В. М. Футорный, Об одной конструкции неприводимых представлений полупростых алгебр Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 2, 92–93

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 2, 92—93

УДК 512.554.3

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

В. М. Футорный

Пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{G}$, R — система корней, Δ — базис системы R, R_+ (соответственно R_-) — множество положительных (соответственно отрицательных) корней относительно Δ, $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$.

В заметке рассматривается некоторая конструкция $\mathfrak{G}$-модулей, обобщающая известную конструкцию модулей Верма [1].

Рассмотрим k-элементное подмножество $\Delta^{(k)} \subset \Delta$, $0 \leqslant k < \dim \mathfrak{h}$. Пару $\Phi_k = (\Delta, \Delta^{(k)})$ будем называть k-отмеченным базисом системы корней R. Обозначим через $R^{(k)}$ подсистему корней в R, порожденную $\Delta^{(k)}$. Для каждого $\alpha \in R$ выберем $X_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha - \{0\}$ и $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$. Положим $\overline{\mathfrak{A}}_{\Phi_k} = \langle X_\alpha, \alpha \in R_+ \setminus R_+^{(k)} \rangle$, $\mathfrak{h}^k = \langle H_\alpha, \alpha \in \Delta \setminus \Delta^{(k)} \rangle$, $\mathfrak{h}_k = \langle H_\alpha, \alpha \in \Delta^{(k)} \rangle$, $\mathfrak{A}_{\Phi_k} = \overline{\mathfrak{A}}_{\Phi_k} \oplus \mathfrak{h}^k$, $\Lambda_{\Phi_k} = U(\mathfrak{A}_{\Phi_k}) + C_k(\mathfrak{h})$, где $C_k(\mathfrak{h})$ — централизатор алгебры $\mathfrak{h}$ в $U(\mathfrak{h}_k \oplus \langle X_\alpha, \alpha \in R^{(k)} \rangle)$.

Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, W — простой конечномерный Λ_{Φ_k}-модуль такой, что $(a + H)w = (\lambda - \delta)(H)w$ для всех $a \in \overline{\mathfrak{A}}_{\Phi_k}$, $H \in \mathfrak{h}, w \in W$. Соответствующее представление алгебры Λ_{Φ_k} будем обозначать через ρ_k.

Построим $\mathfrak{G}$-модуль $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k) = U(\mathfrak{G}) \underset{\Lambda_{\Phi_k}}{\otimes} W$, ассоциированный с $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$, k, Φ_k, λ, ρ_k.

Предложение 1. (i) $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_\mu$.

(ii) $\dim M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_\mu < \infty$ *для всех* $\mu \in \mathfrak{h}^*$.

(iii) $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_{\lambda-\delta} = 1 \otimes W$, $\overline{\mathfrak{A}}_{\Phi_k} M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_{\lambda-\delta} = 0$.

Замечание. Если $k = 0$, то $\dim W = 1$ и $M_{\Phi_0}(\lambda, \rho_0) \simeq M(\lambda)$, где $M(\lambda)$ — модуль Верма, ассоциированный с $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$, Δ, λ.

Предложение 2. (i) *Положим* $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_+ = \sum_{\mu \neq \lambda - \delta} M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_\mu$. *Тогда любой $\mathfrak{G}$-подмодуль модуля $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)$, отличный от $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)$, содержится в* $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_+$.

(ii) *В $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)$ существует наибольший $\mathfrak{G}$-подмодуль $\mathfrak{M}$, отличный от $M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)$.*

Доказательство предложений 1, 2 проводится аналогично доказательству соответствующих результатов для модулей Верма [1].

Обозначим $L_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k) = M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)/\mathfrak{M}$.

Предложение 3. *Пусть $k > 0$. $L_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k) \simeq L_{\Phi_k}(\lambda', \rho_k')$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(i) *существует элемент* $s_k \in C_k(\mathfrak{h})$ такой, что $\rho_k(s_k) \neq 0$ и $s_k = s'' \cdot s'$, где $s' M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_{\lambda-\delta} \subset M_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_{\lambda'-\delta}$.

(ii) $L_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)_{\lambda'-\delta} \simeq L_{\Phi_k}(\lambda', \rho_k')_{\lambda'-\delta}$ как $C_k(\mathfrak{h})$-модули.

Определение. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{G}$-модуль, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Конечномерное ненулевое подпространство $T \subset V$ будем называть k-примитивным подпространством веса λ относительно k-отмеченного базиса Φ_k системы корней R, если $T \subset V_\lambda$ и $\overline{\mathfrak{A}}_{\Phi_k} T = 0$.*

Теорема 1. *Пусть V — простой $\mathfrak{G}$-модуль, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, T — k-примитивное подпространство веса $\lambda - \delta$ относительно k-отмеченного базиса Φ_k, $C_k(\mathfrak{h}) T \subset T$. Тогда $V \simeq L_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)$, где ρ_k — соответствующее представление алгебры Λ_{Φ_k} в T.*

Следствие. Пусть V — простой $\mathfrak{G}$-модуль, содержащий k-примитивное подпространство веса $\lambda - \delta$ относительно k-отмеченного базиса Φ_k системы корней R, причем $\dim V_{\lambda-\delta} < \infty$. Тогда $V \simeq L_{\Phi_k}(\lambda, \rho_k)$, где ρ_k — соответствующее представление алгебры Λ_{Φ_k} в $V_{\lambda-\delta}$.

В частном случае можно получить характеризацию простых модулей, не содержащих k-примитивных подпространств.

Теорема 2. *Пусть* $n \in \{2, 3\}$, $\mathfrak{G} = sl(n)$, V — *простой* $\mathfrak{G}$-*модуль такой, что* $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ *и* $\dim V_\mu < \infty$ *для всех* $\mu \in \mathfrak{h}^*$. *Следующие условия равносильны:*

(i) *Для каждого целого* $k \in [0, n-2]$ *модуль* V *не содержит* k-*примитивных подпространств при любом выборе* k-*отмеченного базиса системы корней* R.

(ii) *Модуль* V *не содержит* $(n-2)$-*примитивных подпространств при любом выборе* $(n-2)$-*отмеченного базиса системы корней* R.

(iii) *Элементы* $X_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha - \{0\}$, $\alpha \in R$, *индуцируют изоморфные отображения соответствующих весовых пространств.*

В работе [2] оговорено существование простого $sl(3)$-модуля, у которого все весовые пространства двумерны. На самом деле справедливо следующее

Предложение 4. *Для каждого целого* $m \geqslant 1$ *существует простой* $sl(3)$-*модуль* V, *удовлетворяющий равносильным условиям теоремы* 2, *такой, что* $\dim V_\mu = m$ *для любого веса* μ *модуля* V.

Применяя изложенную выше конструкцию индуцирования к любому весовому пространству такого модуля, получаем

Следствие. Для всех целых $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 3$ существует простой $sl(n)$-модуль, у которого кратности всех весов $\geqslant m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.— М.: Мир, 1978. 2. *Britten D. J., Lemire F. W.* // Trans. of the Amer. Math. Soc.— 1982.— V. 273, № 2.— P. 509—540.

Киевский государственный
университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило в редакцию
9 декабря 1985 г.