P. P. Tammela, On the theory of the reduction of positive quadratic forms. Abnormality of the partition of the positivity cone into the Minkowski ($n \geqslant 7$) and Barns–Cohn reduction regions ($n = 4$)., *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1986, Volume 151, 125–134

П.П.Таммела

К ТЕОРИИ ПРИВЕДЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ. НЕНОРМАЛЬНОСТЬ РАЗБИЕНИЙ КОНУСА ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ НА ОБЛАСТИ ПРИВЕДЕНИЯ МИНКОВСКОГО ($n \geqslant 7$) И БАРНСА-КОНА ($n=4$)

§ I. Введение

Пусть $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ – положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами a_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$, $a_{ji}=a_{ij}$. В $N=\frac{1}{2}n(n+1)$-мерном пространстве коэффициентов $(a_{11},\dots, a_{nn}, a_{12},\dots,a_{n-1,n})$ множеству положительно определенных квадратичных форм соответствует конус положительности $\mathfrak{R}$. Говорят, что форма f приведена по Минковскому [I3], если для любого набора целых чисел $l_1,\dots,l_n$ из условия о.н.д. $(l_1,\dots,l_n)=1$ следует, что

$$f(l_1,\dots,l_n) \geqslant a_{ii}\,. \tag{I}$$

Множество всех приведенных по Минковскому форм в $\mathfrak{R}$ будем называть классической областью приведения Минковского, а ее подмножество с дополнительным условием

$$a_{i,i+1} \geqslant 0 \qquad (i=1,\dots,n-1) \tag{2}$$

– однократной областью приведения Минковского. Области приведения Минковского (классическая и однократная) являются выпуклыми гоноэдрами с конечным числом плоских граней в конусе положительности $\mathfrak{R}$ (см. [I3]).

Для $n \leqslant 6$ найдены [I3, 5,6,9] все независимые неравенства (I), а для $n=7$ указан [I0] конечный набор неравенств (I), содержащих все независимые неравенства, определяющие и классическую и однократную область приведения Минковского.

Говорят, что положительно определенная кватернарная квадратичная форма f приведена по Барнсу-Кону [I2], если она представима в виде линейной комбинации с неотрицательными вещественными коэффициентами квадратичных форм

$$x_1^2+x_2^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_4^2,\ (x_1-x_3)^2,\ (x_1-x_4)^2,\ (x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2,$$
$$(x_2-x_4)^2,\ x_3^2+x_4^2+(x_3-x_4)^2,\ \omega_0(x)=\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2 \ (\text{где } x_0=0),$$
$$\omega_1(x)=4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4),$$
$$\alpha(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+$$
$$+(x_1+x_2-x_3-x_4)^2.$$

Барнс и Кон показали, что построенная область является фундаментальной областью кватернарных квадратичных форм и что эта область имеет 26 плоских граней.

Пусть $G=GL(n,\mathbb{Z})$ - группа целых унимодулярных матриц порядка n. Рассмотрим множество областей, эквивалентных любой из построенных областей приведения квадратичных форм. Множество таких областей покрывают весь конус $\mathfrak{F}$ и различные области не имеют общих внутренних точек. Заметим, что из рассматриваемых областей приведения только для классической области Минковского эквивалентные области могут полностью совпадать друг с другом, другие области фундаментальны и такого быть не может. Множество эквивалентных областей образует разбиение конуса положительности.

Согласно Б.Н.Делоне [4] мы называем разбиение конуса положительности $\mathfrak{F}$ нормальным, если по любой целой $(N-1)$-мерной грани любого N-мерного элемента разбиения, этот элемент соприкасается только одним элементом разбиения. В противном случае разбиение называется ненормальным.

Многие известные разбиения конуса положительности являются нормальными - разбиения на области совершенных форм, на области типов [2,3], на области приведения Венкова [1], на области $\mathcal{M}$ [8], на области C-предтипа и C-типа [7].

Ранее автором [9] (см.также [11]) было доказано, что при $n \geqslant 3$ ненормальным является разбиение на области, эквивалентные однократной области приведения Минковского. Здесь мы докажем следующие два предложения.

ТЕОРЕМА I. Разбиение конуса положительных квадратичных форм на области, эквивалентные классической области приведения Минковского, при $n \geqslant 7$ ненормально.

ТЕОРЕМА 2. Разбиение конуса положительных кватернарных квадратичных форм на области, эквивалентные области приведения Барнса - Кона, ненормально.

Так как области приведения Венкова дают нормальное разбиение конуса, то по теоремам I и 2 классическая область приведения Минковского при $n \geqslant 7$ и область приведения Барнса - Кона не являются областями приведения Венкова. Классическая область приведения Минковского при $n \leqslant 6$ дает нормальное разбиение конуса положительности [5,6,9] и являются областями приведения Венкова.

Доказательство того, что классическая область приведения Минковского при $n \geqslant 7$ не является областью приведения Венкова, было ранее дано С.С.Рышковым [6], но из его доказательства не следует, что соответствующее разбиение является ненормальным.

Приношу благодарность А.В.Малышеву за внимание к работе.

§ 2. Доказательство теоремы I

I°. Пусть $\mathfrak{G}$ – классическая область приведения Минковского. Для доказательства теоремы I достаточно указать $(N-1)$**–мерную замкнутую грань** $\mathfrak{h}$ области $\mathfrak{G}$, две квадратичные формы f_1 и f_2 и целую унимодулярную матрицу S с условиями: I) f_1 лежит внутри $\mathfrak{h}$, 2) $f_2 \in \mathfrak{h}$; 3) $f_1 S = g_1$ лежит внутри $\mathfrak{h}$; 4) $f_2 S = g_2 \notin \mathfrak{G}$. Ибо тогда области $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}S$ соприкасаются по внутренним точкам грани $\mathfrak{h}$, но $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}S \neq \mathfrak{h}$. Здесь обозначено: $(fS)(x) = f(Sx)$, $\mathfrak{G}S = \{f' = fS \mid f \in \mathfrak{G}\}$.

Докажем, что в качестве $\mathfrak{h}$ можно взять грань области $\mathfrak{G}$, лежащую в плоскости

$$f(\tilde{\ell}) = a_{66}, \tag{3}$$

где $\tilde{\ell} = (1,1,1,1,1,1,2,0,\ldots,0) = (\tilde{\ell}_1,\ldots,\tilde{\ell}_n)$, $\tilde{\ell}_i = 1$ $(i=1,\ldots,6)$,
$\tilde{\ell}_7 = 2$, $\tilde{\ell}_i = 0$ $(i=8,\ldots,n)$

((3) – фактическая грань $\mathfrak{G}$ – см. ниже), в качестве f_1 и f_2 – формы

$$f_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} x_i x_j = \sum_{i=1}^{6}\{1+(i-3)\,b_1\} x_i^2 + \frac{3}{2}x_7^2 + \sum_{i=8}^{n}\{2+(i-7)\,b_1\} x_i^2 - \frac{11}{12}\sum_{i=1}^{6} x_i x_7, \tag{4}$$

где b_1 – заданное вещественное число с условием

$$0 < b_1 < \frac{1}{24}; \tag{5}$$

$$f_2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(2)} x_i x_j = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + \left(1+\frac{b_2}{6}\right)x_7^2 + 2\sum_{i=8}^{n} x_i^2 + \frac{1+b_2}{30}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{6} x_i x_j - \frac{30+5b_2}{36}\sum_{i=1}^{6} x_i x_7, \tag{6}$$

где b_2 – заданное вещественное число с условием

$$0 < b_2 < \frac{1}{100}; \tag{7}$$

в качестве S – матрицу

$$S = (e_1^T,\ldots,e_5^T, -\tilde{\ell}^T, e_7^T,\ldots,e_n^T), \tag{8}$$

где $e_i = (\delta_{i1},\ldots,\delta_{in})$, $\delta_{ij} = 1$ $(j = i)$, $\delta_{ij} = 0$ $(j \neq i)$; т.е. S – единичная матрица I, в которой шестой столбец заменен на вектор

$-\tilde{\ell}^{T}$.

2°. Докажем, что форма f_1 лежит внутри грани $\mathcal{G}$. Из (4) и (5) выводим:

$$0 < a_{11}^{(1)} < a_{22}^{(1)} < \ldots < a_{nn}^{(1)} ; \qquad (9)$$

$$f_1 = \frac{11}{48} \sum_{i=1}^{6} (2x_i - x_7)^2 + \sum_{i=1}^{6} \left\{ \frac{1}{12} + (i-3) b_1 \right\} x_i^2 + \frac{1}{8} x_7^2 + + \sum_{i=8}^{n} \left\{ 2 + (i-7) b_1 \right\} x_i^2 . \qquad (10)$$

Проверяется, что

$$f_1(\tilde{\ell}) = a_{66}^{(1)} , \qquad (11)$$

т.е. f_1 лежит в плоскости (3).

Пусть дан целый вектор

$$\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \text{ , н.о.д. } (\ell_K, \ldots, \ell_n) = 1, \qquad (12)$$

причем

$$\ell \neq \pm \tilde{\ell}, \ \ell \neq \pm e_i \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (13)$$

Докажем, что тогда

$$f_1(\ell) > a_{KK}^{(1)} . \qquad (14)$$

Обозначим через K_0 наибольший индекс K, $1 \leqslant K \leqslant n$ с условием $\ell_K \neq 0$. Тогда если $K_0 \geqslant 8$, то из (10), (13) и (9) выводим:

$$f_1(\ell) > (2 + (K_0 - 7) b_1) \ell_{K_0}^2 \geqslant 2 + (K_0 - 7) b_1 = a_{K_0 K_0}^{(1)} \geqslant a_{KK}^{(1)} \qquad (15)$$

Если $K_0 \leqslant 6$, то из (4), (13) и (9) выводим:

$$f_1(\ell) = \sum_{i=1}^{6} \left\{ 1 + (i-3) b_1 \right\} \ell_i^2 > 1 + (K_0 - 3) b_1 = a_{K_0 K_0}^{(1)} \geqslant a_{KK}^{(1)} . \qquad (16)$$

Поэтому далее считаем, что $K_0 = 7$. Тогда если $|\ell_7| \geqslant 4$, то в силу (10) и (9)

$$f_1(\ell) > \frac{1}{8} \ell_7^2 \geqslant 2 > a_{77}^{(1)} \geqslant a_{KK}^{(1)} \qquad (17)$$

Если $|\ell_7| = 3$, то в силу (10) и (9)

$$f_1(\ell) \geqslant \frac{11}{48}\cdot 6 + \frac{9}{8} = \frac{5}{2} > a_{77}^{(1)} \geqslant a_{KK}^{(1)} . \qquad (18)$$

Если $|\ell_7| = 2$, то в силу (13) $\ell_i = \frac{\ell_7}{2}$ не более, чем для пяти индексов i, $1 \leqslant i \leqslant 6$. Поэтому в силу (10) и (5)(учитывая, что $\ell \neq \pm 2e_7$)

$$f_1(\ell) \geqslant 4\cdot\frac{11}{48} + \frac{1}{12} - 2b_1 + \frac{1}{8}\cdot 4 = \frac{3}{2} - 2b_1 > a_{KK}^{(1)} \ (K=1,\ldots,6). \qquad (19)$$

Если $|\ell_7| = 1$, то в силу (10), (13), (5) и (9)

$$f_1(\ell) \geqslant \frac{11}{48}\cdot 6 + \left(\frac{1}{12} - 2b_1\right) + \frac{1}{8} = \frac{3}{2} + 2\left(\frac{1}{24} - b_1\right) > \frac{3}{2} = a_{77}^{(1)} = a_{KK}^{(1)} . \qquad (20)$$

Тем самым мы получили (14) во всех случаях (12), (13) и доказали (с учетом (11) и (9)), что f_1 лежит внутри $\mathfrak{h}$.

3°. Докажем, что ж) $f_2 \in \mathfrak{h}$. Из (6) и (7) выводим:

$$0 < a_{11}^{(2)} = \ldots = a_{66}^{(2)} < a_{77}^{(2)} < a_{88}^{(2)} = \ldots = a_{nn}^{(2)} ; \qquad (21)$$

$$f_2 = \frac{1+b_2}{30}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i - 3x_7\right)^2 + \frac{114-11b_2}{1080}\sum_{i=1}^{6}\left(3x_i - x_7\right)^2 +$$

$$+ \frac{2+7b_2}{120}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 + \frac{12-13b_2}{180} x_7^2 + 2\sum_{i=8}^{n} x_i^2 . \qquad (22)$$

Проверяется, что

$$f_2(\tilde{\ell}) = a_{66}^{(2)} , \qquad (23)$$

т.е. f_2 лежит в плоскости (3), и что

$$f_2(\tilde{\tilde{\ell}}) = a_{66}^{(2)} , \quad \tilde{\tilde{\ell}} = (1,1,1,1,1,1,3,0,\ldots,0). \qquad (24)$$

Пусть дан целый вектор $\ell = (\ell_1,\ldots,\ell_n)$, н.о.д. $(\ell_K,\ldots,\ell_n) = 1$, причем

$$\ell \neq \pm\tilde{\ell}, \ \ell \neq \pm\tilde{\tilde{\ell}}, \ \ell \neq \pm e_i \quad (i=1,\ldots,n). \qquad (25)$$

ж) Точнее, будет доказано, что f_2 лежит внутри пересечения граней (3), $f(1,1,1,1,1,1,3,0,\ldots,0) = a_{66}$, $a_{ii} = a_{i+1,i+1}$ $(i=1,\ldots,5,8,\ldots,n-1)$ области $\mathfrak{N}$.

Докажем, что тогда

$$f_2(\ell) > a^{(2)}_{KK}. \tag{26}$$

Обозначим через K_0 наибольший индекс K, $1 \leqslant K \leqslant n$, с условием $\ell_K \neq 0$. Тогда если $K_0 \geqslant 8$, то из (22), (25) и (2I) выводим:

$$f_2(\ell) > a^{(2)}_{K_0K_0}\ell^2_{K_0} \geqslant a^{(2)}_{K_0K_0} \geqslant a^{(2)}_{KK}. \tag{27}$$

Если $K_0 \leqslant 6$, то из (22), (25) и (2I) выводим:

$$f_2(\ell) \geqslant \frac{114-11b_2}{1080}\cdot 2\cdot 9 + \frac{2+7b_2}{120}\cdot 2 = \frac{116-4b_2}{60} > a^{(2)}_{77} \geqslant a^{(2)}_{KK}. \tag{28}$$

Поэтому далее считаем, что $K_0 = 7$. Тогда если $|\ell_7| \geqslant 4$, то из (22) и (2I) с учетом (7) выводим:

$$f_2(\ell) \geqslant \frac{12-13b_2}{180}\cdot 16 = \frac{48-52b_2}{45} > 1 + \frac{b_2}{6} = a^{(2)}_{77} > a^{(2)}_{KK}. \tag{29}$$

Если $|\ell_7| = 3$ и $\ell \neq \pm \tilde{\tilde{\ell}}$, то из (22) и (2I) выводим:

$$f_2(\ell) \geqslant \frac{114-11b_2}{1080}\cdot 9 + \frac{12-13b_2}{180}\cdot 9 = \frac{186-89b_2}{120} > 1 + \frac{b_2}{6} = \tag{30}$$
$$= a^{(2)}_{77} > a^{(2)}_{KK}.$$

Если $|\ell_7| = 2$ и $\ell \neq \pm\tilde{\ell}$, то из (22) и (2I) выводим:

$$f_2(\ell) \geqslant \frac{114-11b_2}{1080}\left(5+2^2\right) + \frac{12-13b_2}{180}\cdot 4 = \tag{31}$$
$$= \frac{438-137b_2}{360} > 1 + \frac{b_2}{6} = a^{(2)}_{77} > a^{(2)}_{KK}.$$

Если $|\ell_7| = 1$, то из (25), (22) и (2I) выводим: $\ell \neq \pm e_7$,

$$f_2(\ell) \geqslant \frac{114-11b_2}{1080}\left(5+2^2\right) + \frac{2+7b_2}{120}\cdot 1 + \frac{12-13b_2}{180}\cdot 1 =$$

$$= \frac{372-38b_2}{360} > 1 + \frac{b_2}{6} = a^{(2)}_{77} \tag{32}$$

Тем самым мы доказали, что в условиях (25) имеет место неравенство (26). Вместе с (23), (24) и (2I) это показывает, что $f_2 \in \mathfrak{F}$.

4°. Докажем, что форма $g_1 = f_1 S = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(1)} x_i x_j$, где S задается (8), лежит внутри $\mathfrak{G}$. Имеем:

$$Se_i = e_i \ (i=1,\dots,n;\ i\neq 6),\quad Se_6 = -\tilde{\ell},\quad S\tilde{\ell} = -e_6. \tag{33}$$

Поэтому

$$b_{ii}^{(1)} = a_{ii}^{(1)} \qquad (i=1,\dots,n), \tag{34}$$

ибо для $i \neq 6$

$$b_{ii}^{(1)} = g(e_i) = f(Se_i) = f(e_i) = a_{ii}^{(1)} \ ;$$

для $i=6$ в силу (II)

$$b_{66}^{(1)} = g(e_6) = f(Se_6) = f(-\tilde{\ell}) = f(\tilde{\ell}) = a_{66}^{(1)}. \tag{35}$$

В силу (9)

$$0 < b_{11}^{(1)} < b_{22}^{(1)} < \dots < b_{nn}^{(1)}. \tag{36}$$

Пусть $\ell' = (\ell_1', \dots, \ell_n')$ – целый вектор с условием

$$\text{н. о. д. } (\ell_k', \dots, \ell_n') = 1. \tag{37}$$

Докажем, что если

$$\ell' \neq \pm\tilde{\ell},\ \pm e_i \qquad (i=1,\dots,n), \tag{38}$$

то

$$g_1(\ell') > b_{kk}^{(1)} . \tag{39}$$

Рассмотрим вектор $\ell = S\ell'$, так что $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$,

$$\ell_i = \ell_i' - \ell_6' (i=1,\dots,5),\ \ell_6 = -\ell_6',\ \ell_7 = \ell_7' - 2\ell_6',\ \ell_i = \ell_i' \ (i=8,\dots,n). \tag{40}$$

Тогда

$$g_1(\ell') = f(S\ell') = f(\ell). \tag{41}$$

Если $K_0' = max\{i \mid \ell_i' \neq 0\}$, то при $K_0' \geqslant 8$ из (40) выводим: $K_0 = K_0' \geqslant 8$. В силу (I5), (4I),(34) и (36) имеет место (39). При $K_0' \leqslant 5$ из (40) выводим: $K_0 = K_0' \leqslant 5$. В силу (I6), (4I),(34) и (36) имеет место (39).

Пусть $K_0' = 6$ или 7. Если $|\ell_7| = |\ell_7' - 2\ell_6'| \neq 2$, то из (I6)–(I8), (20), (4I), (34) и (36) следует (39). Если $|\ell_7| = 2$, то $\ell \equiv 0$

(mod2), так что $k \leqslant 6$ в силу (37). Кроме того, в силу (33) и (38) $\ell \neq \pm \mathfrak{l}$. Поэтому из (I9), (4I), (34) и (36) следует (39).

Итак, мы доказали (39) в условиях (37) и (38). Вместе с (36) и (35) это показывает, что $g_1 = f_1 S$ есть внутренняя точка грани $\mathfrak{h}$.

5°. Наконец, докажем, что форма $g_2 = f_2 S = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(2)} x_i x_j$ не приведена по Минковскому, $g_2 \notin \mathfrak{G}$. Действительно, проверяется, что

$$g_2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + \left(1 + \frac{h_2}{6}\right) x_7^2 + 2 \sum_{i=8}^{n} x_i^2 + \frac{1+h_2}{30} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{5} x_i x_j -$$

$$- \frac{30+5h_2}{36} \sum_{i=1}^{5} x_i x_7 - \frac{12+h_2}{18} \sum_{i=1}^{5} x_i x_6 - \left(1 + \frac{h_2}{6}\right) x_6 x_7 \qquad (42)$$

и что в силу (42) и (7)

$$b_{6,6}^{(2)} + 2 b_{6,7}^{(2)} = 1 - \left(1 + \frac{h_2}{6}\right) = -\frac{h_2}{6} < 0 .$$

6°. Как было показано в п.I°, утверждения п.п.2°–5° приводят к доказательству теоремы I.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Достаточно показать (ср.§ 2), что у области приведения Барнса – Кона имеется хотя бы одна грань размерности $N-1$, которая разбивается на две $(N-1)$ -мерные части, причем одна часть этой грани целым унимодулярным преобразованием преобразуется в себя, а вторая часть этим же преобразованием выводится из области приведения Барнса – Кона.

Такой гранью является грань области приведения Барнса – Кона, все точки которой выражаются в виде

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2 x_3^2 + \lambda_3 x_4^2 + \lambda_4 (x_1 - x_3)^2 + \lambda_5 (x_1 - x_4)^2 + \lambda_6 [(x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2] + \lambda_7 (x_2 - x_4)^2 + \lambda_8 [x_3^2 + x_4^2 + (x_3 - x_4)^2] + \lambda_9 [4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4],$$

где $\lambda_i \geqslant 0$ – вещественные числа, $i = 1, \ldots, 9$. При преобразовании

$$S = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

часть этой грани, удовлетворяющая неравенству $\lambda_4 \leqslant \lambda_5$, переходит в себя, а часть $\lambda_4 > \lambda_5$ не пересекается после преобразования с данной гранью. Так как эти части грани имеют ту же размерность, что сама грань, то получаем, что это разбиение ненормально.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. В е н к о в Б.А. О приведении положительных квадратичных форм. - Изв.АН СССР, сер.матем., 1940, т.4, № 1, с.37-52. (см.также Венков Б.А. Избр.труды, Л., 1981, с.185-200).
2. В о р о н о й Г.Ф. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. - Собр.соч.в трех томах,т.2, Киев, Изд-во АН УССР, 1952, с.171-238.
3. В о р о н о й Г.Ф. Исследование о примитивных параллелоэдрах. - Собр.соч. в трех томах, т.2, Киев, Изд-во АН УССР, 1952, с.239-368.
4. Д е л о н е Б.Н. Геометрия положительных квадратичных форм. - Успехи матем.наук, вып.3, 1937, с.16-62, 1938, вып.4, с.103-164.
5. Р ы ш к о в С.С. К теории приведения положительных квадратичных форм. - Докл.АН СССР, 1971, т.198, № 5, с.1028-1031.
6. Р ы ш к о в С.С. О приведении положительных квадратичных форм от n переменных по Эрмиту, по Минковскому и по Венкову. - Докл.АН СССР, 1972, т.207, № 5, с.1054-1056.
7. Р ы ш к о в С.С., Б а р а н о в с к и й Е.П. C-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий). - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.137. 130 с.
8. Р ы ш к о в С.С. Полиэдр $\mu(m)$ и некоторые экстремальные задачи геометрии чисел. - Докл.АН СССР, 1970, т.194, № 3, с.514-517.
9. Т а м м е л а П.П. К теории приведения положительных квадратичных форм. - Докл.АН СССР, 1973, т.209, № 6, с.1299 - -1302.
10. Т а м м е л а П.П. Область приведения Минковского для положительных квадратичных форм от семи переменных. - Зап.

науч.семинаров ЛОМИ, 1977, т.67, с.108-143.
11. Штогрин М.И. Об областях приведения Вороного, Венкова и Минковского. - Докл.АН СССР, 1972, т.207, № 5, с.1070-1073.
12. Barnes E.S., Cohn M.J. On the reduction of positive quaternary quadratic forms. - J.Austral.Math.Soc. (A), 1976, v.22, p.54-64.
13. Minkowski H. Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. - Ges.Abh., Bd.2, Leipzig - Berlin, 1911, S.53-100.