ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 3.

УДК 512.623 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-59-67

# Расширения Инабы полных полей характеристики 0[1]

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

**Сергей Владимирович Востоков** — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

**Игорь Борисович Жуков** — доктор физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*

**Ольга Юрьевна Иванова** — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (г. Санкт-Петербург).
*e-mail: olgaiv80@mail.ru*

**Аннотация**

В статье изучаются $p$-расширения полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики, где $p$ — характеристика поля вычетов рассматриваемого поля. Известно, что любое вполне разветвленное расширение Галуа степени $p$ с немаксимальным скачком ветвления может быть задано уравнением Артина-Шрайера; при этом ограничение сверху на скачок ветвления соответствует ограничению снизу на нормирование правой части уравнения. Задача построения расширений с заданной группой Галуа произвольного конечного порядка не решена.

В работах Инабы рассматривались $p$-расширения полей характеристики $p$, заданные матричным уравнением $X^{(p)} = AX$, которое мы здесь называем уравнением Инабы. В этом уравнении $X^{(p)}$ обозначает матрицу, полученную возведением каждого элемента квадратной матрицы $X$ в степень $p$, а — некоторая унипотентная матрица $A$ над данным полем. Такое уравнение задает последовательность расширений полей, каждое из которых задано уравнением Артина-Шрайера. Было доказано, что любое уравнение Инабы задает расширение Галуа, и обратно, любое конечное $p$-расширение Галуа задается уравнением такого вида.

В настоящей работе для полей смешанной характеристики доказано, что расширение, задаваемое уравнением Инабы, является расширением Галуа, если нормирования элементов матрицы удовлетворяют некоторым оценкам снизу, т.е. если скачки промежуточных расширений степени $p$ достаточно малы.

Данная конструкция может применяться при решении задачи погружения расширений полей. Уравнение Инабы задает последовательность расширений полей, полученную последовательным присоединением элементов диагоналей матрицы. Это означает, что, если расширение $L/K$ задано уравнением Инабы, и матрица $A$ выбрана так, что на диагоналях с большими номерами записаны нули, то можно получать расширения, содержащие $L/K$, заменяя нули другими элементами. В работе доказано, что любое нециклическое расширение степени $p^2$ с достаточно маленькими скачками можно погрузить в расширение с группой Галуа, изоморфнной группе унипотентных матриц $3 \times 3$ над полем из $p$ элементов.

В конце статьи сформулирован ряд открытых вопросов, при исследовании которых, возможно, окажется полезной данная конструкция.

*Ключевые слова:* дискретно нормированное поле, скачок ветвления, уравнение Артина-Шрайера.

*Библиография:* 15 названий.

[1]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10200).

**Для цитирования:**
С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова Расширения Инабы полных полей характеристики 0 // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 59–67.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 3.

UDC 512.623 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-59-67

## Inaba extension of complete field of characteristic 0

S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova

**Sergei Vladimirovich Vostokov** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*
**Igor Borisovich Zhukov** — doctor of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).
*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*
**Olga Yur'evna Ivanova** — candidate of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (St. Petersburg).
*e-mail: olgaiv80@mail.ru*

**Abstract**

This article is devoted to $p$-extensions of complete discrete valuation fields of mixed characteristic where $p$ is the characteristic of the residue field. It is known that any totally ramified Galois extension with a non-maximal ramification jump can be determined by an Artin-Schreier equation, and the upper bound for the ramification jump corresponds to the lower bound of the valuation in the right-hand side of the equation. The problem of construction of extensions with arbitrary Galois groups is not solved.

Inaba considered $p$-extensions of fields of characteristic $p$ corresponding to a matrix equation $X^{(p)} = AX$ herein referred to as Inaba equation. Here $X^{(p)}$ is the result of raising each element of a square matrix $X$ to power $p$, and $A$ is a unipotent matrix over a given field. Such an equation determines a sequence of Artin-Schreier extensions. It was proved that any Inaba equation determines a Galois extension, and vice versa any finite Galois $p$-extension can be determined by an equation of this sort.

In this article for mixed characteristic fields we prove that an extension given by an Inaba extension is a Galois extension provided that the valuations of the elements of the matrix $A$ satisfy certain lower bounds, i. e., the ramification jumps of intermediate extensions of degree $p$ are sufficiently small.

This construction can be used in studying the field embedding problem in Galois theory. It is proved that any non-cyclic Galois extension of degree $p^2$ with sufficiently small ramification jumps can be embedded into an extension with the Galois group isomorphic to the group of unipotent $3 \times 3$ matrices over $\mathbb{F}_p$.

The final part of the article contains a number of open questions that can be possibly approached by means of this construction.

*Keywords:* discrete valuation field, ramification jump, Artin-Schreier equation

*Bibliography:* 15 titles.

**For citation:**
S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova, 2020, "Inaba extensions of complete fields of characteristic 0", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 59–67.

## 1. Введение

В статье Инабы [4] было показано, что матричное уравнение вида $X^{(p)} = AX$, где $X^{(p)}$ обозначает матрицу, полученную из $X$ возведением каждого элемента в степень $p$, а $A$ — унипотентная квадратная матрица над полем $K$ характеристики $p > 0$, задаёт $p$-расширение Галуа поля $K$, и что произвольное конечное $p$-расширение Галуа может быть задано уравнением такого вида.

В настоящей работе мы проверяем, что уравнение $X^{(p)} = AX$ также задаёт $p$-расширение Галуа, если $K$ — полное дискретно нормированного поля характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики $p > 0$, а нормирования элементов $A$ удовлетворяют определённым оценкам снизу. Показано, как этот результат можно применить к решению задач погружения для расширений с малыми скачками ветвления.

В заключительном параграфе сформулирован ряд открытых вопросов, решать которые можно с использованием данной конструкции.

## 2. Обозначения и предварительные сведения

В данной статье через $K$ обозначено полное дискретно нормированное поля характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики $p > 0$, через $\Omega$ алгебраическое замыкание $K$, через $v$ — нормирование на $\Omega$ (продолжение дискретного нормирования на $K$), нормализованное условием $v(p) = 1$, через $e_K$ — абсолютный индекс ветвления поля $K$, т. е. $e_K = (v(K^*) : \mathbb{Z})$. Для строки $D = (D_1, \ldots, D_l)$ из элементов $\Omega$ считаем $v(D) = \min(v(D_1), \ldots, v(D_l))$.

Положим $\mathfrak{m} = \{x \in \Omega | v(x) > 0\}$.

Под унипотентной матрицей мы будем (как и в [4]) понимать верхнетреугольную квадратную матрицу, у которой все элементы на главной диагонали равны 1. Если $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ — такая матрица, то мы будем полагать $A[k,l] = a_{l,k+l}$ и $A[k] = (A[k,1], \ldots, A[k,n-k])$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $1 \leqslant l \leqslant n-k$; при этом $A[k]$ будем называть $k$-й диагональю матрицы $A$. Через $A^{(p)}$ будем обозначать матрицу $(a_{ij}^p) \in M_n(K)$.

Через $\tilde{U}_n$ будет обозначаться множество унипотентных матриц из $M_n(\mathbb{Z}_p)$, все элементы которых — элементы Тайхмюллера, т. е. принадлежат $\mathcal{R} = \mu_{p-1} \cup \{0\}$; через $U_n$ — группа унипотентных матриц из $M_n(\mathbb{F}_p)$.

Лемма 1. *1. Пусть $a \in K$, $v(a) > -\frac{p}{p-1}$, $x \in \Omega$, $x^p - x = a$. Тогда $K(x)/K$ — расширение Галуа. Если $v(a) < 0$ и $p \nmid e_K v(a)$, то $K(x)/K$ вполне разветвлено и скачок ветвления $s(K(x)/K) = -e_K v(a)$.*

*2. Если $a' \in K$, $v(a' - a) > 0$, то у многочлена $X^p - X - a'$ есть корень в $K(x)$.*

Доказательство. Первое утверждение было доказано в [6] (см. изложение в [2, гл. III]); более простое доказательство с использованием формальных групп Любина-Тэйта получено в [10] (см. также [12]). Второе утверждение легко вытекает из первого с использованием леммы Гензеля. □

## 3. Основной результат

Пусть $n$ — натуральное число; $\alpha$ — рациональное число, меньшее $1/(n-1)$.

Пусть $A \in M_n(K)$ — унипотентная матрица такая, что $v(A[i,j]) \geqslant -i\alpha$ при всех $j$. Обозначим через $X$ любую унипотентную матрицу из $M_n(\Omega)$ такую, что

$$X^{(p)} = AX. \tag{1}$$

Это матричное уравнение эквивалентно набору уравнений

$$X[i,j]^p - X[i,j] = A[1,j]X[i-1,j+1] + \dots + A[i-1,j]X[1,i+j-1] + A[i,j], \tag{2}$$

откуда индукцией по $i$ мы получаем существование всех $X[i,j] \in \Omega$.

Положим $K_l = K(X[1], \dots, X[l])$, $l = 0, \dots, n$.

Теорема 1. *Пусть $X$ — какое-либо решение матричного уравнения* (1).

*1. Имеем $v(X[i]) \geqslant -\frac{i\alpha}{p}$ при всех $i$.*

*2. Для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ найдётся единственная матрица $\Lambda_\sigma \in \tilde{U}_n$ такая, что*

$$X^\sigma = X\Lambda_\sigma + \Delta_\sigma, \quad \Delta_\sigma \in M_n(\mathfrak{m}).$$

*3. При этом $v(\Delta_\sigma[i]) > 1 - i\alpha$ при всех $i$.*

*4. $K_i/K$ — расширение Галуа при всех $i$.*

Доказательство. Основная идея состоит в том, что мы будем строить матрицу $\Lambda_\sigma$ последовательно от 1-й до $(n-1)$-й диагонали, проверяя при этом выполнение всех условий применительно к $X[i]$, $\Lambda_\sigma[i]$ и $\Delta_\sigma[i]$ для $i$ от 1 до $n-1$.

Будем обозначать через $\Lambda_\sigma^{[i]}$ матрицу из $\tilde{U}_n$ такую, что

$$\Lambda_\sigma^{[i]}[j] = \begin{cases} \Lambda_\sigma[j], & j \leqslant i, \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

Эта матрица определена, как только построены элементы $\Lambda_\sigma$ на диагоналях с 1-й по $i$-ю. Нетрудно видеть, что утверждение 2 теоремы сводится к выполнению следующего условия при всех $i$.

2'. Для любого $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ найдётся единственная строка $\Lambda_\sigma[i]$ из элементов $\mathcal{R}$ такая, что

$$X^\sigma[i] = X\Lambda_\sigma^{[i]}[i] + \Delta_\sigma[i],$$

где $v(\Delta_\sigma[i,j]) > 0$ при всех $j = 1, \dots, n-i$.

Мы докажем индукцией по $i$, что выполняются утверждения 1, 2', 3 и 4.

Из (2) имеем

$$\begin{aligned} v(X[i,j] &\geqslant \frac{1}{p}\min(v(A[1,j]X[i-1,j+1]), \dots, \\ &\qquad v(A[i-1,j]X[1,i+j-1]), v(A[i,j])) \\ &\geqslant -\frac{1}{p}\max(\alpha + \frac{i-1}{p}\alpha, 2\alpha + \frac{i-1}{p}\alpha, \dots, (i-1)\alpha + \frac{1}{p}\alpha, i\alpha) \\ &= -\frac{i}{p}\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее, зафиксируем $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ и положим

$$Y = X^\sigma - X \cdot \Lambda_\sigma^{[i-1]}.$$

Поскольку $(X^\sigma)^{(p)} = AX^\sigma$, имеем

$$\begin{aligned} (Y^{(p)} - Y)[i] &= ((X^\sigma)^{(p)} - X^\sigma)[i] - ((X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)} - X\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] \\ &\quad + (Y^{(p)} - (X^\sigma)^{(p)} + (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i] \\ &= D_1 + D_2 + D_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D_1 &= ((A - E_n)X^\sigma)[i] - ((X^{(p)} - X)\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i],\\
D_2 &= (X^{(p)}\Lambda_\sigma^{[i-1]} - (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i],\\
D_3 &= (Y^{(p)} - (X^\sigma)^{(p)} + (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i];
\end{aligned}$$

здесь $E_n$ — единичная матрица.

Оценим снизу нормирования всех элементов строк $D_1$, $D_2$ и $D_3$; в частности, покажем, что эти нормирования положительны.

Поскольку $(C\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] = (C\Lambda_\sigma)[i]$ для любой строго верхнетреугольной матрицы $C$, в частности, для $C = A - E_n$ и для $C = X^{(p)} - X$, получаем

$$D_1 = ((A - E_n)(X\Lambda_\sigma^{[i-1]} + \Delta_\sigma))[i] - ((X^{(p)} - X)\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] = ((A - E_n)\Delta_\sigma)[i].$$

(Отметим, что $\Delta_\sigma[1], \ldots, \Delta_\sigma[i-1]$ уже определены.)

Отсюда

$$\begin{aligned}
v(D_1) &\geqslant \min(v(A[1]) + v(\Delta_\sigma[i-1]), \ldots, v(A[i-1]) + v(\Delta_\sigma[1]))\\
&> \min(-\alpha + 1 - (i-1)\alpha, \ldots, -i\alpha + 1 - \alpha) = 1 - i\alpha \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Для оценки $v(D_2)$ и $v(D_3)$ воспользуемся тем, что

$$v((a+b)^p - a^p - b^p) \geqslant 1 + p\min(v(a), v(b)).$$

Это даёт

$$\min(v(D_2), v(D_3)) \geqslant 1 + p\min(v(X[1]), \ldots, v(X[i])) \geqslant 1 - i\alpha.$$

Таким образом, $v((Y^{(p)} - Y)[i]) \geqslant 1 - i\alpha \geqslant 0$. Отсюда получаем, что $v(Y[i]) \geqslant 0$, и $v(Y[i,j]^p - Y[i,j]) > 0$ $(j = 1, \ldots, n-i)$ что означает $Y[i,j] \equiv \lambda_j \mod \mathfrak{m}$ для некоторого $\lambda_j \in \mathcal{R}$.

Пусть $\delta_j = Y[i,j] - \lambda_j$ и $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{n-i})$. Тогда имеем

$$(\lambda_j + \delta_j)^p - (\lambda_j + \delta_j) = (Y^{(p)} - Y)[i,j],$$

откуда $v(\delta) \geqslant 1 - i\alpha$.

Теперь положим $\Lambda_\sigma[i] = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-i})$. Получаем

$$\begin{aligned}
(X^\sigma - X\Lambda_\sigma)[i] &= (X^\sigma - X\Lambda_\sigma^{[i]})[i]\\
&= (X^\sigma - X\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] + (X(\Lambda_\sigma^{[i-1]} - \Lambda_\sigma^{[i]}))[i]\\
&= Y[i] - \Lambda_\sigma[i] = \delta.
\end{aligned}$$

Это доказывает выполнение условий 2’ и 3 для данного $i$. Осталось проверить условие 4.

Для этого заметим, что $K_i = K_{i-1}(X[i])$, при этом элементы $X[i]$ служат корнями уравнений Артина-Шрайера (2) над $K_{i-1}$, и нормирование правой части каждого уравнения не может быть меньше $-\frac{i}{p} > -1$ (ср. (3)). Такие уравнения Артина-Шрайера задают расширения Галуа (см. лемму 1), и тем самым $K_i$ нормально над $K_{i-1}$. Чтобы доказать, что $K_i$ нормально над $K$ достаточно проверить, что при каждом $j$ и каждом $\sigma \in \mathrm{Gal}(K)$ выполнено $X[i,j]^\sigma \in K_i$.

Из (1) и условия 2’ имеем

$$((X^\sigma)^{(p)} - X^\sigma)[i] = ((A - E_n)X^\sigma)[i] = ((A - E_n)X\Lambda_\sigma + (A - E_n)\Delta_\sigma)[i].$$

При этом из (1) также имеем

$$((X\Lambda_\sigma)^{(p)} - X\Lambda_\sigma)[i] = ((A - E_n)X\Lambda_\sigma)[i],$$

то есть при каждом $j$ уравнение Артина-Шрайера с правой частью, равной $((A-E_n)X\Lambda_\sigma)[i,j]$, имеет корень в $K_i$. С другой стороны, из $v(A[j]) \geqslant -j\alpha$ и $v(\Delta_\sigma)[j] > 1 - j\alpha$ $(j = 1, \ldots, i-1)$ следует

$$v(((A - E_n)\Delta_\sigma)[i]) > 1 - i\alpha > 0.$$

Тогда по лемме 1 уравнение с правой частью $((A - E_n)X\Lambda_\sigma + (A - E_n)\Delta_\sigma)[i,j]$ также имеет корень (а тем самым и $p$ различных корней) в $K_i$, откуда $X[i,j]^\sigma \in K_i$. $\square$

Данная конструкция позволяет доказывать разрешимость определённых задач погружения для $p$-расширений полных дискретно нормированных полей, имеющих достаточно малые скачки ветвления. Погружение циклических $p$-расширений в циклические изучалось в [7]; явное построение циклических расширений степени $p^2$ с малыми скачками ветвления было получено в [12] (см. также [9], [8]) и в [14]). Рассмотрим простейший случай погружения абелева расширения в неабелево, а именно в расширение степени $p^3$ с группой $U_3$.

Следствие 1. *Пусть $L/K$ — вполне разветвлённое расширение с группой Галуа, изоморфной $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, и его скачки ветвления в верхней нумерации не превосходят $e/2$, где $e = e_K > 3$. Тогда $L/K$ можно погрузить в расширение с группой Галуа, изоморфной $U_3$.*

Доказательство. Расширение $L/K$ представляет собой композит двух циклических расширений, скачки ветвления которых меньше $e/2$. Ввиду леммы 1 имеем $L = K(x_1, x_2)$, где $x_i^p - x_i = a_i \in K$, $v(a_i) > -1/2$ $(i = 1, 2)$. Выберем $b \in K$ такое, что $v(b) > -1$, положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и построим расширения $K_1/K$ и $K_2/K$ как в теореме. Тогда $K_1 = L$, $K_2 = L(y_b)$, где

$$y_b^p - y_b = a_1x_2 + b.$$

Заметим, что сопоставление $\sigma \mapsto \Lambda_\sigma \in \tilde{U}_3$ с последующей редукцией $\mod \mathfrak{m}$ задаёт вложение $\mathrm{Gal}(K_2/K)$ в $U_3$. Это вложение не будет изоморфизмом только если $|\mathrm{Gal}(K_2/K)| < p^3$, т. е. если $y_b \in L$. Таким образом, если утверждение следствия не выполняется, то должно быть выполнено $y_b \in L$ при всех $b$.

В духе [12], обозначим через $\mathfrak{m}_L$ (соответственно $\mathfrak{m}_K$) идеал нормирования поля $L' = L(\zeta_p)$ (соответственно $K' = K(\zeta_p)$) со сложением $+_0$, определяемым формальной группой Любина-Тэйта (см. [1, 15]) $G_0$ с $[p](X) = pX + X^p$, через $w$ — элемент $K'$ с $w^{p-1} = -p$. Тогда из $wy_b \in L'$ следует $w^p(a_1x_2 + b) \in [p]\mathfrak{m}_L$. Поскольку $\min(v(w^p(a_1x_2 + b)), v(w^pb)) > v(w^p) - 1 = \frac{1}{p-1}$, а

$$G_0(X, Y) = X + Y + \text{члены степени } \geqslant p,$$

то отсюда следует и $w^pa_1x_2 +_0 w^pb \in [p]\mathfrak{m}_L$. Это выполняется, в частности, для $b = 0$, и вычитанием (в формальном модуле $\mathfrak{m}_L$) получаем $w^pb \in [p]\mathfrak{m}_L$ для всех $b$. По теории Куммера имеем $w^pb \in \mathfrak{n}$, где подмодуль $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}_K$ порождён $w^pa_1$, $w^pa_2$ и $[p]\mathfrak{m}_K$. Однако $w^pb \in \mathfrak{n}$ не может выполняться, если выбрать $b$ с $v(b) < \min(v(a_1), v(a_2))$ и $p \nmid ev(b)$. Последнее легко сделать, так как в $[\frac{e}{2}, e)$ найдётся целое число, не кратное $p$. $\square$

## 4. Заключение

Возможность задавать различные $p$-расширения Галуа поля $K$ при помощи уравнения Инабы (1) делает актуальными новые вопросы; возможно, читатели этого текста присоединятся к поиску ответа на них.

1. Мы знаем, что любое расширение Галуа $L/K$ степени $p$ при условии $s(L/K) < \frac{pe_K}{p-1}$ может быть задано уравнением Артина-Шрайера (см. [2, Ch. III]). Можно ли утверждать, что любое конечное $p$-расширение Галуа с достаточно малыми скачками ветвлениями может быть задано при помощи уравнения Инабы? Более конкретно: верно ли, что для любой конечной $p$-группы $G$ найдётся $\varepsilon = \varepsilon_G > 0$ такое, что для любого $K$ любое $L/K$ с $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G$ и глубиной ветвления $< \varepsilon$ (или максимальным скачком $< \varepsilon e_K$) задаётся уравнением Инабы?

2. Можно ли ослабить условия $\alpha < 1/(n-1)$ и (или) $v(A[i,j]) \geqslant -i\alpha$? Можно ли модифицировать уравнение Инабы при пограничных значениях $\alpha$ так, чтобы оно задавало более широкий класс расширений Галуа (например, позволяло бы строить расширения Галуа $K_n/K$, у которых максимальные скачки ветвления «цоколя» $K_1/K$ близки к $e_K/(n-1)$)?

3. Каков эффективный способ задавать *циклические* $p$-расширения с малой глубиной ветвления при помощи уравнения Инабы? В частности, какие матрицы $A$ могут быть сопоставлены векторам Витта из [12] (или модифицированным векторам Витта из [14]), задающим циклические расширения степени $p^2$?

4. Можем ли мы задать более широкий класс расширений Галуа поля $K$ (не только $p$-расширения), используя уравнения (1) с не обязательно унипотентной матрицей $A$ (как это сделано в характеристике $p$ в работе [5])?

5. В работе [12] было показано, что любое вполне разветвлённое циклическое расширение $L/K$ со скачком ветвления, меньшим $e_K/(p-1)$, может быть вложено в циклическое расширение степени $p^2$. Может ли этот результат быть обобщён на произвольные конечные $p$-группы? А именно, рассмотрим задачу погружения $(G, H, L/K)$, где $G$ — конечная $p$-группа, $H$ — нормальная подгруппа, $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G/H$. Верно ли, что для некоторого $\theta > 0$ (зависящего от $G$ и $H$) эта задача разрешима для любых $K$ и $L/K$ с глубиной ветвления $d(L/K) < \theta$? Каково максимальное $\theta$ при заданных $G$ и $H$?

6. Для циклического расширения $L/K$ степени $p^2$ с промежуточным полем $M$ глубины ветвления $d_1 = d(M/K)$ и $d_2 = d(L/M)$ связаны неравенством Хиодо

$$d_2 \geqslant \min((p-1+p^{-1})d_1, 1-p^{-1}+p^{-1}d_1),$$

см. [3, Lemma (4-1)] или (без использования теории полей классов) [13, §1]. Можно ли обобщить этот результат на другие задачи погружения $(G, H, L/K)$ с $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

7. Положительный ответ на предыдущий вопрос позволил бы предположить, что на «противоположном полюсе», при скачках ветвления близких к максимально возможным, задача погружения достаточного общего вида не имеет решения. Иначе говоря, можно ли утверждать, что для (некоторых) заданных $G$ и $H$ найдётся $\Theta$ такое, что *никакая* задача погружения вида $(G, H, L/K)$ при $d(L/K) > \Theta$ не имеет решения (хотя расширения с $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G/H$ и $d(L/K) > \Theta$ существуют). Например, можно ли утверждать, что все «почти максимально разветвлённые» расширения (см. [11]) абелевы?

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cassels, J. W. S. Frohlich, A. Algebraic Number Theory / J. W. S. Cassels, A. Frohlich // Academiv Press, London and New-York, 1967.

2. Fesenko I. B., Vostokov, S.V. Local fields and their extensions. A constructive approach / I. B. Fesenko and S. V. Vostokov // Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.

3. Hyodo, O. Wild ramification in the imperfect residue field case / O. Hyodo // Adv. Stud. Pure Math. 1987 Vol. 12, P. 287-314.

4. Inaba, E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p / E. Inaba // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1961 Vol. 12, P. 26-36.

5. Inaba, E. On generalized Artin-Schreier equations / E. Inaba // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1962 Vol. 13, № 2, P. 1-13.

6. MacKenzie, R. E., Whaples, G. Artin–Schreier equations in characteristic zero / R. E. MacKenzie, G. Whaples // Amer. J. Math. 1956 Vol. 78, P. 473-485.

7. Miki, H. On $Z_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields // H. Miki // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A 1974 Vol. 21, P. 377-393.

8. Xiao, L., Zhukov, I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions / L. Xiao, I. Zhukov // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 5. С. 695-740.

9. Zhukov, I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields / I. Zhukov, // in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs, 2000 Vol. 3, P. 117–122.

10. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Фесенко И. Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции / С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, № 4. С. 91-118.

11. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Пак, Г. К. Расширения с почти максимальной глубиной ветвления / С. В. Востоков, И. Б. Жуков, Г. К. Пак // Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) 1999 Т. 265, С. 77-109.

12. Востоков, С. В., Жуков И. Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для p-адических полей / С. В. Востоков, И. Б. Жуков // Труды С.-Петерб. мат. общ. 1995 Т. 3, С. 194-214.

13. Жуков, И. Б. Структурная теорема для полных полей / И. Б. Жуков // Тр. С.-Петербург. мат. общ-ва. 1995. Т. 3. С. 194-214.

14. Жуков, И. Б., Лысенко, Е. Ф. Построение циклического расширения степени $p^2$ полного поля / И. Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко // Зап. научн. сем. ПОМИ 2017 Т. 455, С. 52-66.

15. Мадунц, А. И. Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля / А. И. Мадунц // Зап. научн. сем. ПОМИ 2001 Т. 281, С. 221-226;

## REFERENCES

1. Cassels, J. W. S. Frohlich, A., 1967, “*Algebraic Number Theory*”, Academic Press, London and New-York.

2. Fesenko, I. B., Vostokov, S. V., Zhukov I. B., 1990, “On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions”, *Algebra i Analiz* vol. 2, № 4. pp. 91-118.

3. Fesenko I. B., Vostokov, S. V., 2002, "*Local fields and their extensions. A constructive approach*", Second edition, AMS, Providence, RI.

4. Hyodo, O., 1987, Wild ramification in the imperfect residue field case", *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 12, pp. 287-314.

5. Inaba, E., 1961, "On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic $p$", *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 12, pp. 26-36.

6. Inaba, E., 1962, "On generalized Artin-Schreier equations", *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 13, № 2, pp. 1-13.

7. Zhukov, I. B., Lysenko, E.F., 2018, "Construction of cyclic extensions of degree $p^2$ for a complete field", *J. Math. Sci.*, vol. 234(2), pp. 148–157

8. MacKenzie, R. E., Whaples, G., 1956, "Artin–Schreier equations in characteristic zero", *Amer. J. Math.*, vol. 78, pp. 473-485.

9. Madunts, A. I., 2004, "Lubin–Tate Formal Groups over the Ring of Integers of a Multidimensional Local Field", *J. Math. Sci.*, vol. 120(4) pp. 1609–1612

10. Miki, H., 1974, "On $Z_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A*, vol. 21, pp. 377-393.

11. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Pak, G.K., 1999, "Extensions with almost maximal depth of ramification", *J. Math. Sci.*, vol. 112(3), pp. 4285-4302

12. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., 1995, "Some approaches to the construction of abelian extensions for $\mathfrak{p}$-adic fields", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, Vol. III, 157–174, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

13. Xiao, L., Zhukov, I., 2014, "Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions", *Algebra i Analiz*, vol. 26, № 5. pp. 695-740.

14. Zhukov, I. B., 1995, "Structure theorems for complete fields", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, Vol. III, 175–192, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

15. Zhukov, I., 2000, "Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields", in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) *Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs*, vol. 3, pp. 117-122.


Получено 25.06.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.