{1, l-1})\ldots$$
$$\ldots(\exists l_m\in\overline{1, l-1})(\exists g(y_1, \ldots, y_m)\in B)(f_l(\mathbf{x}) =$$
$$= g(f_{l_1}(\mathbf{x}), \ldots, f_{l_m}(\mathbf{x})))). \urcorner$$

Df Если $h(\mathbf{x})\in C(I^n)$, то $\|h\|_{C(I)}=\max\limits_{a\in I}|h(a)|$. □

Df Так же как и в [1, 2], $L_B(f, \varepsilon)$ — это $\min\limits_{\|f_S-f\|\leqslant\varepsilon} L_B(S)$. □

Df Если $K\subset C(I^n)$, то $L_B(K, \varepsilon)=\max\limits_{f\in K} L_B(f, \varepsilon)$. □

Df Для случая реализации формулами (схемами без ветвлений) аналогично определяем $L^*_B(f, \varepsilon)$, $L^*_B(K, \varepsilon)$. Вместо $L_B^{(*)}(f, 0)$ пишем $L_B^{(*)}(f)$. Если $G=\{g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_Q(\mathbf{x})\}$, то

$$L_B^{(*)}(G)=\sum_{l=1}^{Q} L_B^{(*)}(g_l)$$

(полагаем, что все g_l различны). □

Df Если $\mathbf{v}, \mathbf{w}\in\mathbf{R}^n$ — векторы, то

$$\|\mathbf{v}\| = \max_{1\leqslant l\leqslant n}|v_l|, \quad |\mathbf{v}| = \sum_{l=1}^{n}|v_l|;$$

$$\Pi\,\mathbf{v}=\prod_{l=1}^{n}v_l, \quad \mathbf{v}\times\mathbf{w}=(v_1w_1, \ldots, v_nw_n)\in\mathbf{R}^n,$$

$$(\mathbf{v}\geqslant\mathbf{w})\Leftrightarrow(\forall l(v_l\geqslant w_l)), \quad (\mathbf{v}>\mathbf{w})\Leftrightarrow(\forall l(v_l>w_l)). \ □$$

Df $\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\in\mathbf{Z}^n$ — мультииндексы. □

Df Если $\{\varphi_l(\mathbf{x})\,|\,l\in\mathbf{Z}\}$ или $\{\varphi_l(\mathbf{x})\,|\,l\in\mathbf{N}\}$ — произвольная система функций, то

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})=\prod_{l=1}^{n}\varphi_{k_l}(x_l),$$

$$\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\varphi)=\Big\{f\,|\,f=\sum_{-\mathbf{d}<\mathbf{k}<\mathbf{d}}a_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}},\ a_{\mathbf{k}}\in\mathbf{R}\Big\};$$

если

$$\varphi_l(x)=\begin{bmatrix}\sin lx, & l>0,\\ 1/2, & l=0,\\ \cos lx, & l<0,\end{bmatrix}$$

то вместо $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\varphi)$ пишем $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$; если $\varphi_l(x)=x^l$, $l\geqslant 0$, то вместо $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\varphi)$ пишем $\mathcal{P}_{\mathbf{d}}$. □

Df Введем следующие обозначения для операторов на пространстве $C(I^n)$:

$$Ef=f, \quad T_l^t f(\mathbf{x})=f(x_1, \ldots, x_l+t, \ldots, x_n),$$

$$\Delta_l^t f=(T_l^t-E)f, \quad D_l f=\lim_{t\to 0} t^{-1}\Delta_l^t f,$$

$$D^{\mathbf{k}}f=D_1^{k_1}\ldots D_n^{k_n}f=\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}. \ \square$$

Df Модуль непрерывности:

$$\omega_l(f,t)=\sup_{\substack{\mathbf{x},h\\ |h|\leqslant t}} |\Delta_l^h f(\mathbf{x})|. \ \square$$

$$\text{Df } [x]=\max\{n \mid n\in\mathbf{Z},\ n\leqslant x\}, \quad]x[=\min\{n\mid n\in\mathbf{Z},\ n\geqslant x\}. \ \square$$

Df Пусть $\mathbf{r}, \mathbf{M}\in\mathbf{R}_+^n$, $N\in\mathbf{R}_+$; тогда

$$\frac{1}{\rho}=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{r_l}, \quad \tilde{r}_l=]r_l-1[, \quad \alpha_l=r_l-\tilde{r}_l, \quad \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_l)\in(0,\ 1]^n,$$

$$\mu=\left(\prod_{l=1}^{n} M_l^{1/r_l}\right)^{\rho},$$

$$(f\in H_{l,I^n}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{M}))\overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}\left(\forall t\left(\omega_l(f,t)\leqslant t^{\alpha_l}\frac{M_l}{|I_l|^{r_l}}\right)\right). \ \square$$

$$\text{Df } (f\in W_1(\mathbf{r},\mathbf{M},N,I^n))\overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}((f: I^n\to[-N,N])\ \&$$

$$\&\ (\forall l\ (D_l^{\tilde{r}_l}f\in H_{l,I^n}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{M})))). \ \square$$

$$\text{Df } (f\in W_2(\mathbf{r},\mathbf{M},N,I^n))\overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}((\|f\|_{C(I^n)}\leqslant N)\ \&$$

$$\&\ (\forall \mathbf{k}\ (((\mathbf{k}\leqslant\tilde{\mathbf{r}})\ \&\ (\neg(\mathbf{k}<\tilde{\mathbf{r}})))\Rightarrow(\forall l\ ((k_l=r_l)\Rightarrow(D^{\mathbf{k}}f\in H_{l,I^n}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{M})))))). \ \square$$

$$\text{Df } (f\in W_3(\mathbf{r},\mathbf{M},N,I^n))\overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow}((\|f\|'_{C(I^n)}\leqslant N)\ \&$$

$$\&\ (\forall l\ ((r_l=r\in\mathbf{R}_+)\ \&\ (M_l=M\in\mathbf{R}_+)\ \&\ (I_l=I\subset\mathbf{R})))\ \&$$

$$\&\ (\forall \mathbf{k}\ ((|\mathbf{k}|=\tilde{r})\Rightarrow(\forall l\ (D^{\mathbf{k}}f\in H_{l,I^n}(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{M})))))). \ \square$$

Замечание: $W_2(\mathbf{r},\mathbf{M},N,I^n)\underset{\neq}{\subset}W_1(\mathbf{r},\mathbf{M},N,I^n)$.

Произвольные константы обозначаем буквами a, b, c; если они зависят от каких-то параметров, то последние указываем в индексах. Одинаковые символы не обязательно обозначают равные числа. Далее всюду ε положительно и достаточно мало. В [4, 5] доказано (в других обозначениях), что

$$a_{\|\mathbf{r}\|}\left(\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}+\log\frac{N}{\varepsilon}\right)\leqslant H_\varepsilon(W)\leqslant b_{\|\mathbf{r}\|}^{n/\rho}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}+\|\mathbf{r}\|^n\log\frac{N}{\varepsilon}+b_{\|\mathbf{r}\|}, \quad (1)$$

где $H_\varepsilon(W)$ — ε-энтропия класса $\mathbf{W}_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I^n)$, $\sigma=1, 2, 3$

$$\left(\text{если } \sigma=3, \text{ то } \mu=M, \ \frac{1}{\rho}=\frac{n}{r}, \ \|r\|=r\right).$$

Использовав (1), докажем следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\|\mathbf{r}\|$, ρ, n *фиксированы*, $0\in I^n$, *то существует* $\varepsilon_0= =\varepsilon(\mathbf{M}, N, I, \mathbf{r})$, *такое, что для любого* $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$L_B(W_\sigma, \varepsilon) \asymp \frac{H_\varepsilon(W_\sigma)}{\log H_\varepsilon(W_\sigma)}, \quad L_B^*(W_\sigma, \varepsilon) \asymp H_\varepsilon(W_\sigma);$$

здесь B — *базис* $\left\{x-y, xy, |x|, \frac{1}{2}\right\}$; W_σ — *класс* $W_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I^n)$, $\sigma=1, 2, 3$; $H_\varepsilon(W_\sigma)$ — *его* ε-*энтропия; константы в знаках* $\asymp$ (*равенства по порядку*) *зависят лишь от* $\|\mathbf{r}\|$, n, ρ.

Если $\sigma=2$ или $\sigma=3$, то утверждение теоремы справедливо уже для любого $\varepsilon<\varepsilon(\mathbf{M}, I, \mathbf{r})$.

Сформулированная теорема обобщает теоремы из [2, 3]. Далее приведено доказательство для случая $n\geqslant 2$. Для случая $n=1$ оно дано в [2, 3]. Нижние оценки следуют из теоремы 1[1]. Метод доказательства верхних оценок близок к методам [2, 3], и в нем используются идеи, восходящие к работе О. Б. Лупанова [6]. Для его реализации понадобится несколько лемм; замечания относительно их доказательств отмечены знаками $\square$.

Df $B_1=\left\{x-y, xy, \frac{1}{2}\right\}$, $B_2=B_1\cup\{|x|\}$, $B_3=B_1\cup\{\cos x\}$, $B_4=B_2\cup B_3$. $\square$

Df Если $f\in\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\varphi)$, то $\operatorname{coeff} f$ — вектор, составленный из коэффициентов многочлена f. $\square$

Лемма 1. *Пусть* $I\subseteq[-1, 1]^n\subset\mathbf{R}^n$.

(*i*) *Если* $p\in\mathcal{P}_{\mathbf{d}}$, *то* $\|\operatorname{coeff} p\|\leqslant\left(\frac{b}{|I|}\right)^{|\mathbf{d}|}\|p\|_{C(I^n)}^{3}$.

(*ii*) *Если* $\tau\in\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$, *то* $\|\operatorname{coeff}\tau\|\leqslant\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\|\tau\|_{C([-\pi,\pi]^n)}$.

(*iii*) $L_{B_1}^*(p, \varepsilon) < a(\Pi\mathbf{d})\left(\log\frac{\|\operatorname{coeff} p\|}{\varepsilon}+\log\Pi\,\mathbf{d}+n\right)$,

$$L_{B_1}^*(p, \varepsilon)\leqslant a(\deg p+n)^n\left(\log\left(\frac{\|p\|_{C(I^n)}}{\varepsilon}\right)+\deg p\,|\log|I||+n\log(1+\deg p)\right).$$

(*iV*) *Если* $f\in\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\varphi)$ *и* $\|\varphi_l\|\leqslant a$ *при любом* l, *то*

$$L_{B_1}^*(f, \varepsilon)\leqslant b^n(\Pi\,\mathbf{d})\left(\log\left(\frac{\|\operatorname{coeff} f\|}{\varepsilon}\right)+n\max_{|l|\leqslant\|\mathbf{d}\|}L_{B_1}^*(\varphi_l, \delta)+\log\Pi\,\mathbf{d}\right),$$

где $\delta=\dfrac{\varepsilon}{b^n\|\operatorname{coeff} f\|\,\Pi\mathbf{d}}$.

(V) $L_{B_3}^*(\tau, \varepsilon)\leqslant c^n\left(\log\left(\frac{\|\tau\|_{C([-\pi,\pi]^n)}}{\varepsilon}\right)+\log\Pi\,\mathbf{d}\right)\Pi\,\mathbf{d}$.

Лемма 2. *Пусть* $I^n\subset J^n$ — *замкнутые интервалы*, $I^n\cap\partial J^n=\varnothing$, $f\in W_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I^n)$, $\sigma=1, 2, 3$. *Тогда найдется* $g\in W_\sigma(\mathbf{r}, c\mathbf{M}, cN, J^n)$, *где* $c=(c_{\|\mathbf{r}\|,I,J})^n$, *такая, что* $g|_{I^n}=f$.

$\square$ Доказательство следует из теоремы о продолжении [7]. $\square$

Лемма 3:

$$L_{B_l}^{(*)}(W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I^n), \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant L_{B_l}^{(*)}(W_1(\mathbf{r}, c_{\|\mathbf{r}\|}^n \mathbf{M}, c_{\|\mathbf{r}\|}^n N, J^n), \varepsilon) + c\left(n + \sum_{l=1}^{n} |\log |I_l||\right),$$

где $J^n = [-1, 1]^n$, $l = 1, 2, 3, 4$.

□ Доказательство можно провести с помощью леммы 2. □
Далее всюду считаем, что $I^n = [-1, 1]^n$, если это необходимо.

Лемма 4:

(*i*) $(\forall \sigma \in \{2, 3\})(\forall f \in W_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N))(\exists p \in \mathscr{P}_{\tilde{\mathbf{r}}+\mathbf{1}})(\exists \varphi \in$

$$\in W_\sigma(r, M, c^n \|\mathbf{M}\|))((f = p + \varphi) \,\&\, (\|\mathrm{coeff}\, p\| \leqslant c^{|\mathbf{r}|+n}(\|\mathbf{M}\| + N))),$$

где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$.

$$(ii)\ (\forall \sigma \in \{2, 3\})(\forall l \in \{1, 2, 3, 4\})\Big(L_{B_l}^{*}(W_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N), \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant L_{B_l}^{*}(W_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{M}, c^n \|\mathbf{M}\|), \varepsilon - \varepsilon^2) + a(\|\tilde{\mathbf{r}}\| + 1)^n\left(|\mathbf{r}| + n + \log\frac{\|\mathbf{M}\| + N}{\varepsilon}\right)\Big) \,\&$$

$$\& \Big(L_{B_l}(W_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N), \varepsilon) \leqslant L_{B_l}(W_\sigma(r, M, c^n \|\mathbf{M}\|), \varepsilon - \varepsilon^2) +$$

$$+ (a(\|\tilde{\mathbf{r}}\| + 1)^n\left(|r| + n + \log\frac{\|M\|}{\varepsilon} + \frac{\log\frac{N}{\varepsilon}}{\log\log\frac{N}{\varepsilon}}\right)\Big).$$

□ Используется формула Тейлора, лемма 1 и теорема 5 [1]. □

$$\mathrm{Df}\ f \in \tilde{W}_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N) \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} (f \in W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, [-\pi, \pi]^n) \,\&\, (\forall l\, (\Delta_l^{2\pi} f = 0))).\ \square$$

Лемма 5 (вариант теоремы Джексона):

(*i*) $(\forall \mathbf{d} \in \mathbf{N}^n)(\forall f \in \tilde{W}_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N))(\exists g \in \mathscr{T}_{\mathbf{d}} \cap \tilde{W}_1(r, c^{|\mathbf{r}|+n}\mathbf{M}, N + \delta))$

$$(\|f - g\|_{C[-\pi,\pi]^n} < \delta) \,\&\, \left(\delta = c^{|\mathbf{r}|+n} \sum_{l=1}^{n} d_l^{-r_l} \cdot M_l\right).$$

(*ii*) $(\forall \mathbf{d} \in \mathbf{N}^n)(\forall f \in W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N))(\exists g \in \mathscr{P}_{\mathbf{d}} \cap W_1(r, c_{\|\mathbf{r}\|}^n(\|\mathbf{M}\| + N), N + \delta))$

$$(\|f - g\|_{C([-1,1]^n)} < \delta) \,\&\, \left(\delta = c_{\|\mathbf{r}\|}^n \sum_{l=1}^{n} d_l^{-r_l}(M_l + N)\right).$$

□ Эта лемма — обобщение лемм 8[2] и 10[2]. □

Лемма 6. *Для любых* $\mathbf{h} \in \mathbf{R}_+^n$ *и* $f \in W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N)$ *можно построить гладкий интерполяционный сплайн* $g(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{h}, f)$ *(см. [8]), такой, что*

$$\|f - g\|_{C[-1,1]^n} < \delta = c_{\|\mathbf{r}\|}^n \sum_{l=1}^{n} h_l^{r_l} M_l, \quad g(\mathbf{x}) \in W_1(\mathbf{r}, c_{\|\mathbf{r}\|}^n \mathbf{M}, N + \delta).$$

□ Доказательство следует из результатов [8, глава III]. □

Лемма 7:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+)(\forall f \in W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N))(\exists g \in W_1(\mathbf{r}, c^n_{\|\mathbf{r}\|}\mathbf{M}, N+\varepsilon))$$

$$\left((\|f-g\|_{C[-1,1]^n} < \varepsilon) \,\&\, \left(L^*_{B_2}(g) \leqslant c_{\|\mathbf{r}\|,\rho,n}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}\left(\log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho} + \log\frac{N}{\varepsilon}\right)\right)\right).$$

□ Используем леммы 1, 6 и результаты [8]. □

Замечание. Для мер сложности L_{B_1} и $L^{(*)}_{B_3}$ можно доказать, использовав леммы 2 и 5, несколько более слабое, но достаточное для дальнейшего изложения утверждение.

Следствие:

$$L^{(*)}_{B_2}(W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N), \varepsilon) \leqslant L^{(*)}_{B_2}\left(W_1\left(\mathbf{r}, c^n_{\|\mathbf{r}\|}\mathbf{M}, \varepsilon\left(\log\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{3\rho} c_{\|\mathbf{r}\|,n,\rho}\right), \varepsilon\right) +$$

$$+ \frac{(\mu/\varepsilon)^{1/\rho}}{\log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^2}\left(1 + \frac{\log\frac{N}{\varepsilon}}{\log\frac{\mu}{\varepsilon}}\right) c_{\|\mathbf{r}\|,n,\rho}.$$

Df Пусть $\mathbf{v} = (v_{\mathbf{k}}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^n}$, $\mathbf{h} = (h_l) \in \mathbf{R}^n_+$, а $e_{k_l}(x_l)$ — лагранжев сплайн [5], который на каждом отрезке* $[\nu h_l, (\nu+1) h_l]$, $\nu \leqslant \frac{1}{h_l} - \widetilde{r}_l$, совпадает с полиномом $p_\nu(x_l)$, таким, что

$$(\deg p_\nu = \widetilde{r}_l) \,\&\, ((\forall \xi \in \overline{0, \widetilde{r}_l})(p_\nu((\nu+\xi) h_l) = \delta_{k_l, \nu+\xi})),$$

где $\delta_{i,j}$ — дельта Кронекера, а на интервале $(1-\widetilde{r}_l h_l, +\infty)$ совпадает с полиномом $p_{1/h_l - \widetilde{r}_l}(x_i)$, причем $\frac{1}{h_l} \in \mathbf{N}$, $l \in \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h}}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n.$$

Лемма 8:

$$(\forall \eta \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^n})(\forall f \in W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N))\, \|f - \mathfrak{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h}}(\eta, \mathbf{x})\|_{C([-1,1]^n)} \leqslant$$

$$\leqslant c^n_{\|\mathbf{r}\|}\left(\sum_{l=1}^n h_l^{r_l} M_l + \max_{\mathbf{k}} |\eta_{\mathbf{k}} - f(\mathbf{k} \times \mathbf{h})|\right).$$

□ Лемма 8 — многомерный аналог леммы 13[2]. □

Далее будем считать, что h_l, m_l, m таковы, что

$$(m \in \mathbf{N}) \,\&\left(c^n_{\|\mathbf{r}\|} 2^{-m} \in \left[\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\varepsilon}{4}\right]\right) \&$$

$$\& (\forall l\, ((h_l^{-1} = 2^{m_l} = (\varepsilon^{-1} M_l c^n_{\|\mathbf{r}\|})^{1/r_l} c_l) \,\&\, (c_l \in [1/2, 1]) \,\&\, (m_l \in \mathbf{N}))) \,\&$$

$$\& \left(c^n_{\|\mathbf{r}\|} \sum_{l=1}^n h_l^{r_l} M_l \leqslant \varepsilon/4\right).$$

---

* Если $r_l \leqslant 1$, то вместо $\widetilde{r}_l = 0$ везде должна стоять единица. Аналогичное замечание касается также [2].

Df $\mathbf{w}_l \in \mathbf{R}^n$ — это вектор, у которого l-я координата равна единице, а остальные координаты равны нулю. □

Df $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент. □

Df $\mathfrak{M}(\delta, N)$ — множество всех векторов $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^n}$, таких, что*

$$(\forall\, \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n)\Big((2^m v_{\mathbf{k}} \in \mathbf{Z})\ \&\ (|v_{\mathbf{k}}| \leqslant N)\ \&\ ((\exists\, l\,(|k_l| > 2^{m_l})) \Rightarrow (v_{\mathbf{k}} = 0))\ \&$$

$$\&\Big(\forall\, l\Big((-2^{m_l} +]r_l[\leqslant k_l \leqslant 2^{m_l}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(\Big|v_{\mathbf{k}} - \sum_{j=1}^{]r_l[} (-1)^{j-1} C^j_{]r_l[}\, v_{\mathbf{k}-j\mathbf{w}_l}\Big| \leqslant \delta\Big)\Big)\Big)\Big). \ \square$$

Лемма 9. *Для любых* $\mathbf{k} \in \prod_{l=1}^{n} [-2^{m_l}, 2^{m_l}]$ *и* $\gamma \in \mathbf{R}_+$ *можно построить функцию* $e_{k,\gamma}(\mathbf{x})$, *такую, что*

$$\operatorname{supp} e_{\mathbf{k},\gamma} = \operatorname{supp} e_{\mathbf{k}} \subseteq I_{\mathbf{k}}, \quad I_{\mathbf{k}} \subset \mathbf{R}^n,$$

$$|I_{\mathbf{k}}| \leqslant (\|\mathbf{r}\| + 2)^n \Pi\, \mathbf{h}, \quad \|e_{\mathbf{k},\gamma} - e_{\mathbf{k}}\|_{C(I_{\mathbf{k}})} \leqslant \gamma,$$

$$L^*_{B_2}(e_{\mathbf{k},\gamma}) \leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}\left(\log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho} + \frac{n}{\rho} + n^2 + n\,|\log\gamma|\right).$$

□ Лемма 9 — аналог леммы 15 [2]. □

Df $\mathfrak{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\gamma}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{x})$. □

Df $\mathfrak{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\gamma}(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\gamma}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{v} \in \mathfrak{M}\}$. □

Следствие. *Можно выбрать константы* c *и* $c_{\|\mathbf{r}\|}$ *так, чтобы при* $\delta = \varepsilon c_{\|\mathbf{r}\|}$ *и* $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{N c^n_{\|\mathbf{r}\|}}$ *множество* $\mathfrak{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\gamma}(\mathfrak{M}(\delta, N))$ *было* ε-*сетью в* $W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N)$.

Выберем произвольные параметры q и s_l, $l \in \overline{n-q+1},\ n$, так, чтобы

$$(q \in \overline{1, n-1})\ \&\ ((\forall\, l \in \overline{n-q+1, n})\,(s_l \in \overline{2, 2^{m_l} - 1})).$$

Зафиксируем произвольную $f \in \mathfrak{L}_{\mathbf{r},\mathbf{h},\gamma}(\mathfrak{M}(\delta, N))$ и представим ее в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\check{\mathbf{k}}} e_{\check{\mathbf{k}},\gamma}(\check{\mathbf{x}}) \sum_{j} f_{\check{\mathbf{k}},j}(\hat{\mathbf{x}}), \tag{2}$$

где

$$\check{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{n-q}),\ \hat{\mathbf{x}} = (x_{n-q+1}, \ldots, x_n),\ \mathbf{x} = (\check{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}),\ \check{\mathbf{k}} = (k_1, \ldots, k_{n-q}),$$

$$\mathbf{j} = (j_{n-q+1}, \ldots, j_n),\quad \mathbf{i} = (i_{n-q+1}, \ldots, i_n),\quad \mathbf{s} = (s_{n-q+1}, \ldots, s_n),$$

$$f_{\check{\mathbf{k}},j}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\mathbf{j}\times\mathbf{s} \leqslant \mathbf{i} < \mathbf{s}+\mathbf{j}\times\mathbf{s}} e_{\mathbf{i},\gamma}(\hat{\mathbf{x}})\, f_{\check{\mathbf{k}},i},$$

$$f_{\check{\mathbf{k}},i} = f(k_1 h_1, \ldots, k_{n-q} h_{n-q}, i_{n-q+1} h_{n-q+1}, \ldots, i_n h_n).$$

---

* Если $r_l \leqslant 1$, то вместо $]r_l[= 1$ везде должно стоять $]r_l[= 2$.

Df Поставим в соответствие каждому $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^n}$ проекцию $\Pr_{\check{\mathbf{k}},\mathbf{j}}(\mathbf{v}) = (\beta_\mathbf{i}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^q}$ так, чтобы $\beta_\mathbf{i} = v_{\check{\mathbf{k}},\mathbf{i}}$, если $\mathbf{j} \times \mathbf{s} \leqslant \mathbf{i} < (\mathbf{j} \times \mathbf{s}) + \mathbf{s}$, и $\beta_\mathbf{i} = 0$ в противном случае. □

Df Обозначим $\prod_{l=n-q+1}^{n} s_l$ через s. □

Лемма 10. *Используя в предыдущих определениях вместо* $\check{\mathbf{x}}$ *переменные* $\check{\check{\mathbf{x}}} = (x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{n-q}})$ *при надлежащем выборе индексов, можно считать, что*

$$\operatorname{card} \Big| \bigcup_{\check{\mathbf{k}}} \bigcup_{j} \Pr_{\check{\mathbf{k}},j}(\mathfrak{M}(\delta, N)) \Big| \leqslant Q \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{c_{\|\mathbf{r}\|}^{n(s+1/\rho)} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{q}{n\rho}} \left(\frac{c_{\|\mathbf{r}\|}^{n} N}{\varepsilon}\right)^{(\|\mathbf{r}\|+2)^q}}{s}.$$

□ Доказательство можно получить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве леммы 19 [2]. □

Лемма 11:

$$L_{B_2}^{*}(\{f_{\check{\mathbf{k}},j}(\widehat{\mathbf{x}})\}) \leqslant L_1 \overset{\mathrm{df}}{=} Qs\left(nq\left(q + \frac{1}{\rho} + q \log \frac{N}{\varepsilon}\right) + \log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}\right) c_{\|\mathbf{r}\|}.$$

□ Используем леммы 9 и 10. □

Лемма 12:

$$L_{B_2}(f) \leqslant L_1 + \frac{(c_{\|\mathbf{r}\|}^{n} \mu/\varepsilon^{1/\rho}}{s} + c_{\|\mathbf{r}\|}^{n/\rho}\left(\frac{\|\mathbf{M}\|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho} - \frac{q}{\|\mathbf{r}\|}} \left(\frac{1}{\rho} + \log \frac{N}{\varepsilon} + \log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}\right).$$

□ Используем (2) и леммы 9 и 11. □

Df Временно обозначим второе слагаемое в лемме 12 через L_2. □ Перенумеруем все различные функции из множества $\{f_{\check{\mathbf{k}},\mathbf{j}}(\widehat{\mathbf{x}})\}$ в некотором порядке $g_\xi(\widehat{\mathbf{x}})$, $\xi \in \overline{1, [Q]}$. Тогда равенство (2) можно переписать таким образом:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\xi} g_\xi(\widehat{\mathbf{x}}) \sum_{\check{\mathbf{k}} \in \mathcal{M}_\xi} e_{\check{\mathbf{k}},\gamma}(\check{\mathbf{x}}), \tag{3}$$

где

$$\mathcal{M}_\xi \subset \mathbf{Z}^{n-q} \cap \prod_{l=1}^{n-q} [-2^{m_l}, 2^{m_l}], \quad \sum_{\xi} \operatorname{card} |\mathcal{M}_\xi| \leqslant L_2.$$

Лемма 13:

$$L_{B_2}^{*}(f) \leqslant L_1 + cQ + c_{\|\mathbf{r}\|} L_2 \left(\log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho} + n\left(n + \frac{1}{\rho} + \log \frac{N}{\varepsilon}\right)\right).$$

□ Используем (3) и леммы 9 и 11. □

Лемма 14:

$$(i)\ L_{B_2}(W_1, \varepsilon) \leqslant L_3 + L_4 + L_2\, c_{\|\mathbf{r}\|}^{n/\rho} + c_{\|\mathbf{r}\|}^{n/\rho}\left(\frac{\|\mathbf{M}\|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho} - \frac{q}{\|\mathbf{r}\|}} \times$$

$$\times \left(\log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho} + \log\log \frac{\mu}{\varepsilon} + c_{\|\mathbf{r}\|,n,\rho}\right);$$

(*ii*) $L^{*}_{B_2}(W_1, \varepsilon) \leqslant L_3 + L_4 + c^{n/\rho}_{\|\mathbf{r}\|} L_2 \left(\log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho} + \log\log\frac{\mu}{\varepsilon} + c_{\|\mathbf{r}\|,n,\rho}\right)$,

где $W_1 = W_1(\mathbf{r}, \mathbf{M}, N, I)$,

$$L_3 = c_I + c_{\|\mathbf{r}\|,n,\rho} \frac{\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}}{\left(\log\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^2} \left(1 + \frac{\log N/\varepsilon}{\log \mu/\varepsilon}\right),$$

$$L_4 = c_{\|\mathbf{r}\|,n,\rho}\, c^{ns}_{\|\mathbf{r}\|} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{q}{n\rho}} \left(\log\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{3\rho(\|\mathbf{r}\|+2)^q} \left(\log\log\frac{\mu}{\varepsilon} + \log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}\right).$$

□ Применяем леммы 3, 12, 13 и следствия из лемм 7, 8, 9. □

Следствие:

(*i*) $(\exists\, \varepsilon_0 = \varepsilon(\mathbf{M}, N, \mathbf{r}, I))\,(\forall\, \varepsilon < \varepsilon_0)\,((L^{*}_{B_2}(W_1, \varepsilon) \leqslant L_5)\ \&\ (L_{B_2}(W_1, \varepsilon) \leqslant L_6))$,

(*ii*) $(\forall\, \sigma \in \{2, 3\})\,(\exists\, \varepsilon_1 = \varepsilon(\mathbf{M}, \mathbf{r}, I))\,(\forall\, \varepsilon < \varepsilon_1)$

$$\left(\left(L^{*}_{B_2}(W_\sigma, \varepsilon) \leqslant L_5 + b_{\|\mathbf{r}\|,n} \log\frac{N}{\varepsilon}\right)\ \&\ \left(L_{B_2}(W_\sigma, \varepsilon) \leqslant L_6 + b_{\|\mathbf{r}\|,n} \frac{\log N/\varepsilon}{\log\log N/\varepsilon}\right)\right),$$

где

$$L_5 = c^{n/\rho}_{\|\mathbf{r}\|} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}, \quad b_{\|\mathbf{r}\|,n} = b_{(\|\tilde{\mathbf{r}}\|+1)^n}, \quad L_6 = L_5/\log(\mu/\varepsilon)^{1/\rho}.$$

□ Положим $q = 1$, $s = \left[\frac{1}{n} a_{\|\mathbf{r}\|} \log\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}\right]$ и применим лемму 4. □

Верхние оценки для $L^{(*)}_{B_2}(W_\sigma, \varepsilon)$, объявленные в теореме, непосредственно вытекают из (1) и предыдущего следствия. Более того, если $\sigma \in \{2, 3\}$, то при любом $\varepsilon < \varepsilon(\mathbf{M}, I, \mathbf{r})$

$$L_{B_2}(W_\sigma, \varepsilon) \asymp \max\left\{\frac{(\mu/\varepsilon)^{1/\rho}}{\log \mu/\varepsilon}, \frac{\log N/\varepsilon}{\log\log N/\varepsilon}\right\},$$

$$L^{*}_{B_2}(W_\sigma, \varepsilon) \asymp \max\left\{\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}, \log\frac{N}{\varepsilon}\right\},$$

где константы в знаках $\asymp$ зависят лишь от $\|\mathbf{r}\|$, n, ρ.

Замечание. В доказательстве следствия леммы 14 не использована лемма 5. Но с помощью леммы 5 (без использования лемм 6, 7) можно найти порядки роста для функции Шеннона

$$L_{B_2}(W_\sigma, \varepsilon), \quad L_{B_4}(W_\sigma, \varepsilon), \quad L^{*}_{B_4}(W_\sigma, \varepsilon)$$

с точностью до мультипликативных констант, зависящих, возможно, от $\|\mathbf{r}\|$, n, ρ, $\frac{N + \|\mathbf{M}\|}{\mu}$ (в случае $\sigma \in \{2, 3\}$ — от $\|\mathbf{r}\|$, n, ρ, $\|\mathbf{M}\|/\mu$). Без использования лемм 5—7, но используя лемму 4, можно доказать, что если

$$I^n = [-1, 1]^n, \ \|\mathbf{M}\| \leqslant c_{\|\mathbf{r}\|}\mu, \ n \geqslant 4\|\mathbf{r}\|^2 + 4\|\mathbf{r}\|, \ \sigma \in \{2, 3\},$$

то при любом $\varepsilon < \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{M})$

$$L_{B_2}(W_\sigma,\ \varepsilon) \leqslant \frac{(c^n_{\|\mathbf{r}\|}\,\mu/\varepsilon)^{1/\rho}}{\log(\mu/\varepsilon)^{1/\rho}} + \frac{b\,(\|\tilde{\mathbf{r}}\| + 1)^n \log N/\varepsilon}{\log\log N/\varepsilon},$$

$$L^*_{B_2}(W_\sigma,\ \varepsilon) \leqslant (c^n_{\|\mathbf{r}\|}\,\mu/\varepsilon)^{1/\rho} + b\,(\|\tilde{\mathbf{r}}\| + 1)^n \log \frac{N}{\varepsilon}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации аналитических функций схемами и формулами. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1983, № 4, 36—43.
2. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной схемами из функциональных элементов. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1984, № 3, 35—41.
3. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной формулами в некоторых непрерывных базисах. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1984, № 6, 53—58.
4. Витушкин А. Г. Оценка сложности задачи табулирования. М., 1959.
5. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М., 1979.
6. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. — Пробл. кибернетики, 1965, вып. 14, 31—110.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969.
8. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976.

Поступила в редакцию
06.06.84