Дискретная математика

том 11 выпуск 2 * 1999

УДК 519.6

Рекуррентный алгоритм решения комбинаторной задачи о размещениях с ограничениями

© 1999 г. И. И. Труб

Пусть имеется N групп, каждая из которых состоит из Q одинаковых элементов, а элементы разных групп различны. Сколькими способами можно расставить эти QN элементов так, чтобы в получившейся перестановке оказалось ровно L пар соседних одинаковых элементов, $0 \leqslant L \leqslant N(Q-1)$? Частный случай $L = 0$ соответствует вычислению количества перестановок, в которых никакие два одинаковых элемента не стоят рядом.

В работе предлагается рекуррентный алгоритм решения этой задачи, а также его обобщение на случай необязательно одинаковых размеров групп.

1. Вводные замечания

Пусть имеется N групп, каждая из которых состоит из Q одинаковых элементов, а элементы разных групп различны. Сколькими способами можно расставить эти QN элементов так, чтобы в получившейся перестановке оказалось ровно L пар соседних одинаковых элементов, $0 \leqslant L \leqslant N(Q-1)$?

Элементы групп будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, a, b и так далее. Введем важное для дальнейшего изложения понятие звена.

Звеном в перестановке назовем пару элементов одной группы, стоящих рядом.

Например, в перестановке $abbcaa$ имеется два звена, в перестановке $aaabbb$ имеется четыре звена.

Приступим теперь к исследованию задачи. Сформулируем несколько очевидных свойств, используемых при обосновании предлагаемого алгоритма.

Свойство 1. *В любой перестановке kQ элементов (k групп по Q одинаковых элементов) число звеньев s таково, что $0 \leqslant s \leqslant k(Q-1)$. Удаление из такой перестановки всех элементов любой группы приводит к перестановке, в которой число звеньев s_1 удовлетворяет неравенствам*

$$\max\{0, s-Q+1\} \leqslant s_1 \leqslant \min\{(k-1)(Q-1), s+Q\}.$$

Свойство 2. *Добавление к такой перестановке Q элементов новой группы порождает перестановку с числом звеньев s_2 таким, что*

$$\max\{0, s-Q\} \leqslant s_2 \leqslant \min\{(k+1)(Q-1), s+Q-1\}.$$

Свойство 3. *Если перестановка N групп содержит L звеньев, то число звеньев в перестановке k групп, полученной из нее удалением любых $N-k$ групп, ограничено сверху величиной $(N-k)Q+L$.*

Последнее свойство можно интерпретировать и таким образом: если перестановка k групп содержит более, чем $(N-k)Q+L$, звеньев, то невозможно дополнить ее $(N-k)Q$ элементами оставшихся групп так, чтобы итоговая перестановка содержала L звеньев.

2. Алгоритм решения задачи

Сформулируем теперь алгоритм, который позволяет, зная число перестановок k групп для каждого числа звеньев в диапазоне от нуля до $\min\{k(Q-1),(N-k)Q+L\}$, получить число перестановок $k+1$ группы для каждого числа звеньев в диапазоне от нуля до $\min\{(k+1)(Q-1),(N-k-1)Q+L\}$, $k \geqslant 2$.

(1) Пусть имеется совокупность $\{A_i^k\}$, $0 \leqslant i \leqslant \min\{k(Q-1),(N-k)Q+L\}$, где A_i^k — число перестановок k групп с i звеньями.

(2) $m := 0$, все элементы совокупности $\{A_i^{k+1}\}$ положить равными нулю.

(3) Если $m > \min\{(k+1)(Q-1),(N-k-1)Q+L\}$, то перейти к шагу 8, иначе к следующему шагу.

(4) $n := \max\{m-Q+1, 0\}$.

(5) По формулам, полученным в следующей части работы, найти число всевозможных способов добавления Q элементов $(k+1)$-й группы для получения из перестановки k групп с n звеньями перестановки $k+1$ группы с m звеньями. Обозначим это число символом $\mathrm{Per}_n^m(k)$. Тогда $A_m^{k+1} := A_m^{k+1} + \mathrm{Per}_n^m(k)A_n^k$.

(6) $n =: n+1$. Если $n > \min\{(m+Q, k(Q-1),(N-k)Q+L\}$, то перейти к шагу 7, иначе к шагу 5.

(7) $m := m+1$. Перейти к шагу 3.

(8) Получили совокупность $\{A_i^{k+1}\}$, $0 \leqslant i \leqslant \min\{(k+1)(Q-1),(N-k-1)Q+L\}$. Это результат работы алгоритма.

Далее k увеличиваем на единицу и применяем этот алгоритм вновь. Когда сформирована совокупность $\{A_i^{N-1}\}$, находится число всевозможных вставок Q элементов N-й группы только для $m=0$. Это и будет решением исходной задачи, так как алгоритм учел все возможные перестановки.

Сформулируем теперь так называемый вводный алгоритм для перехода от $k=1$ к $k=2$. Особенность этого перехода состоит в том, что Q элементов одной группы можно расставить только одним способом, с $Q-1$ звеньями. Совокупность $\{A_i^1\}$ состоит из одного элемента, соответствующего $i=Q-1$, причем этот элемент равен единице.

(1) $m := 0$, $n := Q-1$. Все элементы совокупности $\{A_i^2\}$ положить равными нулю.

(2) Если $m > \min\{2(Q-1), (N-2)Q+L\}$, то перейти к шагу 5, иначе перейти к следующему шагу.

(3) По формулам, полученным в следующей части работы, найти число всевозможных способов добавления Q элементов второй группы, позволяющих получить из перестановки одной группы перестановку двух групп с m звеньями: $A_m^2 := A_m^2 + \mathrm{Per}_{Q-1}^m(1)$.

(4) $m := m + 1$. Перейти к шагу 2.

(5) Получили совокупность $\{A_i^2\}$, $0 \leqslant i \leqslant \min\{2(Q-1), (N-2)Q+L\}$. Это результат работы вводного алгоритма.

Интересно отметить общность описанного алгоритма с известной схемой Беллмана решения оптимизационных задач [1]. Аналогия прослеживается в следующем.

(1) Первый шаг решения очевиден и вытекает непосредственно из исходных данных (при $k = 1$ имеется одна перестановка с $Q - 1$ звеньями).

(2) На каждом шаге решается совокупность однотипных задач для каждого значения из некоторого диапазона, причем для этого используется множество решений, полученное на предыдущем шаге. В этом смысле A_i^k можно считать формальным аналогом функции Беллмана, где k выполняет роль порядкового номера функции, а i ее аргумента. Отличие заключается в содержании: для нахождения значения функции Беллмана нужно решать задачу минимизации, а для вычисления A_i^k находить число перестановок k групп с i звеньями.

(3) На заключительном шаге решение задачи ищется только для одного значения $i = L$.

3. Вывод основных формул

Перейдем к выводу формул, на которые делается ссылка в алгоритме. Прежде всего еще раз сформулируем задачу.

Имеется некоторая перестановка множества элементов, состоящего из k групп по Q одинаковых элементов в каждой группе, то есть в перестановке стоят в произвольном порядке kQ элементов. В ней есть n звеньев. Сколькими способами в нее можно включить Q элементов $(k+1)$-й группы так, чтобы в получившейся перестановке стало m звеньев?

Следует отметить, что согласованность значений n и m, иными словами, корректность поставленной задачи обеспечивается работой алгоритма. Введем несколько обозначений.

Для краткости будем называть элементы $(k+1)$-й группы φ-элементами, а элементы первых k групп f-элементами. Звено, образованное φ-элементами, назовем φ-звеном, все другие звенья будем называть f-звеньями.

Будем обозначать $\lfloor x \rfloor$ наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число, большее x.

Итак, в готовой перестановке должно быть m звеньев. Пусть p из них приходятся на f-элементы, $m-p$ на φ-элементы (то есть имеют вид $\varphi\varphi$). Ясно, что $p \leqslant \min\{m, n\}$. Кроме того, $n - p$ f-звеньев нужно разорвать φ-элементами. После этого нам еще

понадобится по крайней мере $m - p$ φ-элементов, чтобы создать $m - p$ φ-звеньев. Поэтому требуется выполнение неравенства $Q - (n - p) - (m - p) \geqslant 0$, или $p \geqslant (n + m - Q)/2$. Другими словами, $p \geqslant \max\{0, (n + m - Q)/2\}$, так как $n + m - Q$ может быть и отрицательным числом. Сделаем несколько простых замечаний:

(a) если Q φ-элементов попадают ровно в d промежутков между элементами, образованных f-элементами, то при этом получается ровно $Q - d$ φ-звеньев, поэтому $Q - d = m - p$ и $d = Q + p - m$;

(b) число разбиений упорядоченного множества из Q элементов на $Q + p - m$ непустых отрезков равно $C_{Q-1}^{Q+p-m-1}$ (см., например, [2]);

(c) при размещении φ-элементов число f-звеньев уменьшится на число промежутков, являвшихся f-звеньями, в которые попадают φ-элементы;

(d) если kQ f-элементов, образующих $kQ + 1$ позиций, расположены так, что они образуют ровно n звеньев, то число способов выбора промежутков, содержащих ровно $n - p$ f-звеньев, равно $C_n^{n-p} C_{kQ-n+1}^{Q+p-m-(n-p)} = C_n^{n-p} C_{kQ-m+1}^{Q+2p-m-n}$.

В итоге получаем рабочую формулу

$$\mathrm{Per}_n^m = \sum_{p=Z_1}^{Z_2} C_{Q-1}^{Q+p-m-1} C_n^{n-p} C_{kQ-n+1}^{Q+2p-m-n}, \tag{1}$$

$$Z_1 = \max\{0, \lceil (n + m - Q)/2 \rceil\}, \tag{2}$$
$$Z_2 = \min\{m, n\}.$$

Заметим следующее обстоятельство. Что означает ситуация, когда выполняется неравенство $Q + 2p - n - m > kQ - n + 1$? Она означает, что промежутков для размещения φ-элементов не хватило, и перестановка при данных n, m и p невозможна. Поэтому верхнюю границу для p следует уточнить, положив

$$Z_2 = \min\{m, n, \lfloor (Q(k - 1) + m + 1)/2 \rfloor\}. \tag{3}$$

Докажем корректность формулы (1). Для этого нужно доказать справедливость следующих неравенств.

(a) $Q + p - m - 1 \leqslant Q - 1$. Это неравенство следует из неравенства $p - m \leqslant 0$, которое обеспечивается выбором верхней границы (3) для p.

(b) $Q + p - m - 1 \geqslant 0$. Согласно (2) $p \geqslant \lceil (n + m - Q)/2 \rceil$, откуда следует, что

$$Q + p - m - 1 \geqslant \lceil Q + (n + m - Q)/2 - m - 1 \rceil = \lceil (Q + n - m - 2)/2 \rceil.$$

Очевидно, что $m - n \leqslant Q - 1$, откуда

$$\lceil (Q - (m - n) - 2)/2 \rceil \geqslant \lceil (Q - (Q - 1)_2)/2 \rceil = \lceil -1/2 \rceil = 0.$$

Неравенство доказано.

(c) $n - p \geqslant 0$. Это неравенство непосредственно следует из (3).

(d) $Q + 2p - m - n \leqslant kQ - n + 1$. Это неравенство также непосредственно следует из (3).

(e) $Q + 2p - m - n \geqslant 0$. Согласно (2) $2p \geqslant n + m - Q$. Отсюда прямо следует искомое неравенство.

Корректность формулы (1) полностью доказана.

4. Обобщение алгоритма

Распространим предложенный алгоритм на более общую задачу, когда каждая группа содержит свое число Q_i одинаковых элементов, $i = 1, \ldots, N$. Отметим, что если

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant N} Q_i = Q_j, \qquad Q_j - 1 > \sum_{i=1}^{j-1} Q_i + \sum_{i=j+1}^{N} Q_i + L,$$

то задача не имеет решения (своеобразное правило треугольника). В противном случае упорядочиваем совокупность $\{Q_i\}$ по убыванию и применяем предложенный выше алгоритм, заменяя в нем Q на Q_{k+1} и kQ на $Q_1 + \ldots + Q_k$. Упорядочение по убыванию необходимо для исключения в процессе вычислений различных нежелательных ситуаций, например, когда нужно вставить в перестановку количество элементов, превышающее число элементов, уже имеющееся в перестановке.

Перепишем основной алгоритм и формулу (1) применительно к обобщенной задаче.

(1) Имеется совокупность $\{A_j^k\}$, $0 \leqslant j \leqslant \min\left\{\sum_{c=1}^{k}(Q_c - 1), \sum_{c=k+1}^{N} Q_c + L\right\}$.

(2) $m := 0$, $i := 0$, все элементы совокупности $\{A_j^{k+1}\}$ положить равными нулю.

(3) Если

$$m > \min\left\{\sum_{c=1}^{k+1}(Q_c - 1), \sum_{c=k+2}^{N} Q_c + l\right\},$$

то перейти к шагу 8, иначе перейти к следующему шагу.

(4) $n := \max\{m - (Q_{k+1} - 1), 0\}$.

(5) Найти число всевозможных способов добавления Q_{k+1} элементов $(k+1)$-й группы для получения из перестановки k групп с n звеньями перестановки $k+1$ группы с m звеньями: $A_i^{k+1} := A_i^{k+1} + \mathrm{Per}_n^m(k) A_n^k$.

(6) $n := n + 1$. Если

$$n > \min\left\{m + Q_{k+1}, \sum_{c=1}^{k}(Q_c - 1), \sum C = k + 1^N Q_c + L\right\},$$

то перейти к шагу 7, иначе перейти к шагу 5.

(7) $m := m + 1$, $i := i + 1$. Перейти к шагу 3.

(8) Получим совокупность $\{A_j^{k+1}\}$, $0 \leqslant j \leqslant \min\left\{\sum_{c=1}^{k+1}(Q_c - 1), \sum_{c=k+2}^{N} Q_c + L\right\}$.

Формула (1) принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathrm{Per}_n^m(k) &= \sum_{p=Z_1}^{Z_2} C_{Q_{k+1}-1}^{Q_{k+1}+p=m-1} C_n^{n-p} C_{Z_3}^{Q_{k+1}+2p-m-n},\\
Z_1 &= \max\{0, \lceil (n+m-Q_{k+1})/2 \rceil\},\\
Z_2 &= \min\{m, n, \lfloor (Q_1^k - Q_{k+1} + m + 1)/2 \rfloor\},\\
Q_1^k &= \sum_{c=1}^{k} Q_c,\\
Z_3 &= Q_c^k - n + 1.
\end{aligned}$$

5. Оценка трудоемкости алгоритма

Прежде всего дадим оценку сверху для $\min\{k(Q-1), (N-k)Q\}$, фигурирующего в описании алгоритма. Максимальное значение этого минимума достигается, естественно, при равенстве обоих аргументов. Приравняв их, получим, что $k = NQ/(2Q-1)$, и следовательно, при добавлении Q элементов очередной группы m и n ограничены сверху значением

$$B = NQ(Q-1)/(2Q-1).$$

Отсюда следует, что при этом переходе расчетная формула (4) будет применена не более B^2 раз. Оценим теперь трудоемкость формулы (1). Она представляет собой суммы, число слагаемых в каждой из которых не превышает B. Значит, трудоемкость одного шага вычислений оценивается сверху величиной B^3. Так как для решения задачи необходимо сделать $N-1$ таких шагов, суммарная трудоемкость алгоритма имеет (подчеркиваем, очерь завышенную) оценку $B^3(N-1) = O(N^4Q^3)$, иными словами, четвертый порядок по N и третий порядок по Q. Таким образом, предложенный алгоритм имеет полиномиальную сложность.

Список литературы

1. Васильев Ф. П. *Численные методы решения экстремальных задач*. Наука, Москва, 1980.
2. Виленкин Н. Я. *Комбинаторика*. Наука, Москва, 1969.

Статья поступила 05.08.1991.
Переработанный вариант поступил 09.01.1999.