

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Фельзенбаум, Океаническая циркуляция и проблема Экмана, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 807–810

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

22 марта 2025 г., 22:02:30



А. И. ФЕЛЬЗЕНБАУМ

## ОКЕАНИЧЕСКАЯ ЦИРКУЛЯЦИЯ И ПРОБЛЕМА ЭКМАНА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 28 VII 1965)

После опубликования работ Г. Стоммела (1) и В. Манка (2) сложилось мнение, что в классической теории морских течений, исходящей из уравнений установившегося движения однородной жидкости и граничных условий в форме Экмана (3, 4), нельзя получить эффект западной интенсификации океанических течений, обусловленный неравномерностью ветра и широтным изменением параметра Кориолиса. В то же время изучение этой важной особенности океанической циркуляции с точки зрения классической теории представляет интерес в связи с тем, что в этой теории определяется не только средняя по вертикали скорость течения (1) или полный поток (2), но и скорость течения на любом горизонте в пределах слоя воды, который предполагается охваченным ветровым течением. Лишь сравнительно недавно (5) в рамках указанной теории удалось получить уравнение для интегральной функции тока, позволяющее получить в принципе все основные особенности океанической циркуляции, изученной Стоммелом и Манком. Кроме того, и это главное, открылась возможность изучения новых эффектов, связанных, в частности, с вертикальной структурой течений.

Основные соотношения теории имеют вид (6)

$$\begin{aligned} \vartheta' \Delta \psi + (\partial \vartheta' / \partial x + \partial \lambda' / \partial y) \partial \psi / \partial x + (\partial \vartheta' / \partial y - \partial \lambda' / \partial x) \partial \psi / \partial y = \\ = \operatorname{rot}_z m' T + \operatorname{div} n' T; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\partial \zeta / \partial x = -m' T_x + n' T_y - \lambda' \partial \psi / \partial x - \vartheta' \partial \psi / \partial y, \quad (2)$$

$$\partial \zeta / \partial y = -n' T_x - m' T_y + \vartheta' \partial \psi / \partial x - \lambda' \partial \psi / \partial y;$$

$$u = N T_x + M T_y + \Theta \partial \zeta / \partial x + \Lambda \partial \zeta / \partial y,$$

$$v = -M T_x + N T_y - \Lambda \partial \zeta / \partial x + \Theta \partial \zeta / \partial y, \quad (3)$$

где  $u, v$  — горизонтальные составляющие скорости течения вдоль декартовых осей координат  $X, Y, Z$ , направленных соответственно по экватору на восток, на север и вертикально вниз (начало координат — на невозмущенной поверхности моря);  $\zeta$  — уровень;  $T$  — тангенциальное напряжение ветра;  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  — оператор Лапласа. Наконец,  $\psi$  — интегральная функция тока, связанная с составляющими полного потока соотношениями:

$$s_x = \int_{\zeta}^H u dz = -\partial \psi / \partial y; \quad s_y = \int_{\zeta}^H v dz = \partial \psi / \partial x.$$

Все коэффициенты в (1) — (3) можно выразить через некоторые безразмерные стандартные функции (6). Если океаническая область включает экватор, в окрестности которого вычисление стандартных функций затруднено, то целесообразно ввести во всей области новые стандартные функции

$$f_i^* = f_i (aH)^{-2}, \quad F_i^* = F_i (aH)^{-2}, \quad f_j^* = f_j (aH)^2,$$

где  $i = 1, 2, 3, 4$  и  $j = 5, 6$ . Связь коэффициентов со стандартными функциями следующая:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\Omega}{gH} (aH)^{-2} f_5^*, & \vartheta' &= \frac{\Omega}{gH} (aH)^{-2} f_6^*, \\ m' &= \frac{1}{g\rho H} (f_{1/5}^* + f_{2/6}^*), & n' &= \frac{1}{g\rho H} (f_{2/5}^* - f_{1/6}^*), \\ N &= \frac{1}{g\rho\Omega} (aH)^2 F_1^*, & M &= \frac{1}{g\rho\Omega} (aH)^2 F_2^*, \\ \Theta &= \frac{g}{\Omega} (aH)^2 F_3^*, & \Lambda &= \frac{g}{\Omega} (aH)^2 F_4^*. \end{aligned}$$

Мы не вводим функции  $f_9^*$  и  $f_{10}^*$ , так как функции  $F^*$  удобнее определить непосредственно по формулам

$$\begin{aligned} F_1^* &= (2/aH) [(ch aH \cos aH + sh aH \sin aH) ch \eta \sin \eta + \\ &+ (ch aH \cos aH - sh aH \sin aH) sh \eta \cos \eta] / (ch 2aH + \cos 2aH), \\ F_2^* &= (2/aH) [(ch aH \cos aH + sh aH \sin aH) sh \eta \cos \eta - \\ &- (ch aH \cos aH - sh aH \sin aH) ch \eta \sin \eta] / (ch 2aH + \cos 2aH), \\ F_3^* &= (sh \vartheta \sin \eta + sh \eta \sin \vartheta) / (aH)^2 (ch 2aH + \cos 2aH)', \\ F_4^* &= (ch 2aH + \cos 2aH - ch \vartheta ch \eta + \\ &+ ch \eta \cos \vartheta) / (aH)^2 (ch 2aH + \cos 2aH). \end{aligned}$$

Уже недалеко от экватора, практически при  $aH > 1$ , новые стандартные функции легко вычисляются непосредственно, как и старые стандарт-

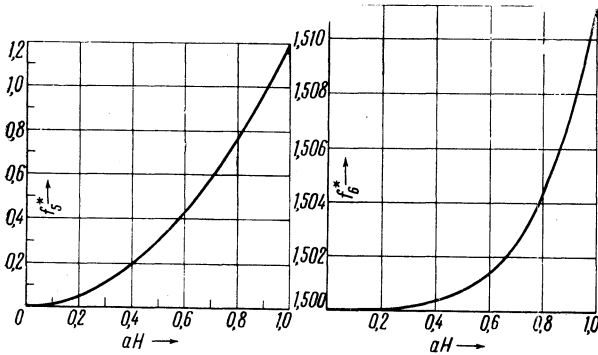


Рис. 1

ные функции. В окрестности же экватора они вычисляются в рядах, которые быстро сходятся. При  $aH < 1$  функции  $f_5^*$  и  $f_6^*$ , например, могут быть вычислены с вполне достаточной точностью по формулам

$$\begin{aligned} f_5^* &= [6/5(aH)^2 + 256/315(aH)^6] / [1 + 356/525(aH)^4], \\ f_6^* &= [3/2 + 36/35(aH)^4 + 496/315(aH)^8] / [1 + 356/315(aH)^4 + 4840/6615(aH)^8]. \end{aligned}$$

Результаты вычислений функций  $f_5^*$ ,  $f_6^*$  при  $0 \leq aH \leq 1$  в графической форме показаны на рис. 1.

Наиболее просто определяются стандартные функции на самом экваторе ( $aH = 0$ ), где  $f_1^* = f_3^* = f_5^* = F_2^* = F_4^* = 0$ ;  $f_2^* = 1$ ,  $f_4^* = 1/3$ ,  $f_6^* = 3/2$ ,  $F_1^* = 2(1 - z')$ ,  $F_3^* = 1 - z'^2$ . Из (2), (3) получим для экватора

$$u = \frac{H-z}{\rho A} T_x + \frac{g}{A} \frac{H^2 - z^2}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad v = \frac{H-z}{\rho A} T_y + \frac{g}{A} \frac{H^2 - z^2}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{3}{2g\rho H} T_x - \frac{3A}{gH^3} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{3}{2g\rho H} T_y + \frac{3A}{gH^3} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Таким образом, с точки зрения связи между скоростью течения, наклоном уровня и интегральной функцией тока мы имеем на экваторе аналог мелкого моря (6).

Введем теперь безразмерный параметр

$$f_0 = \frac{\Omega \rho k}{\sqrt{2} \gamma} \frac{H}{W}, \quad (6)$$

в котором  $W$  — модуль скорости ветра,  $k$  — среднее статистическое значение ветрового коэффициента и  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности в квадратичной зависимости тангенциального напряжения ветра от его скорости (6). Параметр  $f_0$ , с другой стороны, связан с безразмерным аргументом  $aH$  соотношением

$$f_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} (aH)^2 s^*, \quad (7)$$

где  $s^* = \frac{2\sqrt{2}}{aH} \sqrt{s}$ . На самом экваторе  $s^* = 1$ , а вдали от него ( $aH \rightarrow \infty$ )  $s^* = 0$ . Вблизи экватора  $s^*$  легко вычисляется в рядах. В графической форме результаты вычислений представлены на рис. 2.

При изучении течений в морях мы предполагали ранее коэффициент  $k$  постоянным (6). При рассмотрении океанических течений можно учесть зависимость этого коэффициента от широты места, пользуясь эмпирической формулой

$$k = 0,0127 / \sqrt{\sin(\varphi + \varphi_0)}, \quad (8)$$

в которой  $\varphi_0$  — некоторая постоянная величина, определяемая в зависимости от среднего статистического значения ветрового коэффициента на самом экваторе. Это значение, по данным имеющихся наблюдений в Атлантическом океане, может быть принято равным 0,2. Заметим, что такое большое значение коэффициента  $k$  связано, по-видимому, с особенностью динамических процессов в районе экватора, в частности с развитием слоя скачка, в результате чего затрудняется вертикальный обмен количеством движения и уменьшается коэффициент вертикального обмена по мере приближения к экватору.

При  $k = 0,2$  мы получаем очень небольшое значение  $\varphi_0 = 0,004$ , так что формула (8) недалеко от экватора практически переходит в формулу Экмана (3, 4), следующую из формулы (8) при  $\varphi_0 = 0$ .

Вычислив по формуле (6) значение параметра  $f_0$  в зависимости от отношения глубины  $H$  к скорости ветра  $W$ , широты места  $\varphi$  ( $\Omega = 2\omega \sin \varphi$ ) и коэффициента  $k$ , мы можем затем с помощью соотношения (7) вычислить безразмерный аргумент стандартных функций  $aH$ . После этого определяются все коэффициенты в основных соотношениях теории (1), (2), (3). Интегрируя уравнение (1) при граничном условии

$$(\psi)_L = 0, \quad (9)$$

где  $L$  — контур замкнутого бассейна, мы получим решение задачи.

Переходя к граничным задачам, связанным с интегрированием основного уравнения (1), рассмотрим прежде всего случай океанической области, расположенной вдали от экватора. В этом случае  $2 aH \gg 1$ , и вместо (1) с достаточной точностью мы получим уравнение

$$\frac{\Omega}{2aH} \Delta \psi + \frac{d\Omega}{dy} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\Omega}{H} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{H}{\rho} \text{rot}_z \mathbf{T}. \quad (10)$$

Если к тому же глубина  $H = \text{const}$ , то уравнение (10) упрощается:

$$\frac{\Omega}{2aH} \Delta \psi + \frac{d\Omega}{dy} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \text{rot}_z \mathbf{T}. \quad (11)$$

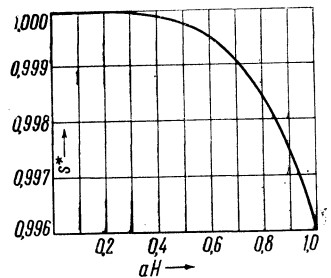


Рис. 2

Уравнение (11) с точностью до коэффициентов совпадает с уравнением Стоммела (1, 5)\*.

При произвольном контуре  $L$  решение уравнений (1), (10) или (11) находится численным методом с помощью ЭВМ. В некоторых частных случаях находится и аналитическое решение. В частности, оно может быть найдено для бассейна прямоугольной формы (при постоянной глубине), расположенного вдали от экватора, при ветре, меняющемся по закону  $W = W_0 \cos \varphi \cdot (\sin \varphi)^{-1/2}$ . В этом случае вместо уравнения (11) мы будем иметь уравнение с постоянными коэффициентами

$$C \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\beta \rho} \operatorname{rot}_z T \quad (12)$$

( $C$  — некоторая константа,  $\beta$  — широтное изменение параметра Кориолиса), которое интегрируется так же, как уравнение Стоммела.

Аналитическое решение может быть найдено также для зонального канала, замкнутого на бесконечности, при ветре, меняющемся только в поперечном направлении (7). В этом случае все функции не зависят от координаты  $x$ , и мы получим из (1)

$$\frac{d}{dy} \left( \vartheta' \frac{d\psi}{dy} \right) = - \frac{dm'T_x}{dy} + \frac{dn'T_y}{dy}, \quad (13)$$

откуда

$$s_x = - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\vartheta'} [m'T_x - n'T_y + c]. \quad (14)$$

Постоянная интегрирования  $c$  определяется из условия замкнутости канала

$$\int_{-b_1}^{b_2} s_x dy = 0, \quad (15)$$

где  $b_2 - b_1$  — поперечный размер канала. После несложных преобразований получим

$$s_x = \frac{1}{\vartheta'} (m'T_x - n'T_y) - \frac{\overline{(m'T_x/\vartheta')} - \overline{(n'T_y/\vartheta')}}{\vartheta'(1/\vartheta')}. \quad (16)$$

Из формулы (16) видно, что полный поток в поперечном сечении канала отличен от нуля даже в том случае, когда ветер является равномерным. Этот вывод, как видно из (1), остается в силе и в случае произвольного контура замкнутого бассейна при постоянных значениях глубины  $H$  и коэффициента вертикального обмена  $A$ .

Таким образом, уравнение (1) является более общим, чем уравнение Стоммела (1) или Манка (2). Кроме того, решив это уравнение, мы, как уже указывалось, получаем возможность определить скорость течения на любом горизонте. Наконец, привлечение уравнения (1) позволяет рассматривать задачи, связанные с особенностями течений у экватора (8), в то время как из уравнений Стоммела и Манка эти особенности не могут быть получены.

Морской гидрофизический институт  
Академии наук УССР

Поступило  
26 VII 1965

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> H. Stommel, Trans. Am. Geophys. Union, 29, № 2 (1948). <sup>2</sup> W. Munk, J. Meteorol., 7, № 2 (1950). <sup>3</sup> W. Ekman, Ark. Mat., Astr., Phys., 2, № 11 (1905). <sup>4</sup> W. Ekman, Ark. Mat., Astr., Phys., 17, № 26 (1923). <sup>5</sup> А. И. Фельзенбаум, Развитие теории установившихся морских течений и дрейфа льда, МГУ, 1960. <sup>6</sup> А. И. Фельзенбаум, Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений, М., 1960. <sup>7</sup> А. И. Фельзенбаум, Тр. Инст. океанологии АН СССР, 19 (1956). <sup>8</sup> Н. Б. Шапиро, ДАН, 164, № 2. (1965).

\* Полное совпадение можно получить, заменяя в уравнении (11) переменный коэффициент при старших производных его средним значением и подбирая соответствующим образом значение коэффициента вертикального обмена.