Д. А. Баранов, Е. С. Косолапов, О. В. Починка, Узел как полный инвариант диффеоморфизмов поверхностей с тремя периодическими орбитами,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 4, 687–699

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2023. Том 64, № 4

УДК 517.938.5

УЗЕЛ КАК ПОЛНЫЙ ИНВАРИАНТ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ТРЕМЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ

Д. А. Баранов,
Е. С. Косолапов О. В. Починка

Аннотация. Известно, что диффеоморфизмы Морса — Смейла с двумя гиперболическими периодическими орбитами существуют только на сфере и все они топологически сопряжены друг другу. Однако если допустить существование трех орбит, то круг многообразий их допускающих, значительно расширяется. В частности, такие сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы допускают поверхности любого рода. В настоящей работе найден полный инвариант топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса — Смейла с тремя периодическими орбитами. Он полностью определяется гомотопическим типом (парой взаимно простых чисел) узла на торе, являющегося пространством орбит неустойчивой седловой сепаратрисы в пространстве орбит бассейна стока. С помощью полученного результата удается вычислить точное число классов топологической сопряженности рассматриваемых диффеоморфизмов на заданной поверхности, а также связь рода этой поверхности с гомотопическим типом узла.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.403

Ключевые слова: узел, поверхность, градиентно-подобный диффеоморфизм.

1. Введение и формулировка результатов

Пусть S_p — замкнутая ориентируемая поверхность рода $p \geq 0$ с метрикой d. Гомеоморфизмы $f, f' : S_p \to S_p$ называются *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : S_p \to S_p$ такой, что $f' = h \circ f \circ h^{-1}$.

Точка $x \in S_p$ называется *блуждающей* для гомеоморфизма f, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^n(U_x) \cap U_x = \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка называется *неблуждающей.* Множество неблуждающих точек f называется *неблуждающим множеством* и обозначается через Ω_f. Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $r \in \Omega_f$ периодическая с некоторым периодом $m_r \in \mathbb{N}$.

Если f — диффеоморфизм, то точка $r \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если абсолютные значения всех собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$ не равны 1. Если абсолютные значения всех собственных значений меньше

Исследование поддержано грантом РНФ, договор 22-11-00027, за исключением численных расчетов числа периодических отображений на заданной поверхности, поддержанных лабораторией динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, созданной в рамках мегагранта министерства науки и высшего образования РФ (проект 075-15-2022-1101).

(больше) 1, то точка r называется *стоком* (*источником*). Стоки и источники называются *узлами*. Если гиперболическая периодическая точка не является узлом, то это *седловая точка*.

Для гиперболической периодической точки r диффеоморфизма f обозначим через q_r число собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$, по модулю больших 1. Гиперболическая структура периодической точки r влечет существование *устойчивого*

$$W^s_r = \{x \in S_p : \lim_{k\to+\infty} d(f^{k\cdot m_r}(x), r) = 0\}$$

и *неустойчивого*

$$W^u_r = \{x \in S_p : \lim_{k\to+\infty} d(f^{-k\cdot m_r}(x), r) = 0\}$$

многообразий, являющихся гладкими вложениями $\mathbb{R}^{2-q_r}$ и $\mathbb{R}^{q_r}$ соответственно.

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Компонента связности множества $W^u_r \setminus r$ ($W^s_r \setminus r$) называется *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой*. Диффеоморфизм $f : S_p \to S_p$ называется *диффеоморфизмом Морса — Смейла*, если Ω_f конечно и гиперболично, а инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально. Если при этом инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются, то диффеоморфизм Морса — Смейла $f : S_p \to S_p$ называется *градиентно-подобным*.

Периодические данные периодической орбиты $\mathcal{O}_r$ периодической точки r — это набор чисел (m_r, q_r, ν_r), где m_r — период r, $q_r = \dim\ W^u_r$ и ν_r — тип ориентации r: $\nu_r = +1$ ($\nu_r = -1$), если $f^{m_r}|_{W^u_r}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов тип ориентации всех узлов $+1$, а тип ориентации седловых точек может быть равен $+1$ или -1.

Обозначим через G множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса — Смейла $f : S_p \to S_p$, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех периодических орбит.

Утверждение 1.1 [1, теоремы 2.1, 2.2]. *Неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in G$ состоит из стоковой орбиты $\mathcal{O}_\omega$, источниковой орбиты $\mathcal{O}_\alpha$ и седловой орбиты $\mathcal{O}_\sigma$. При этом седловая орбита имеет отрицательный тип ориентации и хотя бы одна из узловых орбит диффеоморфизма имеет период* 1.

Для возможности независимого прочтения рукописи приведем доказательство утверждения 1.1 в разд. 3. Везде далее для определенности будем считать, что неподвижной является стоковая точка ω. Из гиперболичности стока следует, что диффеоморфизм $f|_{W^s_\omega}$ топологически сопряжен посредством некоторого гомеоморфизма $\psi_f : W^s_\omega \to \mathbb{R}^2$ с линейным диффеоморфизмом $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданным формулой (см., например, [2, предложение 2.5])

$$A(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right).$$

Положим $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))/A$ и обозначим через $p : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Введем образующие на торе следующим образом. *Параллелью* L на торе $\mathbb{T}^2$ будем называть образ единичной окружности $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ($L = p(\mathbb{S}^1)$) с ориентацией против часовой стрелки, параллель имеет гомотопичесикий тип $\langle 1, 0\rangle$. *Меридианом* M будем называть образ положительной полуоси $Ox_1^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 = 0\}$ оси Ox_1 ($M = p(Ox_1^+)$) с

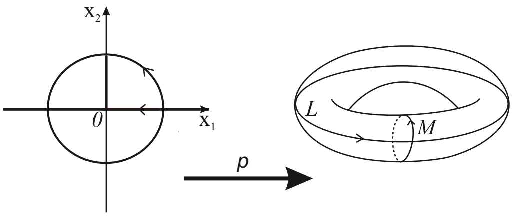

Рис. 1. Параллель L и меридиан M на торе.

ориентацией в направлении убывания x_1, меридиан имеет гомотопический тип $\langle 0, 1\rangle$ (рис. 1).

Положим $p_f = p\psi_f : V_f \to \mathbb{T}^2$ и $\gamma_f = p_f\big(W^u_{\mathscr{O}_\sigma}\big)$. Согласно [2] множество γ_f является существенным узлом на торе $\mathbb{T}^2$, имеющим гомотопический тип $\langle\lambda_f, \mu_f\rangle$, где $\mu_f > 0$ и $\mathrm{gsd}(\lambda_f, \mu_f) = 1$. Гомотопический тип узла γ_f зависит от выбора гомеоморфизма ψ_f так, что если $(\widetilde{\lambda}_f, \widetilde{\mu}_f)$ — гомотопический тип узла γ_f для некоторого гомеоморфизма $\widetilde{\psi}_f$, отличного от ψ_f, то $\widetilde{\mu}_f = \mu_f$, $\widetilde{\lambda}_f \equiv \lambda_f \pmod{\mu_f}$. Таким образом, не уменьшая общности будем считать, что гомеоморфизм ψ_f выбран так, что узел γ_f имеет гомотопический тип

$$\langle\lambda_f, \mu_f\rangle\colon \mu_f > 0,\ \mathrm{gsd}(\lambda_f, \mu_f) = 1,\ 0 \le \lambda_f < \mu_f. \qquad (*)$$

Основным результатом работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *Класс топологической сопряженности диффеоморфизма $f \in G$ однозначно определяется гомотопическим типом $\langle\lambda_f, \mu_f\rangle$ узла γ_f, т. е. диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\lambda_f = \lambda_{f'}$ и $\mu_f = \mu_{f'}$.*

Теорема 2. *На поверхности S_p рода $p \ge 0$ диффеоморфизм $f \in G$ с узлом γ_f гомотопического типа $\langle\lambda_f, \mu_f\rangle$ существует тогда и только тогда, когда*

$$\mu_f = 4p \text{ или } \mu_f = 4p + 2.$$

При этом число N_p классов топологической сопряженности диффеоморфизмов $f \in G$, заданных на поверхности S_p, вычисляется по формуле

$$N_p = \varphi(4p) + \varphi(4p + 2),$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, т. е. количество взаимно простых с n чисел, не превышающих n.

2. Периодические гомеоморфизмы поверхности

Гомеоморфизм $\varphi : S_p \to S_p$ называется *периодическим*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n = \mathrm{id}$. Наименьшее из таких n называется *периодом* φ. Точка x_0 называется *точкой меньшего периода* $n_0 < n$ гомеоморфизма φ, если $\varphi^{n_0}(x_0) = x_0$.

Везде далее рассматриваются сохраняющие ориентацию периодические гомеоморфизмы. Согласно результатам Нильсена [3] (см. также [4]) для любого такого гомеоморфизма $\varphi : S_p \to S_p$ множество точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия гомеоморфизма φ на S_p является сферой с

g ручками (модульной поверхностью). В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi\frac{\delta_0}{\lambda_0}$, где $\lambda_0 = \frac{n}{n_0}$.

Обозначим через X_i, $i = 1, \dots, k$, орбиты точек меньшего периода, их периоды — через n_i и положим $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$. Обозначим через $\frac{\delta_i}{\lambda_i}$ соответствующее число вращения и определим число d_i из условия $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$.

Набор параметров $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ периодического гомеоморфизма φ называется его *полной характеристикой.*

Утверждение 2.1 [3]. *Два периодических гомеоморфизма топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые с точностью до перенумерации полные характеристики.*

Утверждение 2.2 [3]. *Полная характеристика* $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ *реализуется некоторым периодическим гомеоморфизмом* $\varphi : S_p \to S_p$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- $2p + \sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g + k - 2)$,
- $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i n_i \equiv 0 \pmod{n}$,
- *если* $g = 0$, *то* $\gcd(d_1 n_1, \dots, d_k n_k, n) = 1$.

Утверждение 2.3 [4, 5]. *Пусть дан периодический гомеоморфизм* φ *с полной характеристикой* $(n, p, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$. *Тогда выполнены следующие неравенства:*

(1) $g \le p$,
(2) $k \le 2(p + 1)$,
(3) $n \le 4p + 2$.

Заметим, что из этих неравенств сразу следует, что поиск всех периодических гомеоморфизмов на поверхности с фиксированным числом ручек является чисто алгоритмической задачей. Следующая лемма дает алгоритмический критерий реализуемости характеристики периодическим гомеоморфизмом.

Лемма 1 (алгоритмичекий критерий). *Набор* $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ *является полной характеристикой периодического отображения* φ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия (ниже* $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$, $\lambda = \operatorname{lcm}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$*).*

В случае $g = 0$*:*

(1) $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\lambda_i} \in \{1, \dots, k - 1\}$;

(2) $n = \lambda$ *и* $p = \frac{\lambda - \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\lambda_i}}{2} + 1$;

(3) $\gcd(d_1, \dots, d_k, n) = 1$.

В случае $g \ne 0$*:*

(1) $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\lambda_i} \in \{1, \dots, k - 1\}$;

(2) $n = \tau\lambda$, $\tau \in \mathbb{N}$ *и* $p = \frac{\lambda(2g+k-2) - \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\lambda_i}}{2}\tau + 1$.

Доказательство. Условие 1 вытекает из первого пункта утверждения 2.2. Именно,

$$d_1 n_1 + \dots + d_k n_k \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow \frac{d_1 n}{\lambda_1} + \dots + \frac{d_k n}{\lambda_k} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Так как $0 < d_i < \lambda_i$, то $0 < \frac{d_i n}{\lambda_i} < n$. Отсюда следует, что

$$\frac{d_1 n}{\lambda_1} + \dots + \frac{d_k n}{\lambda_k} \in \{n, 2n, \dots, (k-1)n\} \Rightarrow \frac{d_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{d_k}{\lambda_k} \in \{1, 2, \dots, k-1\}.$$

Условие 2 вытекает из первого пункта утверждения 2.2. Действительно, по определению $n = \lambda_i n_i$, $i = 1, \dots, k$, откуда следует, что $n = \tau\lambda$ для некоторого $\tau \in \mathbb{N}$. Далее из уравнения на эйлеровы характеристики выражаем род p исходной поверхности:

$$p = \frac{\lambda(2g + k - 2) - \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\lambda_i}}{2}\tau + 1.$$

Таким образом, лемма доказана для случая $g \neq 0$.

Покажем, что $\tau = 1$ для случая, когда $g = 0$. Действительно, пусть это не так и $n = \tau\lambda$, где $\tau > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \gcd(d_1 n_1, \dots, d_k n_k, n) &= \gcd\left(\frac{d_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{d_k n}{\lambda_k}, n\right) \\ &= \gcd\left(\tau\frac{\lambda}{\lambda_1}d_1, \dots, \tau\frac{\lambda}{\lambda_k}d_k, \tau\lambda\right) \geq \tau > 1. \end{aligned}$$

Получили противоречие с третьим пунктом утверждения 2.2.

Таким образом, если $g = 0$, то $n = \lambda = \operatorname{lcm}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Поскольку в силу третьего пункта утверждения 2.2 $\gcd\bigl(\frac{n}{\lambda_1}d_1, \dots, \frac{n}{\lambda_k}d_k, n\bigr) = 1$, то

$$\gcd\left(\frac{n}{\lambda_1}, \dots, \frac{n}{\lambda_k}\right) = 1.$$

Из этого факта следует, что

$$\gcd\left(\frac{n}{\lambda_1}d_1, \dots, \frac{n}{\lambda_k}d_k\right) = \gcd(d_1, \dots, d_k).$$

Тогда

$$\gcd(d_1, \dots, d_k, n) = \gcd\left(\frac{n}{\lambda_1}d_1, \dots, \frac{n}{\lambda_k}d_k, n\right) = 1,$$

и лемма доказана. □

Ниже приведены следствия алгоритмического критерия.

Следствие 2.1. *Не существует периодических гомеоморфизмов ровно с одной точкой меньшего периода.*

Следствие 2.2. *Любой периодический гомеоморфизм с двумя точками меньшего периода при $g \neq 0$ имеет полную характеристику следующего вида:*

$$(n = \tau\lambda,\ p = \tau(2g-1) + 1,\ n_1 = n_2 = \lambda,\ d_1 + d_2 = \lambda).$$

В случае $g = 0$ любой периодический гомеоморфизм сопряжен повороту сферы вокруг оси полюсов на некоторый рациональный угол.

3. Динамика диффеоморфизмов класса G

3.1. Линеаризующая окрестность седловой точки. Пусть $f : S_p \to S_p$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса — Смейла и σ — седловая периодическая точка периода m_σ и типа ориентации ν_σ диффеоморфизма f. Обозначим через $a_{\nu_\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, заданный формулой

$$a_{\nu_\sigma}(x, y) = \left(\nu_\sigma \cdot \frac{x}{2}, \nu_\sigma \cdot 2y\right).$$

Диффеоморфизм $a_{\nu_\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет единственную неподвижную седловую точку в начале координат O с устойчивым многообразием $W^s_O = Ox_1$ и неустойчивым многообразием $W^u_O = Ox_2$. Для $t \in (0, 1]$ положим

$$\mathscr{N}^t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 x_2| \leq t\}, \ \mathscr{N} = \mathscr{N}^1.$$

Определим в окрестности $\mathscr{N}$ пару трансверсальных слоений $\mathscr{F}^u$, $\mathscr{F}^s$ следующим образом:

$$\mathscr{F}^u = \bigcup_{c_2 \in Ox_2} \{(x_1, x_2) \in \mathscr{N} : x_2 = c_2\},$$

$$\mathscr{F}^s = \bigcup_{c_1 \in Ox_1} \{(x_1, x_2) \in \mathscr{N} : x_1 = c_1\}.$$

Заметим, что множество $\mathscr{N}$ инвариантно относительно диффеоморфизма a_ν, который переводит слои слоения $\mathscr{F}^u$ ($\mathscr{F}^s$) в слои этого же слоения.

Окрестность N_σ седловой точки σ назовем *линеаризующей*, если существует гомеоморфизм $h_\sigma : N_\sigma \to \mathscr{N}$, сопрягающий диффеоморфизм $f^{m_\sigma}|_{N_\sigma}$ с каноническим диффеоморфизмом $a_{\nu_\sigma}|_{\mathscr{N}}$.

Слоения $\mathscr{F}^u$, $\mathscr{F}^s$ индуцируют посредством гомеоморфизма h_σ^{-1} f^{m_σ}-инвариантные слоения F^u_σ, F^s_σ на линеаризующей окрестности N_σ (рис. 2).

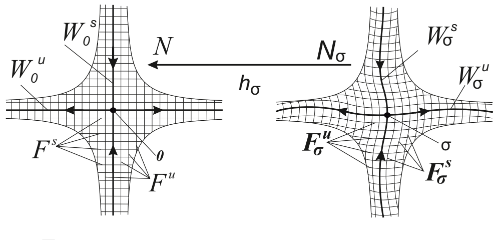

Рис. 2. Линеаризующая окрестность седловой точки σ.

Утверждение 3.1 [2, теорема 2.2]. *Любая седловая точка сохраняющего ориентацию диффеоморфизма Морса — Смейла $f : S_p \to S_p$ обладает линеаризующей окрестностью.*

Положим $\mathscr{N}^u = \mathscr{N} \setminus Ox_1$ и через $\widehat{\mathscr{N}^u_{\nu_\sigma}} = \mathscr{N}^u / a_{\nu_\sigma}$ обозначим пространство орбит действия группы $\{a^n_{\nu_\sigma}, n \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathscr{N}^u$. Обозначим далее через $p_{\widehat{\mathscr{N}^u_{\nu_\sigma}}} : \mathscr{N}^u \to \widehat{\mathscr{N}^u_{\nu_\sigma}}$ естественную проекцию. Фундаментальная область[1)] действия группы $\{a^n_{\nu_\sigma}, n \in \mathbb{Z}\}$ на $\mathscr{N}^u$ в случае $\nu_\sigma = +1$ состоит из двух непересекающихся криволинейных трапеций, каждая из которых имеет эквивалентные

[1)] *Фундаментальной областью действия группы G на топологическом пространстве X* называется замкнутое множество $D_G \subset X$ такое, что существует множество $\widetilde{D}_G$ со следующими свойствами: 1) $\mathrm{cl}(\widetilde{D}_G) = D_G$; 2) $g(\widetilde{D}_G) \cap \widetilde{D}_G = \varnothing$ для всех $g \in G$, отличных от нейтрального элемента группы G; 3) $\bigcup\limits_{g \in G} g(\widetilde{D}_G) = X$.

точки, принадлежащие горизонтальным отрезкам границы, а в случае $\nu_\sigma = -1$ фундаментальную область можно выбрать в виде одной криволинейной трапеции (с эквивалентными точками на горизонтальных отрезках границы).

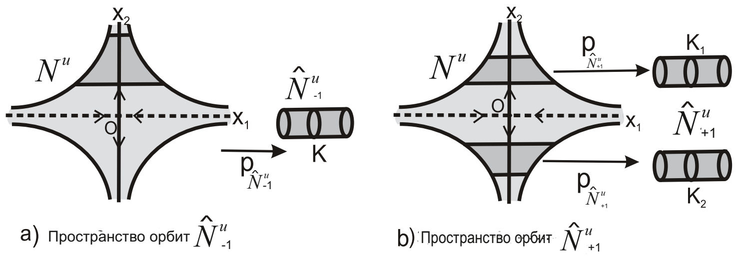

Рис. 3. Пространства орбит $\widehat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma}$.

На рис. 3 эти трапеции закрашены и показано, как из них отождествлением границ в силу диффеоморфизма a_{ν_σ} получается многообразие $\widehat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma}$ в зависимости от выбора ν_σ.

Утверждение 3.2 [6, утверждение 5]. *Многообразие $\widehat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma}$ имеет следующий топологический тип в зависимости от ν_σ:*

- *пространство $\widehat{\mathcal{N}}^u_{-1}$ гомеоморфно одному двумерному кольцу K;*
- *пространство $\widehat{\mathcal{N}}^u_{+1}$ гомеоморфно паре двумерных колец K_1, K_2.*

Аналогичное утверждение имеет место для множества $\mathcal{N}^s = \mathcal{N} \setminus Ox_2$. Кроме того, корректно определено отображение

$$\widehat{\psi}_\sigma = p_{\widehat{\mathcal{N}}^s_{\nu_\sigma}} p^{-1}_{\widehat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma}} : \partial\widehat{\mathcal{N}}^u_{\nu_\sigma} \to \partial\widehat{\mathcal{N}}^s_{\nu_\sigma},$$

называемое *отображением перестройки* (рис. 4).

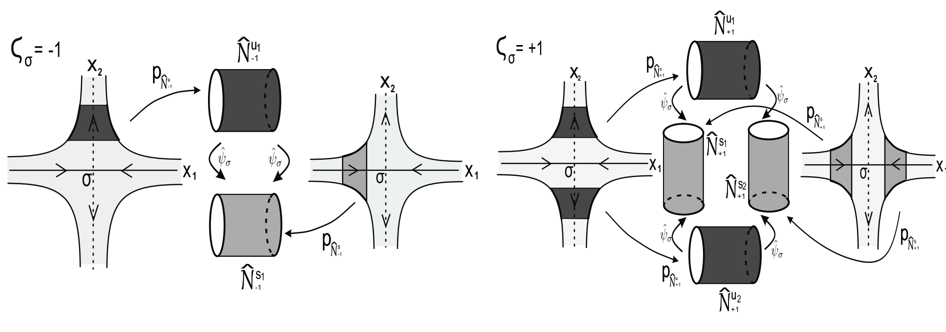

Рис. 4.

Положим $N^t_\sigma = h^{-1}_\sigma(\mathcal{N}^t)$, $N^{ut}_\sigma = N^t_\sigma \setminus W^s_\sigma$, $N^{st}_\sigma = N^t_\sigma \setminus W^u_\sigma$ и $\widehat{N}^{ut}_\sigma = N^{ut}/f$, $\widehat{N}^{st}_\sigma = N^{st}/f$, а также $N^u_\sigma = N^{u1}_\sigma$, $N^s_\sigma = N^{s1}_\sigma$, $\widehat{N}^u_\sigma = \widehat{N}^{u1}_\sigma$, $\widehat{N}^s_\sigma = \widehat{N}^{s1}_\sigma$.

3.2. Тип периодических орбит диффеоморфизма $f \in G$.

Лемма 2. *Неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in G$ состоит из стоковой орбиты $\mathscr{O}_\omega$, источниковой орбиты $\mathscr{O}_\alpha$ и седловой орбиты $\mathscr{O}_\sigma$, при этом седловая орбита имеет отрицательный тип ориентации.*

Доказательство. Поскольку f — диффеоморфизм Морса — Смейла, то (см., например, [7, теорема 2.3] или [2, теорема 2.1])

$$S_p = \bigcup_{r\in\Omega_f} W^u_r = \bigcup_{r\in\Omega_f} W^s_r. \qquad (*)$$

Отсюда следует, что диффеоморфизм f содержит хотя бы одну стоковую $\mathscr{O}_\omega$ и хотя бы одну источниковую орбиту $\mathscr{O}_\alpha$. Согласно [2, следствие 2.2] неблуждающее множество диффеоморфизма Морса — Смейла, не имеющего седловых точек, состоит из двух неподвижных точек. Тогда третья орбита диффеоморфизма f является седловой $\mathscr{O}_\sigma$. Покажем, что седловая точка σ имеет отрицательный тип ориентации.

Пусть $V_\omega = W^s_{\mathscr{O}_\omega} \setminus \mathscr{O}_\omega$. Обозначим через $\widehat{V}_\omega = V_\omega/f$ пространство орбит действия группы $F = \{f^k,\, k \in \mathbb{Z}\}$ на V_ω, а через $p_{_\omega} : V_\omega \to \widehat{V}_\omega$ — естественную проекцию. В силу [2, предложение 2.5, с. 35] пространство $\widehat{V}_\omega$ диффеоморфно двумерному тору, естественная проекция $p_{_\omega} : V_\omega \to \widehat{V}_\omega$ является накрытием. Пусть $N^u_\sigma = N_{\mathscr{O}_\sigma} \setminus W^s_{\mathscr{O}_\sigma}$. В силу формулы $(*)$ $N^u_\sigma \subset V_\omega$. Положим $\widehat{N}^u_\sigma = p_{_\omega}(N^u_\sigma)$. Согласно утверждению 3.2 множество $\widehat{N}^u_\sigma$ состоит из одного кольца (двух колец), если $\nu_\sigma = -1$ ($\nu_\sigma = +1$), нестягиваемого на торе $\widehat{V}_\omega$. Аналогичное верно для множества $\widehat{N}^s_\sigma$, являющегося проекцией множества $N^s_\sigma = N_{\mathscr{O}_\sigma} \setminus W^s_{\mathscr{O}_\sigma}$ на тор $\widehat{V}_\alpha = V_\alpha/f$, где $V_\alpha = W^u_{\mathscr{O}_\alpha} \setminus \mathscr{O}_\alpha$ и $p_{_\alpha} : V_\alpha \to \widehat{V}_\alpha$ — естественная проекция.

С другой стороны, из $(*)$ следует, что $V_\alpha = V_\omega \setminus N^u_\sigma \cup N^s_\sigma$. Тогда

$$\widehat{V}_\alpha = \widehat{V}_\omega \setminus \widehat{N}^u_\sigma \cup \widehat{N}^s_\sigma.$$

Таким образом, чтобы получить пространство $\widehat{V}_\alpha$ мы должны удалить кольца $\widehat{N}^u_\sigma$ из тора $\widehat{V}_\omega$ и приклеить кольца $\widehat{N}^s_\sigma$ к границе результирующего множества в силу отображения перестройки.

Если $\nu_\sigma = -1$, то каждое из множеств $\widehat{N}^u_\sigma$, $\widehat{N}^s_\sigma$ состоит из одного кольца, нестягиваемого на торе $\widehat{V}_\omega$, $\widehat{V}_\alpha$ соотвественно. Тогда $\widehat{V}_\omega \setminus \widehat{N}^u_\sigma$ представляет собой кольцо. Поэтому, приклеив к его границе кольцо $\widehat{N}^s_\sigma$, снова получим один тор и, следовательно, такой случай возможен.

Если $\nu_\sigma = +1$, то каждое из множеств $\widehat{N}^u_\sigma$, $\widehat{N}^s_\sigma$ состоит из пары колец, нестягиваемых на торе $\widehat{V}_\omega$, $\widehat{V}_\alpha$ соответственно. Тогда $\widehat{V}_\omega \setminus \widehat{N}^u_\sigma$ два кольца. Поэтому, приклеив к их границам кольца $\widehat{N}^s_\sigma$ в силу отображения перестройки, получим два тора (каждая пара колец задает отдельный тор) и, следовательно, такой случай невозможен. $\square$

3.3. Периодические данные диффеоморфизма $f \in G$.

Утверждение 3.3 [2, теоремы 3.1, 3.3]. *Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм $f : S_p \to S_p$ представляется в виде композиции $f = \varphi \circ \xi^1$, где ξ^1 — сдвиг на единицу времени вдоль траекторий градиентного потока ξ^t некоторой функции Морса*[2]*, а φ — периодический гомеоморфизм. При этом*

[2] C^2-гладкая функция с невырожденными критическими точками.

• *точки меньшего периода гомеоморфизма φ являются также периодическими точками диффеоморфизма f, причем их периоды совпадают;*

• *период сепаратрисы любой седловой точки диффеоморфизма f совпадает с периодом гомеоморфизма φ.*

Лемма 3. *Пусть $f = \varphi \circ \xi^1 \in G$. Тогда*

1) *отображение φ имеет либо две, либо три орбиты меньшего периода;*

2) *если отображение φ имеет две орбиты меньшего периода, то φ имеет полную характеристику $(n = 2, g = 0, p = 0, n_1 = n_2 = 1, d_1 = d_2 = 1)$ и является топологически сопряженным повороту сферы относительно оси север — юг на 180 градусов;*

3) *если отображение φ имеет ровно три точки меньшего периода, то оно имеет одну из следующих полных характеристик:*

(1) $(n = 4p, g = 0,\ p > 0,\ n_1 = 2p,\ n_2 = 1,\ n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2, d_3 = 2p - d_2)$, $0 < d_2 < 2p$, $\gcd(d_2, 2p) = 1$;

(2) $(n = 4p,\ g = 0,\ p > 0,\ n_1 = 2p,\ n_2 = 1,\ n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2, d_3 = 6p - d_2)$, $2p < d_2 < 4p$, $\gcd(d_2, 2p) = 1$;

(3) $(n = 4p + 2,\ g = 0,\ p > 0,\ n_1 = 2p + 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2, d_3 = 2p + 1 - 2d_2)$, $0 < d_2 \leq p$, $\gcd(d_2, 2p + 1) = 1$;

(4) $(n = 4p + 2,\ g = 0,\ p > 0,\ n_1 = 2p + 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2, d_3 = 6p + 3 - 2d_2)$, $p < d_2 \leq 2p$, $\gcd(d_2, 2p + 1) = 1$.

Доказательство. В силу леммы 2 неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из трех периодических орбит, стоковой $\mathscr{O}_\omega$, источниковой $\mathscr{O}_\alpha$ и седловой $\mathscr{O}_\sigma$. Пусть m_ω, m_α, m_σ — периоды стоковой, источниковой и седловой соответственно орбиты диффеоморфизма $f \in G$. Поскольку $f = \varphi \circ \xi^1$ и поток ξ^t порожден функцией Морса, в силу равенств Морса (см., например, [4]) справедливо равенство

$$m_\omega + m_\alpha - m_\sigma = 2 - 2p. \tag{$*$}$$

Пусть n — период гомеоморфизма φ. Согласно лемме 2 седловая орбита диффеоморфизма f имеет отрицательный тип ориентации, по утверждению 3.3 период седловой сепаратрисы равен n, откуда следует, что $m_\sigma = \frac{n}{2}$.

Докажем все пункты леммы.

1. Если бы у периодического отображения φ было больше трех точек меньшего периода, то в силу утверждения 3.3 у отображения f было бы больше трех периодических точек, что противоречит условию, наложенному на класс G. Так как период седловой точки равен $\frac{n}{2} < n$, у отображения φ должна быть хотя бы одна точка меньшего периода. Ровно одной точки меньшего периода быть не может в силу следствия 2.1.

2. Согласно равенству Морса $(*)$ в случае двух точек меньшего периода у гомеоморфизма φ имеем $-\frac{n}{2} + \frac{n}{\lambda_2} + n = 2 - 2p$. Подставим данное равенство в первое равенство леммы 1:

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{\lambda_2} + \frac{n}{2} - \frac{n}{\lambda_2} - n = n \cdot 2g.$$

Отсюда $n - n = n \cdot 2g$. Стало быть, $g = 0$. Из следствия 2.2 вытекает, что периодический гомеоморфизм φ есть поворот сферы на некоторый рациональный угол. Ясно, что в нашем случае этот угол будет равен 180 градусам. Действительно, период седловой точки равен 1, но, с другой стороны, ее период равен $\frac{n}{2}$, а значит, период отображения φ равен 2.

3. Предположим, что у соответствующего диффеоморфизму f периодического гомеоморфизма φ следующая полная характеристика: $(n, p, g, n_i, d_i, 1 \le i \le 3)$. В силу второго пункта утверждения 2.3 $p > 0$. Согласно условию и факту выше $n_1 = \frac{n}{2}$. Из равенства Морса $(*)$ имеем

$$-\frac{n}{2} + n_2 + n_3 = -\frac{n}{2} + \frac{n}{\lambda_2} + \frac{n}{\lambda_3} = 2 - 2p.$$

Из первого равенства леммы 1 получаем $n = n \cdot (2g + 1) \Rightarrow g = 0$.

Положим $n_2 = \frac{n}{\lambda_2}$, $n_3 = \frac{n}{\lambda_3}$. Так как $g = 0$, согласно лемме 1 получим, что $n = \operatorname{lcm}(2, \lambda_2, \lambda_3)$. Согласно второму условию леммы 1 будет $\frac{1}{2} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} = z$, где z — целое число, равное 1 или 2. Перенесем все, кроме последнего слагаемого, в правую часть. Получим какую-то дробь со знаменателем λ_3. Так как дроби слева и справа равны и d_i взаимно просто с λ_i, равенство возможно тогда и только тогда, когда λ_3 делит $2\lambda_2$. Аналогично можно показать, что λ_2 делит $2\lambda_3$. Следовательно,

$$2\lambda_2 = t_1\lambda_3, 2\lambda_3 = t_2\lambda_2 \Rightarrow 4\lambda_2 = t_1 t_2 \lambda_2 \Rightarrow t_1 t_2 = 4.$$

Отсюда с точностью до перенумерации получаем всего два случая: (a) $\lambda_2 = \lambda_3$ или (b) $\lambda_2 = 2\lambda_3$.

В случае (b) $n = \operatorname{lcm}(2, \lambda_3, 2\lambda_3) = 2\lambda_3 \Rightarrow n_2 = 2, n_3 = 1$. Подставив известные значения n, d_1, n_1, n_2, n_3 во второе равенство леммы 1, получим полную характеристику $(n = 4k+2, g = 0, p = k, n_1 = 2k+1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3)$, $k \in \mathbb{N}$, $\gcd(d_2, 2k+1) = \gcd(d_3, 4k+2) = 1$, $2d_2+d_3 = 2k+1$ или $2d_2+d_3 = 3(2k+1)$. Ясно, что в первом случае $2d_2 = 2k + 1 - d_3 \le 2k$, откуда $d_2 \le k$, а во втором случае $2d_2 = 6k + 3 - d_3 > 6k + 3 - (4k + 2)$, откуда $d_2 > k$. Из равенства $\gcd(d_2, 2k + 1) = 1$ следует, что $\gcd(2d_2, 2k + 1) = 1$. Действительно, если числа d_2 и $2k + 1$ взаимно просты, то тогда $\gcd(2d_2, 4k + 2) = 2$, а значит, $\gcd(2d_2, 2k + 1) = 1$, что и требовалось. Поскольку $d_3 = 2k + 1 - 2d_2$ или $d_3 = 3(2k + 1) - 2d_2$, то $\gcd(d_3, 2k + 1) = \gcd(2d_2, 2k + 1) = 1$. Учитывая, что d_3 нечетное, получаем $\gcd(d_3, 4k + 2) = 1$.

В случае (a) нужно рассмотреть два подслучая: (a1) λ_3 четное; (a2) λ_3 нечетное.

В случае (a1) $n = \operatorname{lcm}(2, \lambda_3) = \lambda_3$. Отсюда $n_2 = n_3 = 1$. Подставив известные значения n, d_1, n_1, n_2, n_3 во второе равенство леммы 1, получим полную характеристику $(n = 4k,\ g = 0,\ p = k,\ n_1 = 2k,\ n_2 = 1,\ n_3 = 1,\ d_1 = 1,\ d_2, d_3)$, $k \in \mathbb{N}$, $\gcd(d_2, 4k) = \gcd(d_3, 4k) = 1$, $d_2 + d_3 = 2k$ или $d_2 + d_3 = 6k$. Ясно, что в первом случае $d_2 < 2k$, а во втором $2k < d_2 < 4k$. Также ясно, что $\gcd(d_2, 4k) = 1$ эквивалентно $\gcd(d_2, 2k) = 1$. Действительно, если d_2 и $4k$ взаимно просты, то тем более d_2 и $2k$ взаимно просты. Если же d_2 и $2k$ взаимно просты, то отсюда следует, что d_2 обязательно нечетно, а значит, d_2 взаимно просто с $2 \cdot 2k = 4k$. Так как $d_3 = \{2, 6\}k - d_2$, то d_3 имеет такой же остаток от деления на $2k$, как и d_2. Значит, условие $\gcd(d_2, 2k) = \gcd(d_3, 2k) = 1$ можно упростить до одного соотношения $\gcd(d_2, 2k) = 1$.

В случае (a2) $n = \operatorname{lcm}(2, \lambda_3) = 2\lambda_3$. Отсюда $n_2 = n_3 = 2$. Из равенства Морса получим $\frac{-2\lambda}{2} + \frac{2\lambda}{\lambda} + \frac{2\lambda}{\lambda} = 2 - 2p$. Стало быть, $\lambda = 2p + 2$; противоречие (λ предполагалось нечетным). $\square$

На рис. 5, 6 приведены результаты численного подсчета числа периодических гомеоморфизмов, т. е. число периодических гомеоморфизмов при данном роде поверхности.

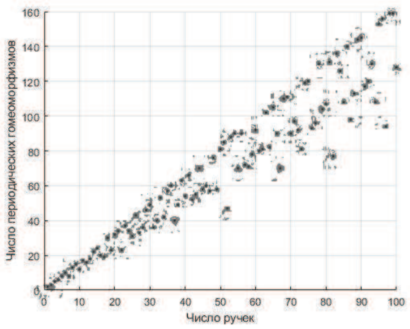

Рис. 5. Гомеоморфизмы типов (1), (2).

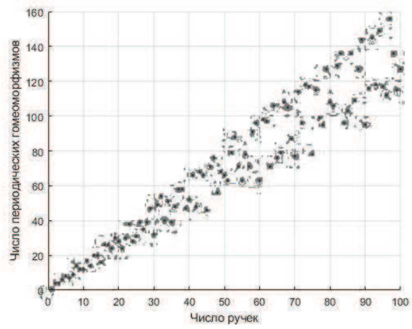

Рис. 6. Гомеоморфизмы типов (3), (4).

4. Классификация диффеоморфизмов класса G

В этом разделе докажем теорему 1. Именно, покажем, что диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\lambda_f = \lambda_{f'}$ и $\mu_f = \mu_{f'}$.

Необходимость. Если диффеоморфизмы f и f' топологически сопряжены, то существует гомеоморфизм h такой, что $f' = h \circ f \circ h^{-1}$. Поскольку сопрягающий гомеоморфизм переводит инвариантные многообразия периодических точек в аналогичные с сохранением устойчивости и периода, то $h(W^s_\omega) = W^s_{\omega'}$ и $h(W^u_{\mathscr{O}_\sigma}) = W^u_{\mathscr{O}_\sigma}$. Положим $\widehat{h} = p_f \circ h \circ p_f^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Тогда $\widehat{h}(\gamma_f) = \gamma_{f'}$. Поскольку h переводит диск $d = \psi_f^{-1}(\mathbb{D}^2)$ в диск $h(d)$ такой, что $\psi_{f'}(h(d))$ содержит начало координат, узел $\widehat{h}(L)$ имеет гомотопический тип $\langle 1, 0\rangle$ (см., например, [8]). Тогда индуцированный изоморфизм $\widehat{h}_*$ задается матрицей $\widehat{h}_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$\widehat{h}_*(\langle \lambda_f, \mu_f\rangle) = (\lambda_f, \mu_f) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \langle \lambda_f + c\mu_f, \mu_f\rangle.$$

С другой стороны,

$$\widehat{h}_*(\langle \lambda_f, \mu_f\rangle) = \langle \lambda_{f'}, \mu_{f'}\rangle.$$

Отсюда получаем, что $\mu_f = \mu_{f'}$ и $\lambda_f + c\mu_f = \lambda_{f'}$, а следовательно, $\lambda_{f'} = \lambda_f + c\mu_{f'}$. Из условия $(*)$ следует, что $\lambda_{f'} < \mu_{f'}$, а такое возможно только при $c = 0$. Таким образом, $\lambda_f = \lambda_{f'}$ и $\mu_f = \mu_{f'}$.

Достаточность. Пусть $\lambda_f = \lambda_{f'}$ и $\mu_f = \mu_{f'}$. Построим по шагам гомеоморфизм h, сопрягающий диффеоморфизмы f, f'.

Шаг 1. Построение гомеоморфизма $h_\omega : W^s_\omega \to W^s_{\omega'}$. Согласно [8] существует изотопный тождественному отображению гомеоморфизм $\widehat{h} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что $\widehat{h}(\gamma_f) = \gamma_{f'}$. В этом случае индуцированный изоморфизм $\widehat{h}_*$ является тождественным отображением и, следовательно (см., например, [9]), поднимается до гомеоморфизма $h_\omega : W^s_\omega \setminus \omega \to W^s_{\omega'} \setminus \omega'$ ($p_{f'} \circ h_\omega = \widehat{h} \circ p_f$), сопрягающего f с f' ($f' \circ h_\omega = h_\omega \circ f$) и такого, что $h_\omega(W^u_{\mathscr{O}_\sigma}) = W^u_{\mathscr{O}_{\sigma'}}$. Продолжим h_ω на W^s_ω, положив $h_\omega(\omega) = \omega'$.

Шаг 2. Модификация гомеоморфизма h_ω в окрестности $W^s_{\mathscr{O}_\sigma}$. В силу леммы 2 седловая орбита $\mathscr{O}_\sigma$ имеет отрицательный тип ориентации $\nu_\sigma = -1$, откуда следует, что период седловой сепаратрисы равен числу всех сепаратрис и, следовательно, является четным. С другой стороны, узел γ_f является пространством орбит седловых сепаратрис и тем самым период седловой сепаратрисы равен числу μ_f, а период седловой точки $m_\sigma = \frac{\mu_f}{2}$. При этом если точка x принадлежит неустойчивой сепаратрисе ℓ^1_σ седла σ, то точка $f^{m_\sigma}(x)$ принадлежит другой неустойчивой сепаратрисе ℓ^2_σ этого же седла σ. Аналогичное верно для седла σ'. Поскольку $\mu_f = \mu_{f'}$, $f' \circ h_\omega = h_\omega \circ f$ и $h_\omega(W^u_{\mathscr{O}_\sigma}) = W^u_{\mathscr{O}_{\sigma'}}$, то $h_\omega(W^u_\sigma \setminus \sigma) = W^u_{\sigma'} \setminus \sigma'$, что позволяет продолжить гомеоморфизм h_ω единственным образом на седловую орбиту $\mathscr{O}_\sigma$.

Пусть N_σ — линеаризующая окрестность седла σ. Выберем значение $t_1 \in (0,1]$ так, что $h_\omega(N^{ut_1}_\sigma) \subset N^u_{\sigma'}$. Поскольку $m_\sigma = m_{\sigma'}$ и $\nu_\sigma = \nu_{\sigma'}$, непосредственно проверяется, что отображение

$$\widetilde{h}_\omega = \mu_{\sigma'} h_\omega \mu_\sigma^{-1}|_{\mathscr{N}^{ut_1}} : \mathscr{N}^{ut_1}_1 \to \mathscr{N}^u$$

является топологическим вложением, коммутирующим с диффеоморфизмом a_{-1}, т. е. $a_{-1}\widetilde{h}_\omega = \widetilde{h}_\omega a_{-1}$. Для $\kappa \in \{-1,+1\}$ определим топологическое вложение $\widetilde{\psi}_\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой $\widetilde{\psi}_\sigma(x_1,x_2) = (\widetilde{h}_\omega(x_1), \kappa \cdot x_2)$. Выберем значение $t_2 \in (0,1)$ так, чтобы выполнялось включение $\widetilde{\psi}_\sigma(\mathscr{N}^{ut_2}) \subset \widetilde{h}_\omega(\mathscr{N}^{ut_1})$. Поскольку отображение

$$\widetilde{h}_\omega^{-1}\widetilde{\psi}_\sigma|_{Ox_1\setminus O} : Ox_1 \setminus O \to Ox_1 \setminus O$$

тождественное, не уменьшая общности будем считать, что κ выбрано так, что топологическое вложение $\theta_\sigma = \widetilde{h}_\omega^{-1}\widetilde{\psi}_\sigma|_{\mathscr{N}^{ut_2}} : \mathscr{N}^{ut_2} \to \mathscr{N}^u$ сохраняет ориентацию.

Положим

$$\widehat{\theta}_\sigma = p_{\widehat{\mathscr{N}}^u_{-1}} \theta_\sigma (p_{\widehat{\mathscr{N}}^u_{-1}}|_{\mathscr{N}^{ut_2}_{-1}})^{-1} : \widehat{\mathscr{N}}^{ut_2}_{-1} \to \widehat{\mathscr{N}}^u_{-1},$$

$$K_\sigma = \widehat{\mathscr{N}}^u_{-1} \setminus \operatorname{int}\ \widehat{\mathscr{N}}^{ut_2}_{-1}, \quad Q_\sigma = \widehat{\mathscr{N}}^u_{-1} \setminus \operatorname{int} \widehat{\theta}_\sigma(\widehat{\mathscr{N}}^{ut_2}_{-1}).$$

По построению каждая компонента связности множеств K_σ и Q_σ является кольцом. Согласно [8] существует гомеоморфизм $\widehat{\Theta}_\sigma : \widehat{\mathscr{N}}^u_{-1} \to \widehat{\mathscr{N}}^u_{-1}$, совпадающий с $\widehat{\theta}_\sigma$ на $\widehat{\mathscr{N}}^{ut_2}_{-1}$ и тождественный на $\partial\widehat{\mathscr{N}}^u_{-1}$. Обозначим через $\widetilde{\Theta}_\sigma : \mathscr{N}^u \to \mathscr{N}^u$ поднятие гомеоморфизма $\widehat{\Theta}_\sigma$, являющееся тождественным отображением на $\partial\mathscr{N}$. Определим гомеоморфизм $\Theta_\sigma : N_\sigma \to h_\omega(N_\sigma)$ формулой

$$\Theta_\sigma(x) = \begin{cases} h_\omega(\mu_\sigma^{-1}(\widetilde{\Theta}_\sigma(\mu_\sigma(x)))), & x \in N^u_\sigma, \\ \mu_{\sigma'}^{-1}(\widetilde{\psi}_\sigma(\mu_\sigma(x))), & x \in W^s_\sigma. \end{cases}$$

Определим гомеоморфизм $\Theta : N_{\mathscr{O}_\sigma} \to h_\omega(N_{\mathscr{O}_\sigma})$ формулой

$$\Theta(x) = {f'}^k(\Theta_\sigma(f^{-k}(x))),$$

где $k \in \mathbb{Z}$ выбрано так, что $f^{-k}(x) \in N_\sigma$.

Шаг 3. Определим гомеоморфизм $h : S_p \setminus \mathscr{O}_\alpha \to S_p \setminus \mathscr{O}_{\alpha'}$ формулой

$$h(x) = \begin{cases} h_\omega(x), & x \in S_p \setminus (N_{\mathscr{O}_\sigma} \cup \mathscr{O}_\alpha), \\ \Theta(x), & x \in N_{\mathscr{O}_\sigma} \end{cases}$$

и продолжим его по непрерывности на множество $\mathscr{O}_\alpha$, поставив в соответствие точке $\alpha \in \mathscr{O}_\alpha$ точку $\alpha' \in \mathscr{O}_{\alpha'}$ такую, что $h(W^u_\alpha \setminus (\alpha)) = W^u_{\alpha'} \setminus \alpha'$. Тогда h — искомый гомеоморфизм.

5. Связь рода несущей поверхности с гомотопическим типом узла γ_f

В этом разделе докажем теорему 2.

Доказательство. Диффеоморфизм f имеет гомотопичесикй тип (λ_f, μ_f). Тогда согласно утверждению 3.3 период n диффеоморфизма f равен μ_f. Воспользуемся леммой 3. Там сказано, что $n = 4p$ или $n = 4p + 2$, т. е. $\mu_f = 4p$ или $\mu_f = 4p + 2$. Отсюда следует, что

$$p = \frac{\mu_f}{4}, \text{ если } \mu_f = 0 \pmod 4; \quad p = \frac{\mu_f - 2}{4}, \text{ если } \mu_f = 2 \pmod 4.$$

Так как число градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхности будет равно числу периодических гомеоморморфизмов [2, теорема 3.2], опять же обращаясь к лемме 3 можно сделать вывод, что их количество N_p можно вычислить по формуле

$$N_p = \varphi(4p) + \varphi(4p + 2),$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Medvedev T., Nozdrinova E., Pochinka O.* On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit // Topology Proc. 2019. V. 54. P. 49–68.
2. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical systems on 2- and 3-manifolds. Switzerland: Springer, 2016.
3. *Nielsen J.* Die Structur periodischer Transformationen von FlaAchen // Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 1937. Bd 15. English translation: Collected Papers 2, Birkhäuser, 1986.
4. *Баранов Д. А,, Починка О. В.* Классификация периодических преобразований ориентируемой поверхности рода два // Журн. Средневолжского мат. о-ва. 2021. Т. 23, № 2. С. 147–158.
5. *Wang Sh.* Maximum orders of periodic maps on closed surfaces // Topology Appl. 1991. V. 41. P. 255–262.
6. *Починка О. В., Гринес В., Капкаева С.* Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей. // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 10. С. 19–46.
7. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 6. P. 747–817.
8. *Rolfsen D.* Knots and links. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003.
9. *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 30 марта 2022 г.
После доработки 14 июля 2022 г.
Принята к публикации 15 августа 2022 г.

Баранов Денис Алексеевич
НИУ ВШЭ,
ул. Б. Печерская, 25/12, Нижний Новгород 603150
denbaranov0066@gmail.com

Косолапов Егор Сергеевич
СПБГУ Петра Великого,
ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург 194021
egor-kosolapov@bk.ru

Починка Ольга Витальевна (ORCID 0000-0002-6587-5305)
НИУ ВШЭ,
ул. Б. Печерская, 25/12, Нижний Новгород 603150
olga-pochinka@yandex.ru