ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 110, № 3
март, 1997

И. З. Голубчик*, В. В. Соколов*

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ МЕТОДА ФАКТОРИЗАЦИИ

Классический метод факторизации сводит систему обыкновенных дифференциальных уравнений $U_t = [U_+, U]$ к решению алгебраических уравнений. Здесь $U(t)$ принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{G}$, являющейся прямой суммой своих подалгебр $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$, где "+" означает проекцию на $\mathfrak{G}_+$. Мы обобщаем этот метод на случай $\mathfrak{G}_+ \cap \mathfrak{G}_- \neq \{0\}$. Соответствующие квадратичные системы сводятся к линейным системам с переменными коэффициентами. Показано, что обобщенная версия метода факторизации применима также к системам уравнений в частных производных типа уравнения Лиувилля.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая схема метода факторизации [1–3] позволяет проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего специального вида:

$$U_t = [U_+, U], \qquad U(0) = U_0. \tag{1}$$

Здесь $U(t)$ – функция со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{G}$, имеющей разложение в прямую сумму векторных подпространств $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$, каждое из которых является подалгеброй в $\mathfrak{G}$. Через U_+ обозначена проекция U на $\mathfrak{G}_+$. Будем считать для простоты, что $\mathfrak{G}$ вложено в алгебру матриц.

Решение задачи (1) дается формулой

$$U(t) = A(t)U_0A^{-1}(t). \tag{2}$$

В формуле (2) матрица $A(t)$ определяется как решение задачи факторизации

$$A^{-1}B = \exp(-U_0t), \qquad A \in G_+, \qquad B \in G_-, \tag{3}$$

где G_+ и G_- – группы Ли алгебр $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$. Если $\mathfrak{G}_-$ – идеал, задача факторизации решается явно: $A = \exp((U_0)_+t)$, $B = A\exp(-U_0t)$. В случае, если G_+ и G_- – алгебраические группы, условия $A \in G_+$ и $A\exp(-U_0t) \in G_-$ представляют собой систему алгебраических уравнений, из которой (при t близких к нулю) матрица A находится однозначно.

*Математический институт Уфимского научного центра РАН. E-mail: sokolov@nkc.bashkiria.su

Из формулы (2) видно, что если начальные данные U_0 принадлежат векторному пространству M, которое является $\mathfrak{G}_+$-модулем, то $U(t) \in M$ для любого t. Возможность таких редукций значительно расширяет рамки применимости метода факторизации (см., например, [4]).

Более общая задача факторизации

$$A^{-1}B = Z(t), \qquad Z(0) = E, \qquad A \in G_+, \qquad B \in G_-, \tag{4}$$

тесно связана с уравнениями вида

$$U_t = [U_+, U] + F(U), \qquad U(0) = U_0, \tag{5}$$

где $F\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ – отображение, инвариантное относительно группы G_+ (простейшее такое отображение – это $F(U) = \lambda U$, $\lambda = \text{const}$). А именно, пусть Z удовлетворяет линейному уравнению

$$Z_t = q(t)Z, \qquad Z(0) = E.$$

Тогда формула

$$U(t) = Aq(t)A^{-1}$$

решает уравнение (5) при

$$q_t = F(q), \qquad q(0) = U_0. \tag{6}$$

Таким образом, если мы умеем решать уравнение (6), метод факторизации позволяет решить и уравнение (5). Возможность описанного выше перехода от уравнения (6) к уравнению (5), по-видимому, является новой.

Метод факторизации может быть также применен к следующей системе уравнений в частных производных:

$$U_t = [U_+, U] + (U_+)_x, \qquad U(x,0) = U_0(x). \tag{7}$$

Если $\mathfrak{G}$ – это $sl(2)$, а $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$ – подалгебры верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали и нижнетреугольных матриц, то (7) эквивалентно уравнению Лиувилля $v_{xy} = \exp(v)$.

Уравнение (7) следующим образом может быть сведено к задаче факторизации. Нетрудно проверить, что если $A(x,t) \in G_+$ – решение уравнения

$$A_t = \left(AU_0(x)A^{-1}\right)_+ A + A_x, \qquad A(x,0) = E, \tag{8}$$

то

$$U(x,t) = A(x,t)U_0(x)A^{-1}(x,t) + A_x(x,t)A^{-1}(x,t) \tag{9}$$

удовлетворяет (7). В отличие от (7) уравнение (8) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению сдвигом $\alpha(x,t) = A(x-t,t)$. Полученное в результате уравнение

$$\alpha_t = \left(\alpha U_0(x-t)\alpha^{-1}\right)_+ \alpha, \qquad \alpha(x,0) = E, \tag{10}$$

решается с помощью задачи факторизации

$$\alpha^{-1}\beta = Z(x,t), \qquad \alpha \in G_+, \qquad \beta \in G_-, \tag{11}$$

где Z – решение линейной задачи

$$Z_t(x,t) + U_0(x-t)Z(x,t) = 0, \qquad Z(x,0) = E, \tag{12}$$

в которой x играет роль параметра. Если U_0 не зависит от x, $Z(x,t) = \exp(-U_0 t)$ и (11) совпадает с (3).

К нашему удивлению мы не нашли упомянутого выше способа интегрирования уравнения (4) в литературе. Возможно, дело в том, что в классическом методе обратной задачи рассеяния (см. [3]) функцию Z в правой части соотношения (11) обычно выбирают по-другому.

В настоящей работе мы рассматриваем обобщение метода факторизации на случай, когда

$$\mathfrak{G} = V_1 \oplus V_2, \tag{13}$$

где V_1 и V_2 – некоторые векторные подпространства, принадлежащие соответственно подалгебрам $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$. Обозначим $\mathfrak{G}_+ \cap \mathfrak{G}_-$ через $\mathfrak{G}_0$. Оказывается, что если

$$[\mathfrak{G}_0, V_i] \subset V_i, \quad i = 1,2, \tag{14}$$

то интегрирование уравнения (1), в котором "+" означает проецирование на V_1 параллельно V_2, может быть сведено к решению системы линейных обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами. В этом смысле уравнения, к которым применим обобщенный метод факторизации, напоминают уравнение Риккати. Аналогичное обобщение метода факторизации предлагается и для уравнений (5). Что касается уравнения (7), то мы умеем сводить его к линейным задачам только в случае, если V_1 является подалгеброй Ли и $[\mathfrak{G}_0, V_2] \subset V_2$.

В качестве основного примера рассматривается уравнение

$$y_{tt} = [y_t, y] + c_1 y_t + c_2 y, \tag{15}$$

где $y(t)$ – неизвестная функция со значениями в произвольной алгебре Ли $\mathfrak{A}$, c_i – постоянные. В книге [5] для уравнения (15) с $c_1 = c_2 = 0$ построен ряд первых интегралов. Однако, по-видимому, их не хватает для интегрируемости этого уравнения в квадратурах. Е. В. Ферапонтов сообщил нам чисто геометрический способ сведения уравнения, соответствующего алгебре Ли $sl(2)$, к линейному уравнению "параболического цилиндра". Насколько известно авторам, вопрос об интегрируемости (15) для других алгебр Ли оставался открытым.

В настоящей работе уравнение (15) сведено к линейной задаче

$$Y_t = Y\big(Pv_1(t) + Qv_2(t)\big), \qquad Y(0) = E, \tag{16}$$

где P и Q – некоторые постоянные элементы $\mathfrak{A}$, определяемые начальными данными для уравнения (15), v_1, v_2 – базис пространства решений линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$v_{tt} = c_1 v_t + c_2 v. \tag{17}$$

В случае, когда константы c_i в уравнении (15) равны нулю, линейное уравнение (16) выглядит особенно просто:

$$Y_t = Y(P + Qt), \qquad Y(0) = E, \tag{18}$$

где $P = U(0),\ Q = U_t(0)$.

Мы надеемся, что рассмотренное в настоящей статье обобщение метода факторизации найдет применение и в задачах, связанных с уравнениями в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.

Мы благодарны Е. В. Ферапонтову и А. Ю. Орлову за полезные обсуждения и С. И. Свинолупову за внимание к работе.

Исследования были выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00382) и INTAS.

1. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Задачи факторизации для пары векторных пространств. Выясним сначала, что можно сказать об уравнении (1), если алгебра Ли $\mathfrak{G}$ разложена в прямую сумму двух произвольных векторных подпространств V_1 и V_2, а знак "+" означает проецирование на V_1 параллельно V_2.

Рассмотрим следующую задачу факторизации:

$$A^{-1}B = Z(t), \qquad A_tA^{-1} \in V_1, \qquad B_tB^{-1} \in V_2, \qquad Z(0) = A(0) = B(0) = E. \tag{1.1}$$

Важнейшим моментом здесь является тот факт, что в (1.1) фигурируют **правые** логарифмические производные от A и B.

Продифференцировав по t соотношение (1.1), получим

$$-A^{-1}A_tA^{-1}B + A^{-1}B_t = Z_t$$

или

$$A_tA^{-1} - B_tB^{-1} = -AZ_tZ^{-1}A^{-1}.$$

Спроецировав последнее соотношение на V_1, получим, что A удовлетворяет уравнению

$$A_t = (Aq(t)A^{-1})_+A, \qquad A(0) = E, \tag{1.2}$$

где $q(t) = -Z_tZ^{-1}$. Из единственности решения уравнения (1.2) следует единственность решения задачи факторизации (1.1).

Положим

$$U(t) = A(t)q(t)A^{-1}(t). \tag{1.3}$$

Используя (1.2), нетрудно проверить, что

$$U_t = [U_+, U] + Aq_tA^{-1}. \tag{1.4}$$

Если $Z(t) = \exp(-U_0t)$ (ср. с (3)), имеем $q(t) = U_0,\ q_t = 0$ и (1.4) совпадает с (1).

В общем случае предположим, что $q(t)$ удовлетворяет уравнению (6). Тогда из инвариантности отображения F относительно G_+ следует, что (1.4) совпадает с (5).

Таким образом, уравнение (5) сводится к задаче факторизации (1.1) с двумя правыми логарифмическими производными. Без дополнительных условий на V_1, V_2 абсолютно непонятно, как ее решать.

Рассмотрим теперь задачу факторизации

$$\alpha^{-1}\beta = Z(t), \qquad \alpha^{-1}\alpha_t \in V_1, \qquad \beta^{-1}\beta_t \in V_2, \qquad Z(0) = \alpha(0) = \beta(0) = E, \tag{1.5}$$

в которой обе фигурирующие логарифмические производные являются **левыми**. Хотя эта задача напрямую не связана ни с нелинейными уравнениями типа (1), (5) на алгебре Ли, ни с нелинейными уравнениями типа (1.2), (8) на группе Ли, она обладает одним несомненным достоинством. А именно, эта задача факторизации может быть сведена к линейному уравнению с переменными коэффициентами.

Определим линейное отображение $L(t)\colon V_1 \to V_1$ формулой

$$L(t)(v) = \big(Z^{-1}(t)vZ(t)\big)_+.$$

Поскольку $L(0)$ – тождественное отображение, $L(t)$ обратимо при малых t. Определим α как решение линейного уравнения

$$\alpha_t = -\alpha L^{-1}(t)\big((Z^{-1}Z_t)_+\big) \tag{1.6}$$

с начальными условиями $\alpha(0) = E$. Положим

$$\beta = \alpha Z(t) \tag{1.7}$$

и покажем, что пара α, β является единственным решением задачи факторизации (1.5). Для этого надо проверить, что $\beta^{-1}\beta_t \in V_2$.

В силу (1.5), (1.7)

$$\beta^{-1}\beta_t = Z^{-1}Z_t - Z^{-1}(t)L^{-1}(t)\big((Z^{-1}Z_t)_+\big)Z(t). \tag{1.8}$$

Спроецируем левую и правую части равенства (1.8) на V_1. Справа согласно определению оператора $L(t)$ получится нуль. Поэтому $(\beta^{-1}\beta_t)_+ = 0$, и условия задачи (1.5) выполнены.

Для того чтобы доказать единственность решения, заметим, что из (1.7) следует

$$\beta^{-1}\beta_t = Z^{-1}Z_t + Z^{-1}(t)\alpha^{-1}\alpha_t Z(t).$$

Проецируя это соотношение на V_1, получаем (1.6).

Задача факторизации, в которой фигурирует одна **правая** и одна **левая** логарифмические производные, тоже представляет определенный интерес. А именно, пусть $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют задаче

$$A^{-1}B = Z(t), \qquad A^{-1}A_t \in V_1, \qquad B_tB^{-1} \in V_2, \qquad A(0) = A_0, \qquad B(0) = E. \tag{1.9}$$

Положим $q(t) = -Z_t Z^{-1}$. Определим линейное отображение $T_A(t)\colon V_2 \to V_2$ формулой

$$T_A(v) = \big(A^{-1}vA\big)_-,$$

где "$-$" означает операцию проецирования на V_2 параллельно V_1. Если $T_{A(0)}$ – обратимое отображение, $T_{A(t)}$ обратимо при малых t. Тогда функция $A(t)$ удовлетворяет следующему обобщению уравнения (1.2):

$$A_t = Aq - T_A^{-1}\big((q)_-\big)A, \qquad A(0) = A_0, \tag{1.10}$$

Действительно, дифференцируя (1.9) по t, получим

$$-A_tA^{-1} + B_tB^{-1} = -AqA^{-1}.$$

Проецируя это равенство на V_1, получим

$$(A_tA^{-1})_+ = (AqA^{-1})_+. \tag{1.11}$$

Из (1.9) и (1.11) следует, что

$$A_tA^{-1} = AqA^{-1} + v, \tag{1.12}$$

где $v \in V_2$. Перепишем соотношение (1.12) в виде

$$A^{-1}A_t = q + A^{-1}vA.$$

Проецируя на V_2, получаем, что $q_- + (A^{-1}vA)_- = 0$ или

$$v = -T_A^{-1}(q_-).$$

Подставляя это выражение для v в (1.12), приходим к (1.10). Единственность решения задачи факторизации вытекает из единственности решения уравнения (1.10).

Ясно, что когда векторные пространства V_1 и V_2 являются подалгебрами Ли, все три рассмотренные выше задачи факторизации совпадают. Формула (1.6) показывает, что классическая задача факторизации в случае, если соответствующие группы Ли не являются алгебраическими (см. введение), может быть сведена к линейному уравнению с переменными коэффициентами.

Если V_2 – подалгебра Ли, задачи (1.9) и (1.5) совпадают и, следовательно, уравнение (1.10) сводится к линейному уравнению (1.6) с переменными коэффициентами.

Ясно, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ и ее подалгебры V_2 можно выбрать (многими способами) дополнительное подпространство V_1 и построить соответствующее линеаризуемое уравнение (1.10) на группе G. Рассмотрим простейший случай $\mathfrak{G} = sl(2)$:

$$V_2 = \left\{\begin{pmatrix} \alpha, & 0 \\ 0, & -\alpha \end{pmatrix}\right\}, \qquad V_1 = \left\{\begin{pmatrix} -c_1\beta - c_2\gamma, & \beta \\ \gamma, & c_1\beta + c_2\gamma \end{pmatrix}\right\},$$

где c_i – фиксированные постоянные. Тогда для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1,$$

система (1.10) принимает вид

$$A_t = A\begin{pmatrix} f_1, & f_2 \\ f_3, & -f_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi, & 0 \\ 0, & -\phi \end{pmatrix}A,$$

здесь $f_i(t)$ – произвольные функции от t и

$$\phi = \frac{f_1 + c_1f_2 + c_2f_3}{ad + bc + 2c_1bd - 2c_2ac}.$$

Как в рассмотренном примере, так и в случае общего уравнения (1.10) первое слагаемое в правой части линейно, а второе рационально зависит от элементов матрицы A.

1.2. Случай пересекающихся подалгебр. Для того чтобы связать между собой рассмотренные выше задачи факторизации, предположим, что $V_1 \subset \mathfrak{G}_+$, $V_2 \subset \mathfrak{G}_-$, где $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$ – некоторые подалгебры Ли в $\mathfrak{G}$. Тогда решения задач (1.1) и (1.5) удовлетворяют также и следующей задаче факторизации:

$$A^{-1}B = Z(t), \qquad A \in G_+, \qquad B \in G_-, \qquad A(0) = B(0) = E, \tag{1.13}$$

где G_+ и G_- – группы Ли алгебр $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$. Поскольку $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_+ \cap \mathfrak{G}_- \neq \{0\}$, решение задачи (1.13) неединственно. Если A_1, B_1 и A_2, B_2 – два решения задачи (1.13), то $A_2 A_1^{-1} = B_2 B_1^{-1} = H$, где H лежит в группе Ли G_0 алгебры $\mathfrak{G}_0$. В частности, решения A, B и α, β задач (1.1) и (1.5) связаны соотношением

$$A = H\alpha, \qquad B = H\beta, \qquad H(0) = E$$

для некоторого $H(t) \in G_0$. Условия задачи (1.1) эквивалентны требованиям

$$H_t H^{-1} + H\alpha_t \alpha^{-1} H^{-1} \in V_1, \tag{1.14}$$

$$H_t H^{-1} + H\beta_t \beta^{-1} H^{-1} \in V_2. \tag{1.15}$$

Для того чтобы эффективно воспользоваться условиями (1.14), (1.15) для нахождения H, мы накладываем условие (14). А именно, будем предполагать, что $[\mathfrak{G}_0, V_i] \subset V_i$, $i = 1, 2$. Ясно, что в частном случае, когда $V_1 = \mathfrak{G}_+$ – подалгебра, из двух условий (14) остается только одно:

$$[\mathfrak{G}_0, V_2] \subset V_2. \tag{1.16}$$

Отметим также, что если $\mathfrak{G}_- = \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_+$ и из (14) следует, что V_1 – подалгебра Ли в $\mathfrak{G}$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{G}_+ = V_1$. При этом (14) эквивалентно условию, что V_2 является V_1-модулем. Таким образом, наша схема включает случай, когда группа G является редуктивным однородным пространством.

Покажем, что при выполнении условий (14) для определения H, удовлетворяющего (1.14), (1.15), достаточно решить линейное уравнение с переменными коэффициентами.

Действительно, в силу (14) условия (1.14) и (1.15) можно переписать в виде

$$h + \alpha_t \alpha^{-1} \in V_1, \tag{1.17}$$

$$h + \beta_t \beta^{-1} \in V_2, \tag{1.18}$$

где $h = H^{-1} H_t \in \mathfrak{G}_0$, отсюда следует

$$h_- = -(\alpha_t \alpha^{-1})_-, \qquad h_+ = -(\beta_t \beta^{-1})_+$$

и

$$h = -(\alpha_t \alpha^{-1})_- - (\beta_t \beta^{-1})_+.$$

Теперь для определения искомой функции H нужно решить линейное уравнение

$$H_t = -H\big((\alpha_t \alpha^{-1})_- + (\beta_t \beta^{-1})_+\big), \qquad H(0) = E. \tag{1.19}$$

Замечание. Для того чтобы найти решение задачи факторизации (1.1), нам не обязательно было начинать с решения α, β задачи (1.5). При выполнении условий (14) в качестве α, β можно взять и любое другое решение задачи (1.13). В примере, который будет рассматриваться в разделе 2, мы так и поступим.

2. ПРИМЕР. УРАВНЕНИЕ БОГОЯВЛЕНСКОГО

Читатель, который интересуется только конечной формулой, описывающей решения уравнения (15), может ограничиться обсуждением ответа, содержащимся в конце этого раздела.

Запишем уравнение (15) в виде (1). Для этого рассмотрим векторное пространство

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A} \oplus gl(2). \tag{2.1}$$

Нетрудно проверить, что $\mathfrak{G}$ превращается в алгебру Ли, если ввести скобку формулой

$$[(a_1, b_1, c_1, m_1), (a_2, b_2, c_2, m_2)] = \big([a_1, a_2], [a_1, b_2] - [a_2, b_1], [a_1, c_2] - \\ - [a_2, c_1], [m_1, m_2]\big) + (0, p, q, 0), \tag{2.2}$$

где p и q определяются следующим образом. Пусть $m_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1 \end{pmatrix}$, $m_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2, & \beta_2 \\ \gamma_2, & \delta_2 \end{pmatrix}$, отсюда имеем

$$p = \alpha_1 b_2 + \beta_1 c_2 - \alpha_2 b_1 - \beta_2 c_1, \qquad q = \gamma_1 b_2 + \delta_1 c_2 - \gamma_2 b_1 - \delta_2 c_1. \tag{2.3}$$

Положим $\mathfrak{G}_+ = V_1 = \{(*, 0, 0, *)\}$, $\mathfrak{G}_- = \{(*, *, *, 0)\}$, $V_2 = \{(a, a, c, 0)\}$, тогда $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_+ \cap \mathfrak{G}_- = \{(*, 0, 0, 0)\}$ и из (2.2) следует, что $[\mathfrak{G}_0, V_2] \subset V_2$. Таким образом, выполнены условия (14), и мы находимся в рамках схемы пункта 1.2. Используя (2.2) и (2.3), нетрудно проверить, что уравнение (1) для $U = (a, b, c, m)$, $m = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ эквивалентно системе

$$a_t = [a, b], \qquad b_t = [a, b] + \alpha b + \beta c, \qquad c_t = [a - b, c] + \gamma b + \delta c, \qquad m_t = 0. \tag{2.4}$$

Система (2.4) допускает редукцию $a = 0$. Алгебраическое объяснение этого факта состоит в том, что $\{(0, *, *, *)\}$ – идеал в $\mathfrak{G}$. При такой редукции, если $\beta \neq 0$, функция $y = b$ удовлетворяет уравнению (15), где

$$c_1 = \operatorname{tr} m, \qquad c_2 = -\det m. \tag{2.5}$$

Следуя общей схеме пункта 1.2, сначала мы должны найти какое-нибудь решение задачи факторизации (1.13) с $Z(t) = \exp(-U_0 t)$. Заметим, что

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_+ \oplus V_2', \tag{2.6}$$

где $V_2' = \{(0, *, *, 0)\}$. Поскольку V_2' – идеал в $\mathfrak{G}$, задача факторизации, соответствующая разложению (2.6), решается явно (см. введение). Решение имеет вид

$$A_1 = \exp(W_0 t), \qquad B_1 = A_1 \exp(-U_0 t),$$

где $U_0 = (0, b_0, c_0, m)$, $W_0 = (0, 0, 0, m)$. Так как $V_2' \subset \mathfrak{G}_-$, то A_1, B_1 удовлетворяют задаче (1.13).

Согласно общей схеме ищем решение задачи (1.1) в виде $A = HA_1$, $B = HB_1$, где $H \in G_0$. Формула (1.19) в нашем случае означает, что

$$H_t = -H\big((B_1)_t B_1^{-1}\big)_+.$$

При этом $(-B_1)_t B_1^{-1}$ имеет вид $(0,p,q,0)$, а $\big((B_1)_t B_1^{-1}\big)_+ = (p,0,0,0)$.

Пользуясь формулой

$$B_1 = \exp(W_0 t)\exp(-U_0 t),$$

находим

$$\begin{aligned}(0,p,q,0) = -(B_1)_t B_1^{-1} &= -W_0 + \exp(W_0 t)U_0 \exp(-W_0 t) = \\ &= \exp(W_0 t)(0,b_0,c_0,0)\exp(-W_0 t).\end{aligned}$$

С помощью формулы (2.2) находим $p = \alpha_{11}(t)b_0 + \alpha_{12}(t)c_0$, где α_{ij} – элементы матрицы $\exp(mt)$. Итак, имеем

$$H_t = -H\big(\alpha_{11}(t)b_0 + \alpha_{12}(t)c_0, 0, 0, 0\big). \tag{2.7}$$

Напомним, что решение интересующего нас уравнения (15) – это вторая или, что то же самое, первая компонента элемента $B_t B^{-1}$. Имеем $B_t B^{-1} = H_t H^{-1} + H(B_1)_t B_1^{-1} H^{-1}$. Второе слагаемое лежит в идеале V_2', и поэтому его первая компонента равна нулю. Следовательно, в соответствии с (2.7) решение $y = b$ уравнения (15) имеет вид

$$y = Y_t Y^{-1} = -Y\big(\alpha_{11}(t)b_0 + \alpha_{12}(t)c_0\big)Y^{-1},$$

где

$$Y_t = -Y\big(\alpha_{11}(t)b_0 + \alpha_{12}(t)c_0\big), \qquad Y(0) = E.$$

Очевидно, что Y лежит в группе Ли исходной алгебры Ли $\mathfrak{A}$.

Обсудим и обобщим полученный нами удивительно простой ответ. Пусть

$$Y_t = YQ(t), \qquad Y(0) = E,$$

где $Q(t)$ принадлежит некоторой алгебре Ли $\mathfrak{G}$, а $Y(t)$ – соответствующей группе Ли G. Положим $y = Y_t Y^{-1} = YQ(t)Y^{-1}$. Дифференцируя по t это соотношение, получим

$$YQ_t Y^{-1} = y_t, \qquad YQ_{tt}Y^{-1} = y_{tt} - [y, y_t], \qquad \ldots, \qquad YQ_{(i)}Y^{-1} = P_i(y, y_t, \ldots, y_{(i)}),$$

где

$$P_{i+1} = (P_i)_t - [y, P_i].$$

Ясно, что если $Q(t)$ – многочлен степени n, то y удовлетворяет нелинейному уравнению $P_{n+1}(y, y_t, \ldots, y_{(n+1)}) = 0$ порядка $n+1$. В частности, если $n = 1$, то $-y$ удовлетворяет уравнению (15) с $c_1 = c_2 = 0$, а при $n = 2$ имеем

$$y_{ttt} = 2[y, y_{tt}] - [y, [y, y_t]].$$

Рассмотренный выше полиномиальный потенциал Q удовлетворял уравнению $Q_{(n+1)} = 0$. Ясно, что вместо этого уравнения можно рассмотреть более общее уравнение

$$Q_{(n+1)} = F(Q, Q_t, \dots, Q_{(n)}), \tag{2.8}$$

где F – произвольное G-инвариантное отображение из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}$. Тогда функция y будет удовлетворять нелинейному уравнению (ср. с (5))

$$P_{n+1}(y, y_t, \dots, y_{(n+1)}) = F(y, y_t, P_2, \dots, P_{(n)}).$$

Наше общее уравнение (15) соответствует случаю $n = 1$, $Q_{tt} = c_1 Q_t + c_2 Q$.

3. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3.1. Общая схема. В отличие от уравнения (1), которое мы линеаризовали при предположениях (13), (14), для уравнения (7) мы дополнительно предполагаем, что $V_1 = \mathfrak{G}_+$ является подалгеброй Ли.

Определим $A(x,t) \in G_+$ как решение уравнения

$$A_t = U_+ A, \qquad A(x,0) = E, \tag{3.1}$$

где $U(x,t)$ удовлетворяет (7). Нетрудно проверить, что $A(x,t)$ и $U(x,t)$ связаны формулой (9). Подставляя (9) в (3.1) и пользуясь тем, что $V_1 = \mathfrak{G}_+$ – подалгебра, получаем, что $A(x,t)$ удовлетворяет уравнению (8). Последнее уравнение эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению (10) для функции $\alpha(x,t) = A(x-t,t)$.

Покажем, что если α и β удовлетворяют задаче факторизации

$$\alpha^{-1}\beta = Z(x,t), \qquad \alpha_t\alpha^{-1} \in \mathfrak{G}_+, \qquad \beta_t\beta^{-1} \in V_2, \qquad \alpha(x,0) = E, \qquad \beta(x,0) = E, \tag{3.2}$$

где

$$Z_t(x,t) + U_0(x-t)Z(x,t) = 0, \qquad Z(x,0) = E, \tag{3.3}$$

то $\alpha(x,t)$ решает (10). Дифференцируя соотношение $\alpha^{-1}\beta = Z(x,t)$ по t, мы получим

$$-\alpha^{-1}\alpha_t\alpha^{-1}\beta + \alpha^{-1}\beta_t = Z_t. \tag{3.4}$$

Используя (3.2) и (3.3), находим, что $Z_t = -U_0(x-t)\alpha^{-1}\beta$. Теперь, переписывая (3.4) в виде

$$\beta_t\beta^{-1} - \alpha_t\alpha^{-1} + \alpha U_0(x-t)\alpha^{-1} = 0 \tag{3.5}$$

и проецируя последнее соотношение на $\mathfrak{G}_+$, получаем (10).

Очевидно, что (3.5) эквивалентно соотношению

$$\beta^{-1}\beta_t - Z^{-1}\alpha^{-1}\alpha_t Z + Z^{-1}U_0(x-t)Z = 0. \tag{3.6}$$

Проецируя (3.6) на $\mathfrak{G}_+$, мы видим, что для того чтобы найти решение задачи факторизации

$$\alpha^{-1}\beta = Z(x,t), \qquad \alpha^{-1}\alpha_t \in \mathfrak{G}_+, \qquad \beta^{-1}\beta_t \in N, \qquad \alpha(x,0) = E, \qquad \beta(x,0) = E, \tag{3.7}$$

достаточно решить линейное уравнение (ср. с (1.6)) для α

$$\alpha_t = -\alpha L^{-1}\Big(\big(Z^{-1}U_0(x-t)Z\big)_+\Big), \qquad \alpha(0) = E,$$

где линейное отображение $L\colon \mathfrak{G}_+ \to \mathfrak{G}_+$ определяется формулой $L(v) = (Z^{-1}vZ)_+$.

Наконец, пусть α_1, β_1 удовлетворяют (3.7). Так как $(\beta_1)_t\beta_1^{-1} \in \mathfrak{G}_-$, мы можем представить $(\beta_1)_t\beta_1^{-1}$ в виде $\sigma + v$, где $\sigma \in \mathfrak{G}_+ \cap \mathfrak{G}_-$, $v \in V_2$. Определим $H(x,t)$ как решение линейного уравнения $H_t = -H\sigma$, $H(x,0) = E$. Тогда $\alpha = H\alpha_1$, $\beta = H\beta_1$ удовлетворяют (3.2). Действительно, имеем

$$\beta_t\beta^{-1} = H_tH^{-1} + H(\beta_1)_t\beta_1^{-1}H^{-1} = -H\sigma H^{-1} + H(\sigma+v)H^{-1} = HvH^{-1}.$$

Согласно (1.16) $HvH^{-1} \in V_1$.

Таким образом, мы свели задачу факторизации (3.2) к решению нескольких линейных уравнений с переменными коэффициентами, которые, кроме основной переменной t, зависят от x как от параметра.

3.2. Примеры матричных систем типа уравнения Лиувилля. Здесь мы показываем, как системы уравнений

$$u_t = u_x + vu, \qquad v_t = uv \tag{3.8}$$

и

$$u_t = u_x + uv + wu, \qquad v_t = vu + wu, \qquad w_t = uv + uw, \tag{3.9}$$

где u, v, w – матрицы размера $m \times m$, могут быть записаны в виде (7). Отметим, что (3.8) при $m = 1$ эквивалентно уравнению $f_{tx} = \exp(f)f_t$. Явные формулы, линеаризующие уравнения (3.8), (3.9), можно извлечь из общей схемы пункта 3.1.

Пример 1. Рассмотрим в качестве алгебры Ли $\mathfrak{G}$ множество всех блочных матриц вида $\begin{pmatrix} a, & b \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$, где a, b – некоторые матрицы размера $m \times m$. Нетрудно проверить, что

$$\mathfrak{G}_+ = \left\{\begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathfrak{G}_- = \left\{\begin{pmatrix} b, & b \\ 0, & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

– подалгебры Ли в $\mathfrak{G}$, причем $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_+ \oplus \mathfrak{G}_-$. Уравнение (7) на $\mathfrak{G}$, где

$$U = \begin{pmatrix} u-v, & -v \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

совпадает с (3.8).

Пример 2. Пусть

$$\mathfrak{G} = \left\{\begin{pmatrix} a, & b \\ 0, & c \end{pmatrix}\right\}, \qquad V_1 = \left\{\begin{pmatrix} a, & a \\ 0, & -a \end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathfrak{G}_+ = \left\{\begin{pmatrix} a+c, & a \\ 0, & -a+c \end{pmatrix}\right\}, \quad V_2 = \mathfrak{G}_- = \left\{\begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & c \end{pmatrix}\right\},$$

тогда $\mathfrak{G}_0 = \left\{\begin{pmatrix} c, & 0 \\ 0, & c \end{pmatrix}\right\}$ и, как легко проверить, $[\mathfrak{G}_0, V_1] \subset V_1$. Уравнение (7) для

$$U = \begin{pmatrix} u-w, & u \\ 0, & v-u \end{pmatrix}$$

совпадает с (3.9).

Список литературы

[1] *B. Konstant.* Lect. Notes. 1979. Ser. 34. P. 287–316.
[2] *М.А. Семенов-Тян-Шанский.* Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17(4). С. 17–33.
[3] *Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
[4] *I.Z. Golubchik, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov.* A new class of nonassociative algebras and a generalized factorization method: Preprint ESI 53. Wien (Austria), 1993.
[5] *О.И. Богоявленский.* Опрокидывающиеся солитоны. М.: Наука, 1991.

Поступила в редакцию 1.VIII.1996 г.

I. Z. Golubchik, V. V. Sokolov

ON SOME GENERALIZATIONS OF FACTORIZATION METHOD

The classical factorization method reduces the system of differential equations $U_t = [U_+, U]$ to the problem of solving algebraic equations. Here $U(t)$ belongs to a Lie algebra $\mathfrak{G}$ which is the direct sum of subalgebras $\mathfrak{G}_+$ and $\mathfrak{G}_-$, where "+" denotes the projection on $\mathfrak{G}_+$. This method is generalized to the case $\mathfrak{G}_+ \cap \mathfrak{G}_- \neq \{0\}$. The corresponding quadratic systems are reduced to linear systems with varying coefficients. It is shown that the generalized version of the factorization method is also applicable to systems of partial differential equations of the Liouville type equation.