МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

СЕМАНТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

А. Д. Яшин

Традиционные связки интуиционистской логики $\vee$ (или), & (и), $\supset$ (влечет), $\neg$ (не) можно трактовать как фиксированные способы определения истинностного значения в вершинах моделей Крипке [1]:

$$a \models \varphi \,\&\, \psi \rightleftharpoons a \models \varphi \text{ и } a \models \psi,$$
$$a \models \varphi \vee \psi \rightleftharpoons a \models \varphi \text{ или } a \models \psi,$$
$$a \models \varphi \supset \psi \rightleftharpoons \text{для всех } b \geqslant a : b \models \varphi \to b \models \psi,$$
$$a \models \neg\varphi \rightleftharpoons \text{для всех } b \geqslant a \text{ неверно } b \models \varphi.$$

Здесь $\leqslant$ — отношение достижимости между вершинами.

Пропозициональную формулу, построенную из пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$, можно трактовать как сложную связку, выразимую через примитивные связки $\vee$, &, $\supset$, $\neg$. Тем самым каждой пропозициональной формуле сопоставляется способ определения истинностного значения в вершинах моделей.

Наоборот, пусть дан способ определения истинности. При каких условиях можно считать, что он задает интерпретацию логической связки? Этот вопрос связан с проблемой функциональной полноты интуиционистских связок. Известно, что в классической логике набор $\vee$, $\neg$ функционально полон, т. е. любая связка представима посредством этих двух. Нетривиальность этого результата (концептуальная, а не доказательственная) обусловлена тем, что классические связки имеют внешнее определение (по отношению к $\vee$ и $\neg$): классическая связ-

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1985

ка есть функция над двухэлементным множеством истинностных значений.

В различных работах [2—4] рассматриваются некоторые понятия, трактуемые как интерпретации новых интуиционистских связок, и изучаются соответствующие расширения. Подобные примеры дали основание полагать, что набор стандартных интуиционистских связок не является функционально полным. Тем не менее точная постановка вопроса о функциональной полноте или неполноте этого набора возможна только при наличии точного определения интуиционистской логической связки.

Семантический подход к определению интуиционистских связок состоит в следующем. Стандартные связки интерпретируются в некотором достаточно богатом классе структур (например, модели Крипке, топологические модели, реализуемость, финитные задачи). В этом классе структур определимы многие другие понятия, не сводящиеся к интерпретациям стандартных связок. Какие из этих понятий приемлемы в качестве логических связок? Можно ли как-то выделить стандартные связки? Цитируем введение к [5]: «Каждая из этих семантик математически намного сложнее, нежели стандартная классическая семантика. Нет оснований считать, что класс операторов, определимых через $\vee$, &, $\supset$, $\neg$, является дефинициально полным для какой-либо из этих семантик».

В статье [6] интуиционистская логическая связка определяется как формула языка элементарной теории моделей Крипке с одним параметром, удовлетворяющая следующим условиям:

1) монотонность: $A(x) \wedge x \leqslant y \Rightarrow A(y)$;

2) все кванторы релятивизованы: $\exists z \geqslant w$, $\forall z \geqslant w$;

3) атомарные формулы вида $z \geqslant w$ входят в A только как релятивизации кванторов.

Условие 1) отражает интуиционистский принцип сохранности: то, что доказано, будет верным всегда [1].

Условие 2) означает, что истинность высказывания в вершине определяется только ситуацией в данной вершине и в будущем, и также приемлемо с интуиционистской точки зрения [7].

Какого-либо обоснования условия 3) статья [6] не содержит. Это условие позволяет чисто синтаксическими преобразованиями доказать теорему о представимости: для любой связки найдется эквивалентная стандартная пропозициональная формула.

Условие 3) из [6] выглядит весьма искусственным. Неясно, почему логические связки должны удовлетворять ему.

В упомянутой статье содержится следующая идея (не получившая, однако, дальнейшего развития): высказывание не должно различать подобные модели. В предлагаемой статье эта идея уточняется, формулируется внешнее определение интуиционистской связки и доказывается функциональная полнота стандартных связок в классе всех интуиционистских связок.

В определении мы исходим из следующих принципов:

1) монотонность,

2) релятивизованность,

3) принцип подобия: высказывание, построенное посредством логических связок, не должно различать подобные модели.

Как уточнить понятие подобия? В неформальной теории интуиционистских моделей Крипке [8] подобными считаются модели, в корнях которых истинны одни и те же пропозициональные формулы. Такое определение не годится, поскольку понятие логической связки не определено, значит, нет и класса пропозициональных формул. Подобие надо определить внешним образом, независимо от подразумеваемых связок.

Изоморфные модели можно считать подобными. Кроме того, если все рассмотрения ограничить языком первого порядка, то элементарно эквивалентные модели [9] тоже можно считать подобными. Для дальнейшего уточнения мы используем понятие p-морфизма (в другой терминологии — строго изотонного отображения). Понятие p-морфизма является внешним — оно определяется в терминах структуры основных множеств моделей и оценки пропозициональных переменных [10].

Логическими связками мы считаем формулы языка элементарной теории моделей Крипке с одной свободной переменной, удовлетворяющие принципам монотонности, релятивизованности и подобия (точные определения ниже).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Логическими связками являются интерпретации стандартных пропозициональных формул, и только они.*

Для связок, содержащих только одну пропозициональную переменную, эта теорема доказана в [11].

Определяемые термины набираются курсивом, символы $\rightleftharpoons$ и $\dashv$ означают соответственно «по определению» и «конец доказательства».

§ 1. Элементарная теория моделей Крипке и логические связки.

1.1. *Элементарная теория моделей Крипке* K формулируется в односортном языке с равенством со следующими нелогическими символами: двухместный предикат $\leqslant$ для отношения достижимости между вершинами моделей, константа o для корня, одноместные предикаты P_1, P_2, . . . для интерпретации пропозициональных переменных.

Логические связки языка K обозначаем через $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\sim$ (отрицание), $\Leftrightarrow$ (эквивалентность).

Аксиомы теории K:

— частичный порядок с наименьшим элементом o;

— монотонность: $P_i(x) \wedge x \leqslant y \Rightarrow P_i(y)$.

Замечание. В неформальной теории интуиционистских моделей Крипке [8] рассматривается отношение предпорядка на множестве вершин. Возможность рассматривать достижимость как частичный порядок обосновывается так. Пусть дана теория с аксиомами предпорядка для R и монотонности P_i по R. Можно определить равенство $x = y \rightleftarrows xRy \wedge yRx$ и доказать его согласованность с атомарными формулами (при этом существенно используются аксиомы монотонности). Модель, факторизованная по такому равенству, будет частично упорядоченным множеством, т. е. моделью теории K.

1.2. Под термином «модель» подразумевается модель теории K в смысле теории моделей первого порядка [9]. Истинность оцененной элементами $a_1, \ldots, a_n \in M$ формулы $B(x_1, \ldots, x_n)$ обозначаем через $M \models B(x_1, \ldots, x_n)$.

Если M — модель и $a \in M$, то через M^a обозначаем модель, состоящую из множества вершин $\{b \in M \quad b \geqslant a\}$ с наследуемыми из M порядком и оценкой P_i.

Модели называются элементарно эквивалентными ($M_1 \cong M_2$), если в них истинны одни и те же предложения языка K.

Пусть M_1, M_2 — модели. Функция $\alpha: M_1 \to M_2$ называется p-морфизмом, если выполнены следующие условия:

1) сюръективность: $\alpha M_1 = M_2$,

2) монотонность: $a \leqslant b \to \alpha a \leqslant \alpha b$,

3) конусность: $c \geqslant \alpha a \to \exists b\,(b \geqslant a \wedge \alpha b = c)$,

4) согласованность: $M_1 \models P_i(a) \leftrightarrow M_2 \models P_i(\sigma a)$, $i = 1, 2, \ldots$

Модели M_1, M_2 называем подобными, если существует конечная цепочка моделей $M_1 \to N_1 \leftarrow N_2 \ldots N_m \cong M_2$, в которой каждые два соседних члена либо элементарно эквивалентны, либо находятся в отношении p-морфизма в ту или другую сторону.

1.3. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — пропозициональные переменные. Стандартно определяется класс пропозициональных формул (сокращенно ПФ):

— p_i есть ПФ;

— если φ, ψ — ПФ, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \supset \psi)$, $(\neg\varphi)$ — ПФ.

Для каждой ПФ φ определим индуктивно формулу $[\varphi]\,(x)$ языка K с одной свободной переменной:

$$[p_i](x) \rightleftharpoons P_i\,(x),$$
$$[\varphi \,\&\, \psi](x) \rightleftharpoons [\varphi](x) \wedge [\psi](x),$$
$$[\varphi \vee \psi]\,(x) \rightleftharpoons [\varphi]\,(x) \vee [\psi]\,(x),$$
$$[\varphi \cup \psi]\,(x) \rightleftharpoons \forall y \geqslant x\,([\varphi](y) \Rightarrow [\psi](y)),$$
$$[\neg\varphi](x) \rightleftharpoons \forall y \geqslant x \sim [\varphi](y).$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$M \models \varphi \rightleftharpoons M \models [\varphi](o),\quad M \models \sim\varphi \rightleftharpoons M \models \sim[\varphi](o),$$
$$a \models \varphi \rightleftharpoons M \models [\varphi]\,(a),\quad a \models \sim\varphi \rightleftharpoons M \models \sim[\varphi](a),$$
$$a \models \varphi \wedge \sim\psi \rightleftharpoons M \models [\varphi](a) \wedge \sim[\psi](a).$$

При использовании обозначения вида $a \models \varphi$ из контекста будет ясно, в какой модели находится a.

1.4. Предложение B устойчиво при p-морфизмах (сокращенно: p-устойчиво), если для любого p-морфизма α: $M_1 \to M_2$

$$M_1 \models B \leftrightarrow M_2 \models B.$$

Пусть $A\,(x)$ — формула языка K с одной свободной переменной, не содержащая константу o.

A монотонна, если $K \vdash A\,(x) \wedge x \leqslant y \Rightarrow A\,(y)$.

A релятивизована, если $M \models A\,(a) \leftrightarrow M^a \models A\,(a)$.

A p-устойчива, если p-устойчиво предложение $A\,(o)$.

Формулу, удовлетворяющую условиям монотонности, релятивизованности и p-устойчивости, называем *логической связкой*.

ТЕОРЕМА 1. $[\varphi](x)$ — *логическая связка*.

Доказательство: релятивизованность $[\varphi](x)$ усматривается непосредственно из определения. Монотонность легко доказать индукцией по построению φ. Для

проверки p-устойчивости индукцией по построению φ надо доказать следующее.

Пусть α: $M_1 \to M_2$ — p-морфизм. Тогда $a \models \varphi \leftrightarrow \alpha a \models \varphi$.

Для пропозициональных переменных это утверждение содержится в определении p-морфизма. Разберем индуктивный шаг для $\varphi \supset \psi$. Пусть $a \models \sim (\varphi \supset \psi)$. Тогда найдется $b \geqslant a$ такая, что $b \models \varphi \wedge \sim\psi$. По свойству p-морфизма $\alpha b \geqslant \alpha a$ и по индуктивному предположению $\alpha b \models \varphi \wedge \sim\psi$, т. е. $\alpha a \models \sim (\varphi \supset \psi)$.

Обратно, пусть $\alpha a \models \sim(\varphi \supset \psi)$. Тогда найдется $c \geqslant \alpha a$ такая, что $c \models \varphi \wedge \sim \psi$. По свойству p-морфизма найдется $b \in M_1$, $b \geqslant a$, такая, что $\alpha b = c$. По индуктивному предположению $b \models \varphi \wedge \sim\psi$, т. е. $a \models \sim (\varphi \supset \psi)$.

Модели M_1, M_2 эквивалентны ($M_1 \equiv M_2$), если для любой ПФ φ $M_1 \models \varphi \leftrightarrow M_2 \models \varphi$.

Следствие. *Подобные модели эквивалентны.*

Связка $A(x)$ представима пропозициональной формулой φ, если $K \vdash A(o) \Leftrightarrow [\varphi](o)$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Любая связка представима некоторой* ПФ.

Доказательству этой теоремы посвящена оставшаяся часть статьи.

§ 2. Леммы о представимости.

2.1. *Булевой комбинацией* ПФ называется предложение, построенное из предложений вида $[\varphi](o)$ с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$. При записи булевых комбинаций будем опускать скобки и o. Например, вместо $[\varphi](o) \wedge \wedge \sim [\psi](o)$ пишем $\varphi \wedge \sim\psi$.

Предложение различает две модели, если оно истинно в одной из них и ложно в другой.

ЛЕММА 1. *Предложение равносильно булевой комбинации ПФ в том и только том случае, когда оно не различает эквивалентные модели.*

Доказательство. Ясно, что булева комбинация ПФ не различает эквивалентные модели. Докажем обратное. Пусть B не различает эквивалентные модели. Обозначим

$$\mathscr{L} = \{\theta \mid \theta \text{ — булева комбинация ПФ и } K \vdash B \Rightarrow \theta\}.$$

Докажем, что $\mathscr{L} \vdash B$ (в теории K). Пусть это не так. Тогда найдется модель M, в которой $M \models \mathscr{L}$ и $M \models \sim B$. Пусть (Γ, Δ) — полная оценка в корне M, т. е. Γ — множество истинных ПФ, Δ — множество опровергае-

мых ПФ. По условию в любой модели с такой же полной оценкой истинно $\sim B$. Это значит, что $\sim B$ следует из множества предложений

$$\{\varphi \mid \varphi \in \Gamma\} \cup \{\sim \psi \mid \psi \in \Delta\}.$$

По теореме компактности найдется конечное подмножество $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$, $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \Delta$ такое, что

$$K \vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \sim \psi_1 \wedge \ldots \wedge \sim \psi_m \Rightarrow \sim B.$$

Это равносильно $K \vdash B \Rightarrow \sim \varphi_1 \vee \ldots \vee \sim \varphi_n \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$. Обозначим последнюю булеву комбинацию через θ_0. Мы получили $K \vdash B \Rightarrow \theta_0$, т. е. $\theta_0 \in \mathscr{L}$, значит, $M \models \theta_0$. Но это невозможно, т. к. согласно полной оценке $M \models \sim\theta_0$. Противоречие.

Итак, $\mathscr{L} \vdash B$. Значит, для некоторого конечного набора $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathscr{L}$ $K \vdash \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n \Rightarrow B$, т. е. $K \vdash B \Leftrightarrow (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n)$.

2.2. Пусть B — предложение языка K. Релятивизовав в нем все кванторы по $\geqslant o$, получим предложение $B(o)$. Ясно, что B и $B(o)$ эквивалентны в K. Заменим в $B(o)$ константу o на новую переменную x. Ясно, что полученная формула $B(x)$ релятивизована. Обратно, если $B(x)$ — релятивизованная формула без o, то вместо x можно подставить o и получить предложение $B(o)$. Тем самым вместо формул с одной свободной переменной, релятивизованных и не содержащих o, достаточно изучить лишь предложения.

Предложение B *монотонно*, если монотонна формула $B(x)$.

ЛЕММА 2. *Предложение равносильно некоторой* ПФ *в том и только том случае, когда оно монотонно и не различает эквивалентные модели.*

Доказательство. По теореме 1 все ПФ монотонны. Ясно также, что ПФ не различает эквивалентные модели. Докажем обратное. Пусть A монотонно и не различает эквивалентные модели. По лемме 1 найдется булева комбинация ПФ θ такая, что $K \vdash A \Leftrightarrow \theta$. Запишем ее в конъюнктивной нормальной форме $\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$, где каждое θ_i имеет вид

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m \vee \sim\psi_1 \vee \ldots \vee \sim\psi_k \ (m + k > 0).$$

В зависимости от значений m и k θ_i преобразуется в предложение одного из следующих видов: $\varphi \vee \sim \psi$, φ, $\sim \psi$. Например, если $m = 0$, то $(\sim \psi_1 \vee \ldots \vee \sim \psi_k) \Leftrightarrow \sim (\psi_1 \& \ldots$

$\ldots \& \psi_k$). Запишем цепочку эквивалентностей: $A \Leftrightarrow \theta \Leftrightarrow \Leftrightarrow \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n \Leftrightarrow$ (по монотонности) $\Leftrightarrow (\forall x \geqslant o\theta_1(x)) \wedge \ldots \ldots \wedge (\forall x \geqslant o\theta_n(x))$. Теперь замечаем, что

$$\forall x \geqslant o\,([\varphi](x) \vee \sim [\psi](x)) \Leftrightarrow [\psi \supset \varphi](o)$$

(по определению $\supset$),

$$\forall x \geqslant o\,[\varphi](x) \Leftrightarrow [\varphi](o) \quad \text{(по монотонности)},$$

$$\forall x \geqslant o \sim [\psi](x) \Leftrightarrow [\neg\psi](o) \quad \text{(по определению } \neg\text{)}.$$

Тем самым A равносильно конъюнкции (&) найденных ПФ.

Из леммы 2 следует, что для доказательства основной теоремы нужно показать, что p-устойчивое предложение не различает эквивалентные модели. В следующем параграфе будет доказано, что эквивалентные модели подобны. Тогда: A не различает эквивалентные модели $\leftrightarrow A$ не различает подобные модели $\leftrightarrow A$ проносится через p-морфизмы (через элементарную эквивалентность проносятся любые предложения), а последнее условие как раз содержится в определении связки.

§ 3. Эквивалентные модели подобны.

3.1. Пусть Γ, Δ — множества ПФ. Пара $\langle\Gamma, \Delta\rangle$ называется совместной, если существует модель, в которой истинны все ПФ из Γ и опровергаются все ПФ из Δ.

Предложение 1. *Пара* $\langle\Gamma, \Delta\rangle$ *совместна тогда и только тогда, когда для любых конечных подмножеств* $\Gamma_1 \subset \Gamma$ *и* $\Delta_1 \subset \Delta$ *секвенция* $\Gamma_1 \to \Delta_1$ *невыводима в интуиционистской логике.*

Это утверждение представляет собой теорему полноты интуиционистской логики высказываний [1].

Пара $\langle\Gamma, \Delta\rangle$ называется максимальной, если для любой ПФ φ либо $\varphi \in \Gamma$, либо $\varphi \in \Delta$.

Предложение 2. *Для любой совместной пары* $\langle\Gamma, \Delta\rangle$ *найдется максимальная совместная пара* $\langle\Gamma', \Delta'\rangle$ *такая, что* $\Gamma \subset \Gamma'$ *и* $\Delta \subset \Delta'$.

Максимальную совместную пару ПФ называем типом. Типы обозначаем буквами $\sigma, \tau, \ldots$ При этом $\sigma = \langle\sigma^0, \sigma^1\rangle$.

Пример. Пусть $a \in M$. Пара $\langle\{\varphi \mid a \models \varphi\}, \{\varphi \mid a \not\models \varphi\}\rangle$ есть тип. Обозначаем его через $\langle a\rangle$.

Типом модели называем тип ее корня.

3.2. Тип σ локально реализуется в модели M, если для любых $\varphi \in \sigma^0$ и $\psi \in \sigma^1$ найдется $b \in M$ такая, что $b \models \varphi \wedge \sim\psi$.

Тип σ реализуется в M, если найдется $b \in M$ такая, что $\sigma = \langle b\rangle$.

Частичный порядок на типах определяется по включению первых компонент: $\sigma \leqslant \tau \rightleftharpoons \sigma^0 \subseteq \tau^0$.

ЛЕММА 3. *Пусть $a \in M$. Тип σ локально реализуется в M^a тогда и только тогда, когда $\langle a \rangle \leqslant \sigma$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть σ локально реализуется в M^a и $\varphi \in \langle a \rangle^0$, т. е. $a \models \varphi$. Покажем, что $\varphi \in \sigma^0$. Пусть это не так. Тогда $\varphi \in \sigma^1$. По монотонности для любой $b \geqslant a$ $b \models \varphi$. Ясно, что тогда σ не локально реализуем в M^a.

Достаточность. Пусть $\langle a \rangle \leqslant \sigma$, но нашлись $\varphi \in \sigma^0$ и $\psi \in \sigma^1$ такие, что для всех $b \geqslant a$ неверно $b \models \varphi \wedge \sim \psi$. Это значит, что $a \models \varphi \supset \psi$, т. е. $\varphi \supset \psi \in \langle a \rangle^0$. Тогда $\varphi \supset \psi \in \sigma^0$. Получили $\varphi \in \sigma^0$, $\varphi \supset \psi \in \sigma^0$, $\psi \in \sigma^1$. Но это противоречие, т. к. секвенция φ, $\varphi \supset \psi \to \psi$ выводима в интуиционистской логике.

Модель M максимальна, если для любой $a \in M$ в M^a реализуется любой тип σ такой, что $\langle a \rangle \leqslant \sigma$.

3.3. Пусть $\varkappa$ — кардинал. Понятие $\varkappa$-насыщенной модели определено, например, в [9].

Предложение 3 [9]:

а) *конечная модель является $\varkappa$-насыщенной для любого $\varkappa$;*

б) *если $\varkappa_1 < \varkappa_2$, то $\varkappa_2$-насыщенная модель является $\varkappa_1$-насыщенной;*

в) *счетная модель счетного языка имеет ω^+-насыщенное элементарное расширение.*

ЛЕММА 4. *2-насыщенная модель теории K максимальна.*

Доказательство. Пусть M 2-насыщенная, $a \in M$ и $\langle a \rangle \leqslant \sigma$. Введем константу $\bar{a}$, интерпретируемую элементом a, и рассмотрим множество формул с одной свободной переменной в расширенном языке:

$$\{x \geqslant \bar{a}\} \cup \{[\varphi](x) \mid \varphi \in \sigma^0\} \cup \{\sim [\varphi](x) \mid \varphi \in \sigma^1\}.$$

По лемме 3 тип σ локально реализуется в M^a, поэтому это множество совместно с полной теорией модели (M, a). Но M 2-насыщенна, значит, это множество выполняется на некотором элементе $b \in M$. Ясно, что $a \leqslant b$ и $\langle b \rangle = \sigma$.

3.4. Определим каноническую модель σ^* типа σ. Основное множество состоит из типов, больших или равных σ. Корень—тип σ. Порядок — по включению первых компонент. Пропозициональные переменные оцениваются так: $\sigma \models p \rightleftharpoons p \in \sigma^0$. Условие монотонности для $\models$ выполнено, так что σ^* действительно является моделью.

ЛЕММА 5. *Максимальная модель типа* σ *p-морфно отображается на каноническую модель* σ^*.

Доказательство. Пусть M — максимальная модель типа σ. Определим отображение $\alpha: M \to \sigma^*$ так: $a \mapsto \langle a \rangle$. Монотонность α и согласованность оценок очевидны.

Пусть $\langle a \rangle \leqslant \sigma$. M максимальна, значит $\sigma = \langle b \rangle$ для некоторой $b \geqslant a$. Отсюда — сюръективность и конусность α.

Следствие. *Эквивалентные максимальные модели подобны.*

ТЕОРЕМА 2. *Эквивалентные модели подобны.*

Доказательство. Пусть $M \equiv N$ — модели типа σ. Можно считать, что они не более чем счетны (иначе по теореме Левенгейма-Сколема можно перейти к элементарно эквивалентным счетным моделям. Такой переход допускается в определении подобия). Из предложения 3 следует, что найдутся 2-насыщенные элементарные расширения $M' \succ M$ и $N' \succ N$. По лемме 4 M' и N' максимальны. Ясно также, что $M' \equiv N'$. По лемме 5 подобие моделей M и N определяется цепочкой

$$M \prec M' \to \sigma^* \leftarrow N' \succ N.$$

Пример. Нульместные связки. Пусть связка $A(x)$ не содержит одноместных предикатов P_i. Тогда ее истинность в произвольной модели не зависит от оценки последних, и их можно «стереть». Модель с пустыми значениями P_i можно p-морфно стянуть в точку. Отсюда следует, что A либо истинна в любой модели, либо ложна в любой. Нульместными связками являются только «истина» и «ложь».

Удмуртский государственный
университет им. 50-летия СССР

Поступило
18.12.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Драгалин А. Г. Математический интуиционизм: Введение в теорию доказательств.— М.: Наука, 1979.

[2] Gabbay D. M., On some new intuitionistic propositional connectives. I.— Studia Logica, 1977, v. 36, № 1—2, p. 127—139.

[3] Скворцов Д. П. Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой.— В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам, М.: Наука, 1983, с. 154—173.

[4] Яшин А. Д. Интуиционистская логика предикатов со связкой «завтра».— Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1982, № 4, с. 19—22.
[5] Troelstra A. S. On a second order propositional operators in intuitionistic logic.— Studia Logica, 1981, v. 40, № 2, p. 113—139.
[6] McCullough D. P. Logical connectives for intuitionistic propositional logic.— J. Symbolic Logic, 1971, v. 36, № 1, p. 15—20.
[7] Мучник А. А., Ермолаева Н. М. О функциональной представимости в линейно упорядоченных моделях некоторых пропозициональных логик.— Тезисы 6-й Всесоюзной конф. по мат. логике. Тбилиси, 1982, с. 123.
[8] Gabbay D. M. Model theory for intuitionistic logic.— Z. Math. Logik und Grundl. Math., 1972, Bd. 18, № 1, S. 49—54.
[9] Кейслер Дж., Чэн Ч. Ч. Теория моделей.— М.: Мир, 1977.
[10] Kirk R. E. A characterisation of the classes of finite tree frames which are adequate for the intuitionistic logic.—Z. Math. Logik und Grundl. Math., 1980, Bd. 26, № 6, S. 497—501.
[11] Яшин А. Д. О семантическом подходе к понятию интуиционистской логической связки.— Деп. ВИНИТИ, № 4171—83, 26 с.