

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. A. Kochengin, A point source of  $SH$  waves in the medium with a vertical boundary in the case of smooth increasing velocity of wave's propagation with the depth, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1994, Volume 218, 44–55

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

February 19, 2025, 05:15:59



С. А. Коченгин

## ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК SH ВОЛН В СРЕДЕ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ В СЛУЧАЕ ГЛАДКОГО РОСТА СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН С ГЛУБИНОЙ

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим в полуплоскости  $\{y \leq 0\}$  точечный источник SH волн. Распространение этих волн описывается уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \omega^2 \rho u = -\delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (1)$$

Мы предполагаем, что  $\mu(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$ ,  $\rho(x, y) = \alpha(x)\beta(y)(g(x) + d(y))$ ,

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{при } x < 0, \\ \alpha_2, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} g_1, & \text{при } x < 0, \\ g_2, & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

$\beta(y), d(y) \in C^\infty(-\infty, 0)$ .

Скорость распространения SH волн в среде равна:

$$v = \sqrt{\mu/\rho} = (g(x) + d(y))^{-\frac{1}{2}}.$$

Условие ее роста с глубиной можно записать в виде:

$$d'(y) > 0. \quad (2)$$

Дополнительно предполагается, что существуют конечные пределы:  $\lim_{y \rightarrow -\infty} d(y) = d_0$ ,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \beta(y) = \beta_0$ . Потребуем, чтобы решение уравнения (1) удовлетворяло условиям (3):

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad u(-0, y) = u(+0, y), \quad \mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-0} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=+0}, \quad (3)$$

и принципу предельного поглощения.

В работе строится формальное решение данной задачи и вычисляется его асимптотика, при  $\omega \rightarrow +\infty$ .

Известно, что, вообще говоря, при падении волн на "угол" возникают волны, расходящиеся от его вершины. Однако, этого явления может и не быть (см., например, [1]). В данном случае тоже не возникает волн, расходящихся от точки  $(0, 0)$ .

Распространение  $SH$  волн в среде сходной с нашей рассматривалось также в работе [2].

Автор выражает глубокую благодарность В. М. Бабичу за постановку задачи и ценные указания в процессе ее решения.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \omega^2 (g(x) + d(y)) u = \\ = - \frac{\delta(x - x_0)}{\alpha(x_0)} \cdot \frac{\delta(y - y_0)}{\beta(y_0)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем оператор  $H(\cdot) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \right) + \omega^2 g(x) (\cdot)$ . Будем говорить, что  $X$  – собственная функция этого оператора, если она является решением задачи:

$$\begin{aligned} (H + \lambda \omega^2) X = 0, \\ X(-0) = X(+0), \quad \alpha_1 X'(-0) = \alpha_2 X'(+0), \quad |X(\pm\infty)| < +\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко видеть, что вещественным  $\lambda > -g_2$  соответствуют собственные функции:

$$X_- = \begin{cases} e^{-i\omega r_1 x}, & \text{при } x < 0 \\ C_1 e^{-i\omega r_2 x} + C_2 e^{i\omega r_2 x}, & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $C_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_1 r_1}{\alpha_2 r_2} \right)$ ,  $C_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha_1 r_1}{\alpha_2 r_2} \right)$ ,  $r_j = \sqrt{g_j + \lambda}$ ,  $j = 1, 2$ . Кроме них есть собственные функции:

$$\begin{aligned} X_+ = \begin{cases} C_1^+ e^{-i\omega r_1 x} + C_2^+ e^{i\omega r_1 x}, & \text{при } x < 0 \\ e^{i\omega r_2 x} & \text{при } x > 0, \end{cases} \\ C_1^+ = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha_2 r_2}{\alpha_1 r_1} \right), \quad C_2^+ = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_2 r_2}{\alpha_1 r_1} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

которые соответствуют собственным числам  $\lambda > -g_1$ .

Несложные, но громоздкие вычисления показывают, что любая из собственных функций  $X_\lambda(x)$  ортогональна всем остальным в не-

котором смысле. Точнее:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \alpha \bar{X}_{\lambda_1}^{\pm} X_{\lambda_2}^{\mp} dx = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \alpha \bar{X}_{\lambda_1}^{\mp} X_{\lambda_2}^{\mp} dx = \pi \theta_{\lambda_1}^{\mp} \delta(\lambda_2 - \lambda_1),$$
(8)

где

$$\theta_{\lambda}^{\mp} = \begin{cases} \frac{(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)^2}{\omega \theta_{\lambda}^{\mp}}, & \text{при } \lambda > \max(-g_1, -g_2) \\ \frac{|(\alpha_1 r_1)^2 - (\alpha_2 r_2)^2|}{\omega \theta_{\lambda}^{\mp}}, & \text{при } \lambda \in (\min(-g_1, -g_2), \max(-g_1, -g_2)). \end{cases}$$

$\theta_1^- = \alpha_2 r_2$ , если  $X_{\lambda_1}$  и  $X_{\lambda_2}$  задаются формулой (6) и  $\theta_1^+ = \alpha_1 r_1$ , в случае, когда  $X_{\lambda_1}$  и  $X_{\lambda_2}$  заданы формулой (7). Пределы (8) понимаются в смысле распределений.

Введем класс функций  $M = \{f \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}), f \in L_1, f'' \in L_1, [f]_{x=0} = 0, [\alpha f']_{x=0} = 0\}$ , где  $[f]_{x=0} = f(-0) - f(+0)$ . Для любой функции  $f$  из  $M$  определим:

$$\hat{f}_+(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f X_+ d\zeta, \quad \hat{f}_-(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f X_- d\zeta.$$

С помощью методов, описанных, например, в [3], получается формула обращения:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-g_1}^{+\infty} (\theta_{\lambda}^+)^{-1} \bar{X}_+(x) \hat{f}_+(\lambda) d\lambda + \int_{-g_2}^{+\infty} (\theta_{\lambda}^-)^{-1} \bar{X}_-(x) \hat{f}_-(\lambda) d\lambda \right). \quad (9)$$

Формула (9) легко обобщается на довольно широкий класс распределений (см., например, [4]).

Используя (8), (9), решение задачи (1), (3) можно представить в виде:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \times \left( \int_{-g_1}^{+\infty} (\theta_{\lambda}^+)^{-1} \bar{X}_+(x) X_+(x_0) G_{\lambda}(y, y_0) d\lambda + \int_{-g_2}^{+\infty} (\theta_{\lambda}^-)^{-1} \bar{X}_-(x) X_-(x_0) G_{\lambda}(y, y_0) d\lambda \right). \quad (10)$$

где  $G_\lambda(y, y_0)$  – решение задачи

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta \frac{\partial G}{\partial y} \right) + \omega^2(d(y) - \lambda)G = -\frac{\delta(y - y_0)}{\beta(y_0)}, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial G_\lambda(y, y_0)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (12)$$

удовлетворяющее принципу предельного поглощения при  $y \rightarrow -\infty$ . Как известно,  $G_\lambda(y, y_0)$  имеет вид:

$$G_\lambda(y, y_0) = -\frac{Y_-(y_<)Y_+(y_>)}{\beta W}, \quad (13)$$

где  $y_< = \min(y, y_0)$ ,  $y_> = \max(y, y_0)$ ,  $Y_-$ ,  $Y_+$  – решение однородного уравнения (11),  $Y_+$  – удовлетворяет (12),  $Y_-$  – принципу предельного поглощения на  $-\infty$ , а  $\beta W = (Y_- Y'_+ - Y'_- Y_+)\beta$ .

Из (10), сделав преобразование Ватсона (см., например, [5]), получаем:

$$u(x, y) = \frac{\omega}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_\lambda(x, x_0) G_\lambda(y, y_0) d\lambda \quad (14)$$

где  $\mathcal{H}_\lambda(x, x_0)$  – функция Грина оператора  $(H + \omega^2 \lambda)$  имеет вид:

$$\mathcal{H}_\lambda(x, x_0) = \begin{cases} \frac{i(\alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2)}{2\alpha_1 r_1(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)} e^{-i\omega r_1(x+x_0)} + \\ + \frac{i}{2\alpha_1 r_1} e^{i\omega r_1|x-x_0|}, & \text{при } x, x_0 < 0 \\ \frac{i}{(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)} \cdot e^{i\omega(r_2 x_0 - r_1 x)}, & \text{при } x_< < 0, x_> > 0. \\ \frac{i}{2\alpha_2 r_2} e^{i\omega r_2|x-x_0|} + \\ + \frac{i(\alpha_2 r_2 - \alpha_1 r_1)}{2\alpha_2 r_2(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)} e^{i\omega r_2(x+x_0)}, & \text{при } x, x_0 > 0. \end{cases} \quad (15)$$

Разрезы из точек  $-g_1, -g_2$  проведены “вниз”, в полуплоскость  $\text{Im } \lambda < 0$ .

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИКИ $u(x, y)$ ПРИ $\omega \rightarrow +\infty$ .

Формальное асимптотическое разложение функций  $Y_-(y)$ ,  $Y_+(y)$  находится лучевым методом (см., например, [6]). Пусть, сначала, параметр  $\lambda$  не принадлежит промежутку  $(d_0, d(0))$ . Для  $Y_-(y)$  имеем:

$$Y_-(y) = e^{i\omega r(y)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_j(y)}{(-i\omega)^j}, \quad (16)$$

где

$$\tau(y) = \int_y^0 \sqrt{d-\lambda}, \quad a_0(y) = \frac{1}{\sqrt[4]{d(y)-\lambda}\sqrt{\beta(y)}},$$

$$a_{j+1}(y) = \frac{1}{\sqrt[4]{d(y)-\lambda}\sqrt{\beta(y)}} \cdot \int_y^0 \frac{(\beta a_j')'}{2\sqrt[4]{d-\lambda}\sqrt{\beta}} dy, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Для  $Y_+(y)$  получаем:

$$Y_+(y) = e^{-i\omega\tau(y)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_j^i(y)}{(i\omega)^j} + e^{i\omega\tau(y)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_j(y)}{(-i\omega)^j}, \quad (17)$$

где

$$a_0^i = a_0, \quad \left( \sqrt{\beta} \sqrt[4]{d-\lambda} a_{j+1}^i \right)' = \frac{-(\beta a_j^i)'}{2\sqrt[4]{d-\lambda}\sqrt{\beta}},$$

$$a_{j+1}^j(0) = -\frac{a_j'(0) + (-1)^j (a_j^i(0))'}{\sqrt{d(0)-\lambda}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Используя (16), (17), вронскиан  $\beta W$  можно записать в виде:

$$\beta W = \beta(0) \left( i\omega \sqrt{d(0)-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_j(0)}{(-i\omega)^j} - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_j^i(0)}{(-i\omega)^j} \right) \times$$

$$\times \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_j^i(0)}{(i\omega)^j} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_j(0)}{(-i\omega)^j} \right). \quad (18)$$

Подставляя (16), (17) и (18) в формулу (13), получаем:

$$G_\lambda(y, y_0) = \frac{1}{\omega} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{C_j^1(y, y_0)}{\omega^j} e^{i\omega \int_{y_0}^y \sqrt{d-\lambda}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{C_j^2(y, y_0)}{\omega^j} e^{i\omega \left( \int_{y_0}^0 \sqrt{d-\lambda} + \int_y^0 \sqrt{d-\lambda} \right)} \right). \quad (19)$$

Коэффициенты  $C_j^1(y, y_0)$ ,  $C_j^2(y, y_0)$  не зависят от  $\omega$ .

В силу того, что  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \sqrt{d(y)-d_0} = 0$ , формулы (16), (17), (18) и (19) дают плохое приближение, если  $\lambda$  близко к  $d_0$ , а  $y$  или  $y_0$  велики по модулю.

Пусть теперь параметр  $\lambda$  принадлежит промежутку  $(d_0, d(0))$  и  $d(y_1) = \lambda$ . В этом случае асимптотику  $Y_-, Y_+$  можно искать в следующем виде:

$$Y_+(y) = \omega^{\frac{1}{3}} \left[ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j^1(y)}{(i\omega)^j} w_1(-\omega^{2/3}r(y)) + \right. \\ \left. + \omega^{-\frac{4}{3}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B_j^1(y)}{(i\omega)^j} w_1'(-\omega^{2/3}r(y)) + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j^2(y)}{(i\omega)^j} w_2(-\omega^{2/3}r(y)) + \right. \\ \left. + \omega^{-\frac{4}{3}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B_j^2(y)}{(i\omega)^j} w_2'(-\omega^{2/3}r(y)) \right], \quad (20)$$

$$Y_-(y) = \omega^{\frac{1}{3}} \left[ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j^1(y)}{(i\omega)^j} v(-\omega^{2/3}r(y)) + \omega^{-\frac{4}{3}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B_j^1(y)}{(i\omega)^j} v'(-\omega^{2/3}r(y)) \right], \\ r(y) = \left( \frac{2}{3} \int_{y_1}^y \sqrt{d-\lambda} \right)^{2/3} \quad (21)$$

Здесь  $w_1, w_2, v$  — известные решения уравнения Эйри (см., например, [6]). Подставляя (20), (21) в однородное уравнение (11) и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$ , получаем:

$$\left( \sqrt{\beta r'} A_0^k \right)' = 0, \quad \left( \sqrt{\beta r'} A_{j+1}^k \right)' = -\frac{(\beta(B_j^k)')'}{2\sqrt{\beta r'}}, \quad (22)$$

$$B_j^k = -\frac{1}{\sqrt{\beta r r'}} \cdot \int_{y_1}^y \frac{(\beta(A_j^k)')'}{2\sqrt{\beta r' r}}, \quad k = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Для того, чтобы найти  $A_j^k$ , выпишем асимптотику (20) при  $y > y_1, \omega \rightarrow +\infty$  и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$  в полученном выражении и в формуле (17). Легко видеть, что

$$A_j^k = D_j^k e^{(-1)^k i\omega\tau(y_1)}, \quad B_j^k = E_j^k \cdot e^{(-1)^k i\omega\tau(y_1)}, \quad (24)$$

где  $D_j^k, E_j^k$  не зависят от  $\omega$ .

Для вронскиана  $\beta W$  получаем следующее выражение:

$$\beta W = -\beta(0)Y_+(0)\omega^{\frac{1}{3}} \times \\ \times \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A_j^1(0) - B_j^1(0)rr'}{(i\omega)^j} \cdot v + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{-A_j^1 r' \omega^{\frac{2}{3}} + \omega^{-\frac{4}{3}} B_j^1}{(i\omega)^j} v' \right). \quad (25)$$

Заменяя в (25)  $v$  и  $v'$  их асимптотикой и используя (24), получаем:

$$(\beta W)^{-1} = \frac{e^{2i\omega\tau(y_1)}}{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{F_j^1}{\omega^{j-1}} \left( 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{F_j^2}{\omega^j} \cdot e^{2i\omega\tau(y_1)} \right)} \quad (26)$$

Константы  $F_j^1, F_j^2$  не зависят от  $\omega$ . Подставим в (13) выражения (20), (21), (26), заменим функции Эйри  $w_1$  и  $w_2$  их асимптотикой и разложим знаменатель в ряд по формуле суммы геометрической прогрессии. В результате получим:

$$\begin{aligned} G_\lambda(y, y_0) = & \omega^{\frac{1}{6}} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{D_j^1(y_2)}{(i\omega)^j} v(y_<) + \omega^{-\frac{4}{3}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{E_j^1(y_<)}{(i\omega)^j} \cdot v'(y_<) \right) \times \\ & \times e^{i\omega\tau(y_1)} \cdot \frac{1}{\omega} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{G_j^1(y_>)}{\omega^j} \cdot e^{i\omega \left( \int_{y_1}^{y_>} \sqrt{d-\lambda} - \tau(y_1) \right)} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{G_j^2(y_>)}{\omega^j} \cdot e^{i\omega \left( \int_{y_>}^0 \sqrt{d-\lambda} \right)} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{G_n^3}{\omega^n} \cdot e^{2in\omega\tau(y_1)} \quad (27) \end{aligned}$$

Здесь  $D_j^1, E_j^1$  даются формулами (24), а ряды  $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{G_j^k}{\omega^j}$ ,  $k = 1, 2, 3$  возникают при перемножении и делении рядов по обратным степеням  $\omega$  в формулах (20), (26).  $G_j^k$  не зависят от  $\omega$ . После замены  $v$  и  $v'$  на их асимптотику формула (27) принимает вид:

$$G_\lambda(y, y_0) = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{H_j^{n,k}(y, y_0)}{\omega^{j+n}} e^{i\omega(\varphi_k + 2n\tau(y_1))}. \quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_{y_<}^{y_>} \sqrt{d-\lambda}, & \varphi_2 &= \int_{y_1}^{y_0} \sqrt{d-\lambda} + \int_{y_1}^y \sqrt{d-\lambda}, \\ \varphi_3 &= \int_{y_0}^0 \sqrt{d-\lambda} + \int_y^0 \sqrt{d-\lambda}, \\ \varphi_4 &= \int_{y_1}^{y_<} \sqrt{d-\lambda} + \int_{y_1}^0 \sqrt{d-\lambda} + \int_{y_>}^0 \sqrt{d-\lambda}, \end{aligned}$$



а функции  $H_j^{n,k}(y, y_0)$  не зависят от  $\omega$ . Определим функцию:

$$\theta_k(\lambda, x, x_0) = \begin{cases} -r_1(x + x_0), & \text{при } k = 1 \\ r_1|x - x_0|, & \text{при } k = 2 \\ r_2x > -r_1x <, & \text{при } k = 3 \\ r_2|x - x_0|, & \text{при } k = 4 \\ r_2(x + x_0), & \text{при } k = 5. \end{cases}$$

Из (15), (19) следует, что при отсутствии точки поворота асимптотика подынтегрального выражения в формуле (14) является суммой 2-х или 4-х слагаемых вида:

$$\frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{I_j^{k,n}(x, x_0, y, y_0)}{\omega^j} e^{i\omega(\varphi_k + \theta_n)}. \quad (29)$$

Здесь  $k = 1, 3$ , а параметр  $n$  может принимать значения либо 1, 2, либо 3, либо 4, 5.

При наличии точки поворота из (15), (28) следует, что асимптотика подынтегрального выражения в (14) имеет вид:

$$\frac{1}{\omega} \sum_{l=l_0}^{l_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^4 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{J_{j,l}^{n,k}(x, x_0, y, y_0)}{\omega^{j+n}} e^{i\omega(\varphi_k + \theta_l + 2n\tau(y_1))} \quad (30)$$

Здесь  $l_0, l_1$  задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} l_0 = 1, l_1 = 2, & \quad \text{при } x, x_0 < 0 \\ l_0 = 3, l_1 = 3, & \quad \text{при } x < 0, x_0 > 0 \\ l_0 = 4, l_1 = 5, & \quad \text{при } x, x_0 > 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Вычислим теперь асимптотику интеграла (14). Обозначим  $M = \max(g_1, g_2)$ ,  $m = \min(g_1, g_2)$ . Фиксируем точки  $(x, y)$ ,  $(x_0, y_0)$  и соединим их лучами. Легко показать (см., например, [1]), что каждому лучу соответствует стационарная точка для фазовой функции  $\varphi_k + \theta_i + 2n\tau(y_1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k = 1, \dots, 4$ ;  $i = 1, \dots, 5$ . Пусть  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l(x, x_0, y, y_0)$ ) — стационарные точки, занумерованные в порядке возрастания.

Рассмотрим случай  $\lambda_1 > m$ . Выберем произвольную точку  $m_1$  такую, что  $m < m_1 < \lambda_1$ . Продеформируем контур в гладкую кривую  $\gamma$ , изображенную на рисунке 1.

Здесь  $\varepsilon$  — достаточно малое число. Из явного выражения для  $\varphi_k + \theta_j$  и того, что  $m_1 < \lambda_1$  следует, что на ветви контура  $\gamma$ , лежащей в верхней полуплоскости ( $\text{Im } \lambda > 0$ ) выполняется неравенство  $\text{Re}(i(\varphi_k + \theta_j)) < 0$ . Аналогичное неравенство верно для всех  $\lambda > d(y_0)$ .

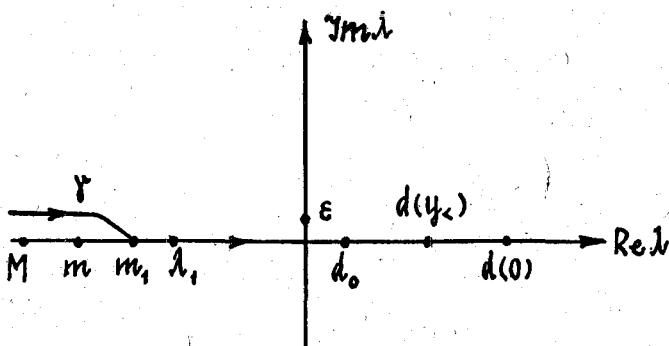


Рис. 1.

Если  $\lambda_1 < m$  то точку  $m_1$  берем на промежутке  $(M, \lambda_1)$ . В этом случае возникает вклад в асимптотику от точки  $m$ , который соответствует головной волне.

Рассмотрим различные случаи расположения точек  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$ . Пусть, сначала, они расположены так, что соединяющие их лучи не имеют точек поворота, и не возникает головной волны (см. рис. 2).

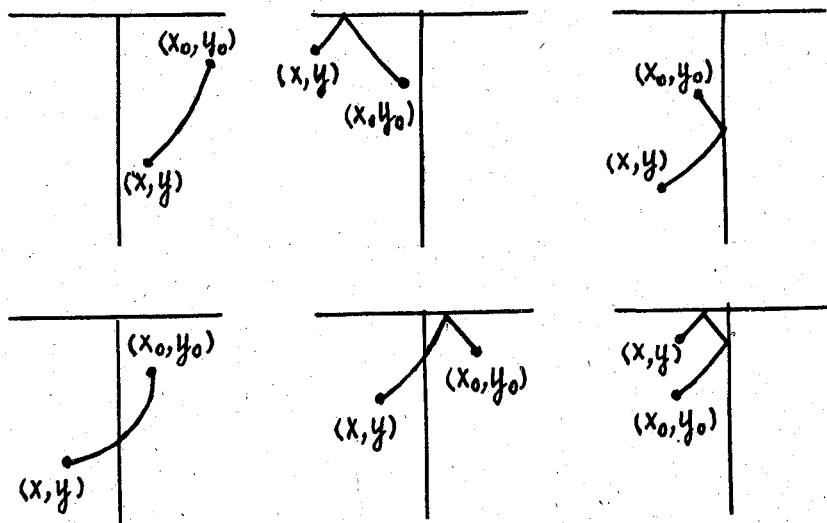


Рис. 2.

В этом случае, соответствующие стационарные точки принадлежат промежутку  $(m, d_0)$ . Фиксируем точки  $m_2, m_3$  такие, что

$\lambda_1 < m_2 < d_0, d(0) < m_3$ . На промежутке  $(m_2, m_3)$  гладко деформируем контур так, как показано на рисунке 3.

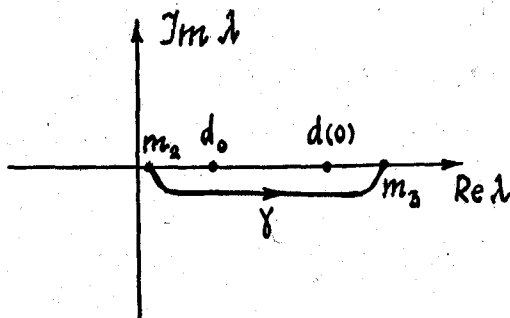


Рис. 3.

Легко видеть, что при  $m_2 < \text{Re } \lambda < m_3$  выполняется неравенство  $\text{Re}(i(\varphi_j + \theta_k)) < 0$ . Асимптотику интеграла по промежутку  $(m_1, m_2)$  от каждого из слагаемых в формуле (29) вычислим методом стационарной фазы. Точки  $m_1, m_2$  не дают вклада в асимптотику в силу гладкости  $\gamma$ . Вклад от стационарной точки  $\tilde{\lambda}$  имеет вид:

$$\omega^{-j} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_{j,m}^{k,n}}{\omega^m} e^{i\omega(\varphi_k(\tilde{\lambda}) + \theta_n(\tilde{\lambda}))}. \quad (32)$$

Пусть теперь  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$  расположены так, что для стационарных точек выполняются неравенства:  $m < \lambda_j < d(y_<)$ ,  $\lambda_j \neq d_0$ . Асимптотику интеграла (14) по промежутку  $(m_1, d(y_<))$  вычислим методом стационарной фазы. При интегрировании по промежутку  $(m, d_0)$  будем использовать (29). Пусть  $\tilde{\lambda}$  – стационарная точка для какого-нибудь слагаемого из (29), принадлежащая этому промежутку. В этом случае вклад в асимптотику от интеграла от этого слагаемого по малой окрестности  $\tilde{\lambda}$  дается формулой (32). При интегрировании по промежутку  $(d_0, d(y_<))$  используем (30). Пусть  $\tilde{\lambda}$  – стационарная точка для  $J_{j,l}^{n,k}$ , принадлежащая этому промежутку. Тогда асимптотика от интеграла от  $J_{j,l}^{n,k}$  по малой окрестности  $\tilde{\lambda}$  имеет вид:

$$\omega^{-n-j} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_{j,l,m}^{n,k}(x, x_0, y, y_0)}{\omega^m} e^{i\omega(\varphi_k(\tilde{\lambda}) + \theta_l(\tilde{\lambda}) + 2n\tau(y_1))}. \quad (33)$$

Некоторые лучи, соответствующие стационарным точкам  $\tilde{\lambda}$ , принадлежащим промежутку  $(d_0, d(y_<))$ , изображены на рисунке 4.

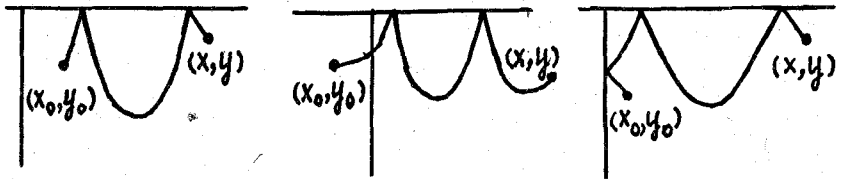


Рис. 4.

В случае, если стационарная точка  $\tilde{\lambda}$  оказывается равна  $d(y_<)$  приходится воспользоваться приемом, впервые примененном Дональдсом Людвигом. Заменяем в (27)  $v$  и  $v'$  на их интегральное представление (см., например, [6]):

$$v(-\omega^{2/3}r(y)) = \frac{\omega^{1/3}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(\frac{\zeta^3}{3} - r(y)\zeta)} d\zeta, \quad (34)$$

$$v'(-\omega^{2/3}r(y)) = \frac{i\omega^{2/3}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta e^{i\omega(\frac{\zeta^3}{3} - r(y)\zeta)} d\zeta.$$

Умножим подынтегральное выражение в (14) на гладкую функцию, равную 1 в  $\epsilon/2$  окрестности точки  $d(y_<)$  и равную 0 вне  $\epsilon$  окрестности этой точки. Используя (15), (27) и (34) получим двойной интеграл по переменным  $\lambda, \zeta$ . Подынтегральное выражение примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \sum_{l=l_0}^{l_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{K_{j,l}^{n,k}(x, x_0, y, y_0)}{\omega^{j+n}} e^{i\omega\psi_k^{n,l}}. \quad (35)$$

Здесь

$$\psi_1^{n,l} = \theta_l + 2n\tau(y_1) + \int_{y_1}^{y_>} \sqrt{d-\lambda} + \frac{\zeta^3}{3} - r(y_<)\zeta,$$

$$\psi_2^{n,l} = \theta_l + (2n+1)\tau(y_1) + \int_{y_<}^0 \sqrt{d-\lambda} + \frac{\zeta^3}{3} - r(y_<)\zeta,$$

а  $l_0, l_1$  даются формулами (31). Стационарная точка  $\nabla\psi_k^{n,l} = 0$  в данном случае имеет вид:  $(\lambda, \zeta) = (d(y_<), 0)$ . Так как гессиан  $\psi_k^{n,l}$

равен  $-(r(y_<)'_\lambda)^2 \neq 0$ , асимптотика интеграла от каждого слагаемого в формуле (35) может быть вычислена методом стационарной фазы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16148).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коченгин С. А., *Задача о точечном источнике волн SH в случае деления переменных*. — Зап. Научн. Семина. ПОМИ 210 (1994), 125–145.
2. Бабич В. М., *Случай точной интегрируемости уравнения для волн SH*. — Зап. Научн. Семина. ЛОМИ 203 (1992), 12–16.
3. Бабич В. М., Григорьева Н. С., *Ортогональные разложения и метод Фурье*. Л, 1983.
4. Коченгин С. А., *Оправдание построения решения задачи о точечном источнике SH волн в слоистой среде с вертикальной границей*. В наст. сборнике.
5. Титчмарш Э. Ч., *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*. т. 2, М, 1961.
6. Бабич В. М., Булдырев В. С., *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. М, 1972.

Kochengin S. A. A point source of SH waves in the medium with a vertical boundary in the case of smooth increasing velocity of wave's propagation with the depth.

The solution of the equation for SH waves is constructed by the separation of variables method. Here  $\alpha(x)$ ,  $g(x)$  are step functions,  $\beta(y)$ ,  $d(y) \in C^\infty$ ,  $d' > 0$ . Its asymptotic expansion, as  $\omega \rightarrow +\infty$  is found.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 апреля 1994 г.