

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГРУПП БУНА.

Л.А.Бокуть

В в е д е н и е

В настоящее время имеется несколько доказательств результата, установленного впервые П.С.Новиковым, о неразрешимости проблемы тождества слов для конечно-определённых групп [1] - [5]. В этой заметке, не претендующей на новизну результатов, мы предлагаем некоторое новое доказательство указанного факта, основывающееся на одной конструкции, принадлежащей Буну [2]. Особенность его состоит в том, что одновременно (почти без дополнительных усилий) устанавливается следующее свойство групп Буна:

Степень неразрешимости проблемы тождества слов группы Буна $G(T, q)$ совпадает со степенью неразрешимости проблемы равенства специальных слов \sum слову q в подгруппе T .

Этот результат, впервые доказанный А.А.Фридманом [6], [7], затем Буном [9], является одним из центральных мест в доказательстве теоремы о существовании конечно-определённых групп с произвольной степенью неразрешимости проблемы тождества слов (теорема А.А.Фридмана [6], [7]; см. также Бун [10] и Клефем [8]).

Отметим, что в работе используется понятие проходных букв П.С.Новикова, лемма Бриттона о группах с проходными буквами, и,

кроме того, используются некоторые соображения, относящиеся к возможности построения в группах с проходными буквами канонического вида слов.

§ 1. Основные определения и леммы

1. Пусть $S = \{s_b, b \in B\}$ - некоторое множество букв (алфавит). Под S -словом мы будем понимать выражение вида:

$$s_{b_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{b_k}^{\varepsilon_k}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. Два слова A и B вида (1) называются графически равными ($A \equiv B$), если все их буквы последовательно совпадают. Слово (1) называется несократимым, если оно не содержит подслов вида $s_b s_b^{-1}$, $s_b^{-1} s_b$. Пустое слово обозначим знаком 1.

Пару $G = (S; D)$, где S - алфавит, D - система равенств вида:

$$A_i = B_i, \quad (2)$$

где A_i, B_i - S -слова, будем называть групповым исчислением над S с определяющими соотношениями D .

Следующие равенства называются тривиальными соотношениями группового исчисления:

$$s_b s_b^{-1} = 1, \quad s_b^{-1} s_b = 1. \quad (3)$$

Определим понятие выводимости в групповом исчислении. Говорят, что слово U выводимо в G из слова V , если V можно перевести в U с помощью некоторой цепочки преобразований

$$V \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \equiv U,$$

каждое из которых представляет собой либо тождественное преобразование, либо замену в соответствующих словах одной части равенств (2), (3) на другую.

В дальнейшем мы вместо слов "групповое исчисление", будем говорить "группа", а вместо "выводится в G " - "равно в G ". Алфавит S будем называть системой образующих для G .

2. Пусть $\bar{G} = (S; D)$ - группа с множеством образующих S и соотношений D . Говорят, что некоторая группа обладает множеством проходных букв

$$P = \{\rho_m, m \in M\}$$

с основанием \bar{G} , если

$$G = (S, P; D, E_{m_i} \rho_m = \rho_m F_{m_i}),$$

где E_{m_i}, F_{m_i} - S - слова (считаем, что $S \cap P = \emptyset$).

Введем обозначения:

$$\mathcal{U}_{\rho_m \rho_m} = V(E_{m_i}), \mathcal{L}_{\rho_m \rho_m} = V(F_{m_i}),$$

где $V(E_{m_i})$ - некоторое слово от слов $E_{m_i}, V(F_{m_i})$ то же слово, но от слов F_{m_i} .

ЛЕММА I. Предположим, что в некоторой цепочке преобразований группы G :

$$W_{\rho_m} \mathcal{U}_{\rho_m}^{-1} V \rightarrow W_{1\rho_m} \mathcal{U}_{1\rho_m}^{-1} V_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_{n\rho_m \rho_m}^{-1} V_n \rightarrow W_n V_n, \quad (4)$$

выделенные буквы ρ_m и ρ_m^{-1} сокращаются между собой. Тогда

$$W = W_n \mathcal{U}_{\rho_m \rho_m}, \mathcal{U} = \mathcal{L}_{\rho_m \rho_m}^{-1}, V = V_n,$$

и если цепочка (4) не содержит вставок проходных букв, то слова W, \mathcal{U}, V можно перевести, соответственно, в слова $W_n \mathcal{U}_{\rho_m \rho_m}, \mathcal{L}_{\rho_m \rho_m}^{-1}, V_n$ так же без вставок проходных букв.

Лемма доказывается с помощью очевидной индукции по длине цепочки (4).

Дадим теперь следующее основное для дальнейшего

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (П.С.Новиков). Буквы $\rho_m (m \in M)$ называются правильными проходными буквами группы G с основанием \bar{G} , если для каждого m и всех элементов $\mathcal{U}_{\rho_m \rho_m}$ имеет место утверждение $\mathcal{U}_{\rho_m \rho_m} = 1$ в \bar{G} тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_{\rho_m \rho_m} = 1$ в \bar{G} .

ЛЕММА 2. (П.С.Новиков). Пусть \mathcal{P} - правильная система проходных букв группы G с основанием \bar{G} . Пусть W - некоторое $S \cup P$ -слово и $W = 1$ в G . Тогда W можно перевести в 1 с помощью некоторой цепочки преобразований группы G , не содержащей вставок проходных букв.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую цепочку преобразований слова W в 1 :

$$W \rightarrow W_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_n = 1 \quad (5)$$

и выделим в ней последнюю вставку букв ρ_m . Пусть это будет вставка вида:

$$W_k \equiv W_{1k} W_{2k} \rightarrow W_{k+1} \equiv W_{1k} \rho_m \rho_m^{-1} W_{2k}. \quad (6)$$

Вставленные буквы ρ_m, ρ_m^{-1} должны в преобразованиях (5) сокращаться. Пусть при этом буква ρ_m сокращается не позднее буквы ρ_m^{-1} . Тогда ρ_m сокращается либо одновременно со вставленной с ней буквой ρ_m^{-1} , либо с некоторой буквой ρ_m^{-1} из слова W_{1k} .

В первом случае цепочка (5) содержит подцепочку вида:

$$W_{k+1} \equiv W_{1k} \rho_m \rho_m^{-1} W_{2k} \rightarrow \dots \rightarrow W_{1s} \rho_m \rho_m^{-1} W_{2s} \rightarrow W_s \equiv W_{1s} W_{2s} \rightarrow \dots \rightarrow 1.$$

Ввиду леммы I получаем, что существуют такие элементы $\alpha_{\rho_m \rho_m}$ и $\beta_{\rho_m \rho_m}$, что слова $W_{1k}, 1, W_{2k}$ переводятся (без вставок проходных букв) в слова $W_{1s} \alpha_{\rho_m \rho_m}, \beta_{\rho_m \rho_m}, W_{2s}$. Поэтому $\beta_{\rho_m \rho_m} = 1$. Ввиду правильности букв ρ_m , это означает, что $\alpha_{\rho_m \rho_m} = 1$ в \bar{G} , и поэтому слово W_k можно перевести в слово W_s без вставок проходных букв.

Совершенно аналогично рассматривается и второй из высказанных выше случаев.

Доказательство леммы завершается с помощью индукции по числу вставок проходных букв в цепочке (5).

Из леммы Новикова получаем, что если \mathcal{P} - правильная система проходных букв, то \bar{G} является подгруппой группы G .

ЛЕММА 3. (Бриттон [3]). Пусть \mathcal{P} - правильная система проходных букв группы G с основанием \bar{G} и пусть W - некоторое $S \cup \mathcal{P}$ -слово и $W=1$ в G . Тогда либо W является S -словом и поэтому $W=1$ в \bar{G} , либо W содержит одно из следующих подслов

$$\rho_m^{-1} A \rho_m, \rho_m B \rho_m^{-1},$$

где A, B - S -слова и $A = \alpha_{\rho_m \rho_m}, B = \beta_{\rho_m \rho_m}$ (в \bar{G}).

4. В этом пункте мы дадим некоторое расширение понятия проходных букв Новикова (см. Бриттон [3], А.А.Фридман [7]). При этом термин "проходные буквы" менять не будем.

Приведем соответствующие определения. Пусть $\bar{G} = (S; \mathcal{D})$ - группа с образующими S и соотношениями \mathcal{D} . Будем говорить теперь, что некоторая группа G обладает множеством проходных букв

$$\mathcal{P} = \{ \rho_m; m \in M \}$$

с основанием \bar{G} , если

$$G = (S, P; D, A_i \rho_{m_i} = \rho_{n_i} B_i), \quad (7)$$

где A_i, B_i - S -слова.

Буквы ρ_m и ρ_n , входящие в одно и то же соотношение группы G , назовем родственными. Будем считать, далее, каждую букву ρ_m родственной самой себе и распространим это отношение по транзитивности на всё множество P . В результате P разобьётся на классы родственных букв

$$P = \cup P_n \quad (n \in N).$$

В каждом классе P_n зафиксируем по представителю ρ_n ($n \in N$) и все остальные буквы ρ_{n_i} этого класса выразим некоторым образом через ρ_n с помощью соотношений группы G :

$$\rho_{n_i} = A'_{n_i}{}^{-1} \rho_n B'_{n_i}. \quad (8)$$

Исключая буквы ρ_{n_i} , не равные буквам ρ_n , из соотношений для G с помощью равенств (8), получим группу вида

$$G' = (S, \rho_n \ (n \in N); D, E_{n_i} \rho_n = \rho_n F_{n_i}).$$

Назовем систему букв ρ_m ($m \in M$) правильной системой проходных букв группы G с основанием \bar{G} , если буквы ρ_n ($n \in N$) являются правильными проходными буквами (в предыдущем смысле) для G' с основанием \bar{G} .

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\rho_{n_i} \rho_{n_j}} &= A'_{n_j}{}^{-1} \alpha_{\rho_n \rho_n} A'_{n_i} \\ \beta_{\rho_{n_j} \rho_{n_i}} &= B'_{n_j}{}^{-1} \beta_{\rho_n \rho_n} B'_{n_i} \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где $\rho_{n_i}, \rho_{n_j} \in P_n$, слова $A'_{n_i}, A'_{n_j}, B'_{n_i}, B'_{n_j}$ взяты из равенств (8).

Введенные элементы $\alpha_{\rho_{n_i} \rho_{n_j}}, \beta_{\rho_{n_j} \rho_{n_i}}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\alpha_{\rho_{n_i} \rho_{n_j}} \rho_{n_i} = \rho_{n_j} \beta_{\rho_{n_j} \rho_{n_i}}$$

Из леммы 3 непосредственно следует

ЛЕММА 3'. (Бриттон). Пусть P - правильная система проходных букв группы G с основанием \bar{G} и пусть W - некоторое SUP -слово, $W=1$ в G . Тогда либо

W является S -словом и $W=1$ в \bar{G} , либо W содержит одно из подслов:

$$\rho_{n_i}^{-1} A \rho_{n_i}, \rho_{n_j} B \rho_{n_j}^{-1},$$

где A, B — S -слова и $A = \alpha \rho_{n_i} \rho_{n_j}, B = \beta \rho_{n_j} \rho_{n_i}$ в \bar{G} .

5. Пусть G — группа вида (?).

Под расширенной системой соотношений группы G мы, следуя [I], будем понимать систему соотношений G , дополненную равенствами

$$B_i^{-1} \rho_{n_i}^{-1} = \rho_{m_i}^{-1} A_i^{-1}. \quad (10)$$

Как обычно, в преобразованиях

$$X A_i \rho_{m_i} Y = X \rho_{n_i} B_i Y, \quad X B_i^{-1} \rho_{n_i}^{-1} Y = X \rho_{m_i}^{-1} A_i^{-1} Y$$

относительно букв $\rho_{m_i}^{\pm 1}, \rho_{n_i}^{\pm 1}$, а также соответствующих букв слов X и Y будем говорить, что они имеют одну и ту же индивидуальность. По транзитивности можно говорить и об индивидуальности букв в произвольных цепочках преобразований. (Здесь, так же как и везде ниже, до конца этого пункта под "преобразованием" мы понимаем преобразование группы G из расширенной системы соотношений).

Пусть имеем цепочку преобразований группы G :

$$W \rho_n^\varepsilon V \rightarrow W_1 \rho_{n_1}^\varepsilon V_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_i \rho_{n_i}^\varepsilon V_i, \quad (11)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $\rho_n^\varepsilon, \dots, \rho_{n_i}^\varepsilon$ имеют одну и ту же индивидуальность. Тогда в G имеют место равенства:

$$W_i = W \alpha \rho_{n_i}^\varepsilon \rho_n^\varepsilon, \quad V_i = \beta \rho_n^\varepsilon \rho_{n_i}^\varepsilon V,$$

где мы считаем, что

$$\alpha \rho_{n_i}^{-1} \rho_n^{-1} = \beta \rho_n \rho_{n_i}, \quad \beta \rho_n^{-1} \rho_{n_i}^{-1} = \alpha \rho_{n_i} \rho_n.$$

Доказательство высказанного утверждения легко провести с помощью индукции по длине цепочки (II).

Отсюда легко выводится, что если в некоторой цепочке преобразований, начинающихся со слов $W \rho_n V \rho_n^{-1} T$ или $W \rho_n^{-1} V \rho_n T$ индивидуальности букв ρ_n и ρ_n^{-1} сокращаются между собой, то

$$V = \beta \rho_n \rho_n \quad \text{или} \quad V = \alpha \rho_n \rho_n,$$

соответственно.

§ 2. Группы с правильными проходными буквами

1. Пусть имеем некоторую группу G вида (6) с системой правильных проходных букв \mathcal{P} и основанием $\bar{G} = (S; D)$.

Условимся, что в этом пункте буквы R и T (с индексами) будут обозначать слова от алфавита S , буквы α и β (с индексами) — элементы множества $\{p_m^{\pm 1}, m \in M\}$.

Предположим, что во множестве всех групповых слов от алфавита $\mathcal{P} \cup S$ выделено некоторое подмножество C . О словах этого множества мы будем говорить, что они имеют канонический вид (или являются каноническими словами). Считаем выполненными следующие условия:

A.1. Все слова из множества C несократимы и не содержат подслов вида

$$\alpha^{-1} R \alpha,$$

где $R = 1$ в \bar{G} .

A.2. Множество C содержит буквы $p_m^{\pm 1}, m \in M$.

A.3. Если $W \in C$ и $W \equiv R_i \alpha_i \dots \alpha_j R_{j+1}$, то слова вида

$$R_i \alpha_i \dots \alpha_j R_{j+1}, R_i \alpha_i \dots \alpha_j, \alpha_i \dots \alpha_j, \alpha_i \dots \alpha_j R_{j+1},$$

где $1 \leq i \leq j \leq s$, также принадлежат C .

A.4. Если $R \alpha, T \beta \in C, R = T \mathcal{O} \alpha \beta$, то $\alpha = \beta$ в G , $R = T$ в \bar{G} .

A.5. Каждое слово в алфавите группы G равно в этой группе слову, имеющему канонический вид.

ЛЕММА 4. (О единственности канонического вида слов). Пусть W, U — два слова группы G , имеющие канонический вид, причём $W = U$.

Тогда, если $W \equiv R_i \alpha_i \dots \alpha_s R_{s+1}$, то $U \equiv T_i \alpha_i \dots \alpha_s T_{s+1}$, где $T_i = R_i$ в \bar{G} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий A.1 — A.4 следует, прежде всего, что слово, имеющее канонический вид, не содержит подслов

$$\beta^{-1} R \alpha,$$

где $R = \mathcal{O} \alpha \beta$.

Пусть теперь W, U — слова, удовлетворяющие условиям леммы. Из равенства

$$U^{-1} W = 1,$$

ввиду леммы Бриттона и сделанного замечания, получаем, что

$$U \equiv T, \beta, U, \text{ и } T,^{-1}R, = \alpha_{\alpha, \beta}.$$

Отсюда, в силу условия А.4, следует, что $\alpha, = \beta,$ в G и $R, = T,$ в \bar{G} .

Повторяя эти рассуждения, мы получим, что элемент U имеет требуемый вид.

Лемма доказана.

2. Предположим теперь, что имеется некоторая конечная последовательность групп

$$G_0, G_1, \dots, G_k, \dots, G_n = G, \quad (12)$$

удовлетворяющая условиям:

В.1. Каждая группа $G_k, k > 0$, является группой с системой проходных букв $\rho_i^{(k)}, i \in I_k$, и основанием G_{k-1} .

В.2. Соотношения группы $G_k, i \leq k \leq n$, содержащие проходные буквы, имеют вид

$$E_{1i} x_i E_{2i} \rho_{m_i}^{(k)} = \rho_{n_i}^{(k)} F_{1i} y_i F_{2i}, \quad (13)$$

где

x_i - проходная буква некоторой группы $G_t, i \leq t < k, E_{1i}, E_{2i}$ - слова от образующих группы G_{t-1} ; y_i - проходная буква некоторой группы $G_s, i \leq s < k, F_{1i}, F_{2i}$ - слова от образующих группы G_{s-1} .

Кроме того, в соотношениях (13) мы допускаем случай, когда буквы x_i (или y_i) являются образующими группы G_0 . В этом случае потребуем, чтобы слова E_{1i}, E_{2i} (соответственно, F_{1i}, F_{2i}) были бы словами этой же группы G_0 .

Нас будет интересовать вопрос об индуктивном определении в группах $G_k, 1 \leq k \leq n$, канонических слов, удовлетворяющих условиям А.1 - А.5.

Предположим, что в группе G_0 каким-то способом определены канонические слова и что каждое слово этой группы равно только одному каноническому слову. (В рассмотренном ниже случае G_0 - свободная группа и канонические слова в ней определены условием несократимости). Далее, будем считать, что если $k > 1$ то относительно группы G_{k-1} доказана правильность системы букв $\rho_i^{(k-1)}$

и в группе G_{k-1} определены канонические слова, удовлетворяющие условиям А.1 - А.5. Наконец, предположим, что доказана также правильность букв $\rho_i^{(k)}$ для группы G_k .

Тогда выделение канонических слов в алфавите группы G_k часто (в том числе во всех рассмотренных ниже случаях) можно осу-

шесть следующими условиями:

C.1. Все канонические слова группы G_{k-1} остаются каноническими и в G_k .

C.2. Слово

$$W \equiv R_1 \alpha_1 \dots \alpha_s R_{s+1},$$

где $R_i - G_{k-1}$ - слова, α_i - проходные буквы группы G_k , считается каноническим, если оно несократимо, R_i имеет канонический вид в группе G_{k-1} и W не содержит левых частей следующих равенств, построенных для каждого из соотношений (13):

$$\left. \begin{aligned} 1. \beta \alpha \beta \alpha_i E_{2i} P_{\pi_i}^{(k)} &= \alpha x_i \beta E_{1i}^{-1} P_{\pi_i}^{(k)} F_{1i} y_i F_{2i}; \\ 2. \beta \alpha \beta \alpha_i^{-1} E_{1i}^{-1} P_{\pi_i}^{(k)} &= \alpha x_i^{-1} \beta^{-1} E_{2i} P_{\pi_i}^{(k)} F_{2i}^{-1} y_i^{-1} F_{1i}^{-1}; \\ 3. \delta \alpha \delta \alpha y_i F_{2i} P_{\pi_i}^{(k-1)} &= \alpha y_i \delta F_{1i}^{-1} P_{\pi_i}^{(k-1)} E_{1i} x_i E_{2i}; \\ 4. \delta \alpha \delta \alpha^{-1} y_i^{-1} F_{1i}^{-1} P_{\pi_i}^{(k-1)} &= \alpha y_i^{-1} \delta^{-1} F_{2i} P_{\pi_i}^{(k-1)} E_{2i} x_i^{-1} E_{1i}^{-1}, \end{aligned} \right\} (I4)$$

где β, x_i - проходные буквы одной и той же группы G_k ; аналогично, δ и y_i .

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество слов алфавита группы G_k , удовлетворяющих условиям C_1, C_2 , удовлетворяет, очевидно, и условиям A.2, A.3 и A.5.

§ 3. Группы Буна

I. Под специальной полугруппой мы будем понимать полугруппу T с образующими

$$s_\beta, q_\alpha \quad (\beta \in B, \alpha \in A) \quad (I5)$$

и определяющими соотношениями

$$\Sigma_i = \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (I6)$$

где Σ_i, Γ_i - так называемые специальные слова, то есть слова вида

$$S q_\alpha S',$$

где S, S' - слова от букв s_β .

Пусть T - специальная полугруппа с выделенной буквой $q_{a_0} = q$. Построим для пары (T, q) следующую группу Буна $G(T, q) = G$.

Группа $G(T, q)$ порождается образующими:

$$s_\beta, q_\alpha, k, t, x, y, \ell_i, \tau_i, \quad (17)$$

где $\beta \in B, \alpha \in A, 1 \leq i \leq N$, и соотношениями:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad s_\beta y = y y s_\beta, \quad x s_\beta = s_\beta x x; \\ 2. \quad s_\beta \ell_i = y \ell_i y s_\beta, \quad \tau_i s_\beta = s_\beta x \tau_i x; \\ 3. \quad \sum_i = \ell_i \Gamma_i \tau_i; \\ 4. \quad t \ell_i = \ell_i t, \quad t y = y t; \\ 5. \quad \tau_i k = k \tau_i, \quad x k = k x; \\ 6. \quad (q^{-1} t q) k = k (q^{-1} t q) \end{array} \right\}, \quad (18)$$

где $\beta \in B, 1 \leq i \leq N, \sum_i \Gamma_i$ - слова из определяющих равенств (16) полугруппы T .

Наша цель состоит в доказательстве теоремы, доказанной впервые А.А.Фридманом [6], а затем Буном [10].

ТЕОРЕМА. Степень неразрешимости проблемы тождества слов группы $G(T, q)$ совпадает со степенью неразрешимости проблемы равенства специальных слов слову q в полугруппе T .

Таким образом, если T - полугруппа (например, полугруппа Поста) с неразрешимой проблемой равенства $\sum = q$, где \sum - специальное слово, то группа $G(T, q)$, как это хорошо известно, имеет неразрешимую проблему тождества слов.

Далее, в силу результата А.А.Фридмана [6] и Буна [9] о существовании специальных полугрупп T , для которых проблема равенства специальных слов слову q имеет заданную степень неразрешимости, это дает доказательство существования конечно-определенных групп с заданной степенью неразрешимости проблемы тождества слов.

2. Рассмотрим последовательность групп:

$$G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 = G, \quad (19)$$

где G_0 - свободная группа с образующими x, y ;

G_1 - группа, заданная образующими s_β, x, y и соотношениями (18.1);

G_2 - добавим к группе G_1 буквы $\ell_i, \tau_i, 1 \leq i \leq N$, и соотношения (18.2);

G_3 - добавим к группе G_2 буквы q_a , $a \in A$, и соотношения (18.3);

G_4 - добавим к группе G_3 букву t и соотношения (18.4);
 $G_5 = G_4$ - добавим к группе G_4 букву k и соотношения (18.5), (18.6).

Применим к группам последовательности (19) рассуждения из п. 2, § 2.

Относительно группы G_0 мы отметим, что канонические слова в ней определяются условием несократимости. Далее, два слова вида

$$V(y^2, x) \text{ и } V(y, x^2)$$

равны 1 в группе G_0 одновременно. И, наконец, отметим, что проблема вхождения для подгрупп (y^2, x) и (y, x^2) (порожденных элементами y^2, x и y, x^2 , соответственно) разрешима. (Это означает, что для каждого элемента $U \in G_0$ можно эффективно узнать принадлежит он, например, подгруппе (y^2, x) или нет.

3. Рассмотрим группу G_1 .

Определяющие соотношения G_1 запишем в виде

$$\underline{y} \underline{y} = s_\beta \underline{y}, \quad \underline{x} s_\beta = s_\beta \underline{x} \underline{x}, \quad (20)$$

где подчеркнутые буквы \underline{x} , \underline{y} выступают в роли букв x_i, y_i из равенств (14) (при $k=1$).

Так как

$$\mathcal{O}_{s_\beta s_\beta} = V(y^2, x), \quad \mathcal{L}_{s_\beta s_\beta} = V(y, x^2),$$

то, в силу предыдущего пункта, буквы s_β являются правильными производными буквами группы G_1 с основанием G_0 .

Определим в G_1 канонический вид элементов условиями С.1, С.2 и покажем, что при этом будут выполняться условия А.1 - А.5 предыдущего параграфа. Нам остается доказать, по существу, лишь выполнение условия А.4.

Пусть $R\alpha$, $T\alpha$ - два канонических слова и $R = T\mathcal{O}_{\alpha\alpha}$. Предположим, например, что $\alpha = s_\beta$. Тогда

$$R = TV(y^2, x).$$

Отсюда легко следует, что $V=1$ в G_0 .

Из выполнимости леммы 4 и того очевидного факта, что каждое слово U группы G_1 можно эффективно привести к слову $C(U)$ имеющему канонический вид, следует, что проблема тождества для группы G_1 разрешима.

Покажем теперь, что проблема вхождения элементов группы G_1

в каждую из следующих подгрупп:

$$A_1 = (y^{-1} s_b), \quad A_2 = (y s_b), \quad A_3 = (s_b x), \quad A_4 = (s_b x^{-1}),$$

где $b \in B$, разрешима.

Сделаем это, например, для группы A_1 . Каждый элемент группы A_1 можно представить в виде:

$$y S y^{-1},$$

где S - несократимое слово от букв $s_b^{\pm 1}$. Если теперь U - некоторое слово группы G_1 , имеющее канонический вид, S - проекция этого слова на алфавит s_b (то есть слово, получающееся из U вычеркиванием всех букв, кроме $s_b^{\pm 1}$), то $U \in A_1$ тогда и только тогда, когда

$$U \equiv C(y S y^{-1}).$$

4. Рассмотрим группу G_2 .

Запишем соотношения группы G_2 в виде:

$$y^{-1} s_b \ell_i = \ell_i y s_b, \quad s_b x \tau_i = \tau_i s_b x^{-1}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2I)$$

Отсюда следует, что имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\ell_i \ell_i} &= V(y^{-1} s_b), & \mathcal{L}_{\ell_i \ell_i} &= V(y s_b), \\ \mathcal{O}_{\tau_i \tau_i} &= V(s_b x), & \mathcal{L}_{\tau_i \tau_i} &= V(s_b x^{-1}). \end{aligned}$$

Так как отображение $s_b \rightarrow s_b, x \rightarrow x^{-1}, y \rightarrow y^{-1}$ индуцирует автоморфизм группы G_1 , то $\mathcal{O}_{\ell_i \ell_i} = 1$ в G_1 тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_{\ell_i \ell_i} = 1$ в G_1 . Это же верно и для элементов $\mathcal{O}_{\tau_i \tau_i}, \mathcal{L}_{\tau_i \tau_i}$. Таким образом, буквы ℓ_i, τ_i являются правильными производными буквами группы G_2 с основанием G_1 .

Определим канонические слова от алфавита группы G_2 условиями С.1, С.2. В силу замечания, сделанного в предыдущем пункте, для каждого элемента U группы G_2 можно эффективно построить равный ему элемент $C(U)$, имеющий канонический вид.

Докажем теперь выполнимость условий А.1 - А.5. Как и раньше, достаточно проверить условие А.4.

Пусть $R\alpha$ и $T\alpha$ - два канонических слова и $R = T\mathcal{O}_{\alpha\alpha}$. Предположим, например, что $\alpha = \ell_i$. Тогда

$$R = T y S y^{-1},$$

где S - несократимое слово от $s_b^{\pm 1}$. Если S - пусто, то доказывать нечего. В противном случае имеем:

$$S \equiv \alpha_1, \dots, \alpha_j .$$

Рассмотрим две возможности:

а) При приведении слова $Ty\alpha_1$ к каноническому виду группы G_1 буква α_1 сокращается. Тогда в силу п. 5, § I, получим:

$$T \equiv T_1 \alpha_1^{-1} T_2, \quad T_2 = \mathcal{L} \alpha_1^{-1} \alpha_1^{-1} y^{-1} .$$

Это противоречит тому, что $T\alpha$ имеет канонический вид (не выполняется одно из условий (I4)).

б) При приведении слова $Ty\alpha_1$ к каноническому виду буква α_1 не сокращается. Тогда слово TyS_1y^{-1} в каноническом виде оканчивается на подслово

$$\alpha_j T_1,$$

где $T_1 = \mathcal{L} \alpha_j \alpha_j y^{-1}$. Это противоречит тому, что слово $R\alpha$ имеет канонический вид.

Этим единственность канонического вида элементов группы доказана. Вместе с предыдущим получаем разрешимость проблемы тождества слов для группы G_2 .

Покажем теперь, что в группе G_2 разрешима проблема равенства слова некоторым словам вида:

$$V(\sum_{i_1}^{-1} \ell_i \Gamma_{i_1}), \quad V(\sum_{i_2}^{-1} \tau_i^{-1} \Gamma_{i_2}^{-1}), \quad (22)$$

где для каждого $i, 1 \leq i \leq N$, слова $\sum_{i_1}, \sum_{i_2}, \Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}$ определяются из равенств

$$\sum_{i_1} \equiv \sum_{i_1} q_{n_i} \sum_{i_2}, \quad \Gamma_{i_1} \equiv \Gamma_{i_1} q_{m_i} \Gamma_{i_2}, \quad (23)$$

где, в свою очередь, $\sum_i = \Gamma_i$ - соотношение из системы (I6) определяющих соотношений полугруппы T .

Последнее утверждение следует из того, что канонический вид слов (22) однозначно определяется проекцией этих слов на алфавит ℓ_i и τ_i , соответственно.

5. Рассмотрим группу G_3 .

Запишем соотношения группы G_3 в виде:

$$\sum_{i_1}^{-1} \ell_i \Gamma_{i_1} q_{m_i} = q_{n_i} \sum_{i_2}^{-1} \tau_i^{-1} \Gamma_{i_2}^{-1}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{L} q_{m_i} q_{n_i} = V(\sum_{j_1}^{-1} \ell_j \Gamma_{j_1}), \quad \mathcal{L} q_{n_i} q_{m_i} = V(\sum_{j_2}^{-1} \tau_j^{-1} \Gamma_{j_2}^{-1}) .$$

Слова $\mathcal{L} q_{m_i} q_{n_i}$ и $\mathcal{L} q_{n_i} q_{m_i}$ равны 1 в группе G_2 тогда и только тогда, когда равны 1 в свободной группе их проекции на ал-

фавит ℓ_i и τ_i соответственно. Это показывает, что буквы q_{π_i} образуют правильную систему проходных букв группы G_3 с основанием G_2 .

Определим теперь в группе G_2 канонические слова условиями С.1 и С.2. В силу утверждения, высказанного в конце предыдущего пункта, для каждого слова $\mathcal{U} \in G_3$ можно эффективно построить равное ему слово $C(\mathcal{U})$, имеющее канонический вид.

Как и для предыдущих групп, легко проверяется выполнимость условий А.1 - А.5. Это дает разрешимость проблемы тождества в группе G_3 .

Докажем теперь основные для дальнейшего леммы.

ЛЕММА 5. Пусть Σ и Σ' - два специальных слова. Тогда $\Sigma = \Sigma'$ в полугруппе \mathcal{T} тогда и только тогда, когда

$$\Sigma = V(\ell_i, y) \Sigma' W(\tau_i, x) \quad (23)$$

в группе G_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Sigma = \Sigma'$ в полугруппе \mathcal{T} , то легко видеть, что равенство (23) имеет место.

Предположим теперь обратное, а именно, что в группе G_3 выполняется равенство (23) для некоторых специальных слов Σ и Σ' . Считаем, что $V(\ell_i, y)$ и $W(\tau_i, x)$ имеют канонический вид.

Положим:

$$\Sigma \equiv \Sigma_1 q_1 \Sigma_2, \quad \Sigma' \equiv \Sigma'_1 q_2 \Sigma'_2.$$

Правая часть равенства (23) равна слову:

$$C(V(\ell_i, y) \Sigma'_1) q_2 C(\Sigma'_2 W(\tau_i, x)), \quad (24)$$

где, как и выше, $C(\mathcal{U})$ обозначает каноническое слово, равное \mathcal{U} .

Слово Σ имеет канонический вид. Если слово (24) также имеет канонический вид, то $q_1 = q_2$ и

$$\Sigma_1 = V(\ell_i, y) \Sigma'_1, \quad \Sigma_2 = \Sigma'_2 W(\tau_i, x)$$

в группе G_2 . Отсюда следует, что $V(\ell_i, y) = W(\tau_i, x) \equiv 1$ и $\Sigma \equiv \Sigma'$.

Пусть теперь слово (24) не имеет канонического вида. Это значит, что оно содержит в качестве подслова левую часть одного из следующих равенств:

$$\ell_i V(y s_b) \Gamma_{i1} q_{\pi_i} = V(y^{-1} s_b) \Sigma_{i1} q_{\pi_i} \Sigma_{i2} \tau_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1}, \quad (25)$$

$$\ell_i^{-1} V(y^{-1} s_b) \Sigma_{i1} q_{\pi_i} = V(y s_b) \Gamma_{i1} q_{\pi_i} \Gamma_{i2} \tau_i \Sigma_{i2}^{-1}. \quad (26)$$

Пусть, например, рассматриваемое слово содержит в качестве подслова левую часть соотношения (25). Это значит, что $q_2 = q_{m_i}$ и если

$$V(\ell_i, y) \equiv V'_i(\ell_i, y) \ell_i W(y),$$

то в группе G_2 имеет место равенство

$$W(y) \Sigma'_1 = V(y s_\beta) \Gamma_{i1}. \quad (27)$$

Так как левая часть этого равенства не содержит букв S_β^{-1} , то получаем (считая, что $V(y s_\beta)$ - несократимое слово) равенство:

$$V(y s_\beta) \equiv y s_{\beta_1} \dots y s_{\beta_k},$$

где $k \geq 0$. Отсюда и из равенства (27) имеем:

$$W(y) = y^{2^k-1}, \quad \Sigma'_1 \equiv s_{\beta_1} \dots s_{\beta_k} \Gamma_{i1}. \quad (28)$$

Таким образом, преобразование, состоящее в замене в слове (24) левой части равенства (25) на правую, переводит слово (24) в слово, равное следующему слову:

$$\left. \begin{aligned} & V'_i(\ell_i, y) y^{-1} s_{\beta_1} \dots y^{-1} s_{\beta_k} \Sigma_{i1} q_{n_i} \Sigma_{i2} z_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1} \Sigma'_2 W(z_i, x) = \\ & = V_i(\ell_i, y) s_{\beta_1} \dots s_{\beta_k} \Sigma_{i1} q_{n_i} \Sigma_{i2} z_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1} \Sigma'_2 W(z_i, x) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Докажем, что слово Σ'_2 имеет вид:

$$\Sigma'_2 \equiv \Gamma_{i2} s_{\beta_{k+1}} \dots s_{\beta_n}. \quad (30)$$

Действительно, в противном случае слово $\Gamma_{i2}^{-1} \Sigma'_2$ в несократимом виде начиналось бы на букву S_β^{-1} , и поэтому в каноническом виде слово

$$z_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1} \Sigma'_2 W(z_i, x)$$

начиналось бы на z_i^{-1} . Отсюда (ввиду того, что исходное слово $V(\ell_i, y)$ мы считали имеющим канонический вид) следует, что при приведении правой части равенства (29) к каноническому виду рассматриваемая буква z_i^{-1} сократиться не может. Это противоречит равенству (23).

Таким образом, равенство (30) доказано.

Окончательно получаем, что преобразование (25) переводит слово (24) в слово, равное слову:

$$V_i(\ell_i, y) s_{\beta_1} \dots s_{\beta_k} \Sigma_{i1} q_{n_i} \Sigma_{i2} s_{\beta_{k+1}} \dots s_{\beta_n} W_i(z_i, x),$$

где слово $V_1(\ell_i, y)$ содержит меньше вхождений букв ℓ_i , чем слово $V(\ell_i, y)$.

Этому преобразованию соответствует следующее преобразование в полугруппе T :

$$\Sigma' \equiv s_{\beta_1} \dots s_{\beta_k} \tau_{i_1} q_{\tau_{i_2}} s_{\beta_{k+1}} \dots s_{\beta_n} \rightarrow s_{\beta_1} \dots s_{\beta_k} \Sigma_i q_{\tau_{i_2}} \Sigma_{i_2} s_{\beta_{k+1}} \dots s_{\beta_n}.$$

Если слово (24) содержит вхождение левой части равенства (26), то все рассуждения вполне аналогичны.

Доказательство леммы завершается с помощью очевидной индукции по числу вхождений букв ℓ_i в исходное слово $V(\ell_i, y)$.

ЛЕММА 6. Проблема равенства некоторого слова Q группы G_3 слову вида

$$V(\ell_i, y) \Sigma W(z_i, x), \quad (31)$$

где Σ - специальное слово, разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q - некоторое слово группы G_3 , равное в этой группе слову (31). Отсюда следует, прежде всего, что Q имеет вид:

$$Q \equiv Q_1 q_i Q_2, \quad (32)$$

где Q_1, Q_2 - некоторые слова от образующих группы G_2 . Будем считать, что слово Q_1 имеет канонический вид. Тогда оно удовлетворяет условиям:

1) Q_1 не содержит вхождений букв $z_i^{\pm/}$.

Это следует из того, что канонический вид слова (31) обладает этим свойством и что преобразования, приводящие слово $Q_1 q_i Q_2$ к каноническому виду, не могут изменить число вхождений букв $z_i^{\pm/}$ в слово Q_1 .

2) Q_1 не содержит вхождений букв $s_{\beta}^{-/}$.

Доказательство буквально такое же, как и в предыдущем случае.

Рассмотрим теперь группу G_3' , антиизоморфную группе G_3 , и определим в ней канонические слова точно таким же образом, как это мы сделали для группы G_3 . Из условия получаем, что слово Q' (соответствующее при антиизоморфизме слову Q) равно в G_3' слову вида

$$W(z_i, x) \Sigma' V(\ell_i, y),$$

и поэтому слово Q_2' в каноническом виде группы G_3' удовлетворяет условиям:

1) Q_2' не содержит вхождений букв $\ell_i^{\pm/}$.

2) Q_2' не содержит вхождений букв $S\bar{B}'$.

Это значит, что слово Q_2 в группе G_3 равно слову, не содержащему вхождений букв $\ell_i^{\pm'}$ и $S\bar{B}'$, то есть канонический вид слова Q_2 не содержит вхождений этих букв.

Итак, получаем, что если слово (32) равно в группе G_3 слову вида (31), то канонические виды слов Q_1 и Q_2 не содержат букв $\tau_i^{\pm'}$, $S\bar{B}'$ и $\ell_i^{\pm'}$, $S\bar{B}'$, соответственно. Но эти условия являются и достаточными для выполнения нужного нам равенства.

Лемма доказана.

6. Рассмотрим группу G_4 .

Из соотношений (18.4) видно, что

$$\alpha_{tt} = \mathcal{L}_{tt} = V(\ell_i, y).$$

Это показывает, что буква t является правильной проходной буквой группы G_4 с основанием G_3 . Слово $V(\ell_i, y)$, если оно несократимо, имеет канонический вид в группе G_3 . Поэтому проблемы вхождения элементов группы G_3 в подгруппы

$$\{\alpha_{tt}\} \text{ и } \{\mathcal{L}_{tt}\}$$

алгоритмически разрешимы.

определим канонический вид элементов группы G_4 условиями С.1 и С.2. Выполнимость условий А.1 - А.5 проверяется так же, как и выше.

Все это показывает, что проблема тождества в группе G_4 разрешима.

7. Рассмотрим, наконец, группу G_5 .

Из соотношений (18.5) и (18.6) видно, что буква k является правильной проходной буквой группы G_5 с основанием G_4 .

Канонические слова группы G_5 определим условиями С.1 и С.2, но только потребуем (в целях большего удобства), чтобы равенства (14), построенные для соотношений (18.6), имели вид:

$$t \mathcal{L}_{tt} q V(\tau_i, x) k = \alpha_{tt} q k \cdot q^{-1} t q V(\tau_i, x) ;$$

$$t^{-1} \mathcal{L}_{t^{-1}t^{-1}q} V(\tau_i, x) k = \alpha_{t^{-1}t^{-1}q} k \cdot q^{-1} t q V(\tau_i, x) ;$$

$$t \mathcal{L}_{tt} q V(\tau_i, x) k^{-1} = \alpha_{tt} q k^{-1} \cdot q^{-1} t q V(\tau_i, x) ;$$

$$t^{-1} \mathcal{L}_{t^{-1}t^{-1}q} V(\tau_i, x) k^{-1} = \alpha_{t^{-1}t^{-1}q} k^{-1} \cdot q^{-1} t q V(\tau_i, x).$$

Как и выше, легко проверяется, что в группе G_5 выполняются

ся условия А.1 - А.5. Далее, приведение слов группы G_5 к каноническому виду во всех своих частях эффективно, кроме того случая, когда мы должны будем уметь отвечать на вопрос, равно ли некоторое слово Q группы G_3 слову вида:

$$\mathcal{L}_{tt}qV(z_i, x) \equiv \mathcal{L}_{t^{-1}t^{-1}}qV(z_i, x) \equiv V_1(\ell_i, y)qV(z_i, x).$$

Ввиду лемм 5 и 6 это сводится к вопросу о равенстве некоторого специального слова Σ слову q в полугруппе \mathcal{T} .

Это показывает, что степень неразрешимости проблемы тождества слов группы G_5 не превосходит степени неразрешимости проблемы равенства специальных слов слову q в полугруппе \mathcal{T} .

Для доказательства обратного неравенства достаточно заметить, что соотношение

$$(\Sigma^{-1}t\Sigma)k = k(\Sigma^{-1}t\Sigma), \quad (32)$$

где Σ - специальное слово, имеет место в G_5 тогда и только тогда, когда

$$\Sigma = q \quad (33)$$

в полугруппе \mathcal{T} .

Действительно, если $\Sigma = q$ в \mathcal{T} , то равенство (32) очевидно. Обратно, если имеет место равенство (32), то, применяя два раза лемму Бриттона, получим, что

$$\Sigma = V_1(\ell_i, y)qV(z_i, x)$$

в G_3 . По лемме 5 отсюда следует соотношение (33).

Теорема полностью доказана.

Поступила в редакцию
I.УШ.1966 г.

Л и т е р а т у р а

1. П.С.Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в группах.- Труды Мат. института им. Стеклова, 44 (1955).
2. W.W.Boone, The word problem, Ann.of Math. 70 (1959), 207-265.
3. T.L.Briton, The word problem for groups, Proc.Lond.Math. Soc.

-
4. Britton T.L., The word problem, *Ann. of Math.* 77 (1963), 1
 5. Higman G., Subgroups of finitely presented groups, *Proc. Royal Soc., A*, 1961, A262, 455-475.
 6. А.А.Фридман. Степени неразрешимости для конечно-определенных групп.- *ДАН*, 147(1962), № 4, 805-808.
 7. А.А.Фридман. Степени неразрешимости для конечно-определенных групп.- Диссертация, Москва, 1963.
 8. Clapham C.R.T., Finitely presented groups with word problems of arbitrary degrees of unsolvability, *Proc. Lond. Math. Soc.*, XIV (1964), 56, 633-676.
 9. Boone W.W., Finitely presented group whose word problem has the same degree as that of arbitrarily given Thue system (an Application of Method of Britton) *Proc. Nat. Acad. Soc. USA*, 53(1965), 2, 265-269.
 10. Boone W.W., Partial results regarding word problems and recursively enumerable degree of unsolvability, *Bull. Amer. Math. Soc.* 68 (1962), 616-623.