Математические заметки

Том 105 выпуск 4 апрель 2019

УДК 517

О замыкании гладких финитных функций в весовых пространствах Гёльдера

К. В. Сидорова (Гагельганс), А. А. Шлапунов

В работе получено описание замыкания гладких финитных функций в весовом пространстве Гёльдера на пространстве $\mathbb{R}^n$ для $n \geqslant 1$ с весом, контролирующим поведение в бесконечно удаленной точке. В качестве применения мы получаем критерий разрешимости операторных уравнений, порожденных дифференциалами де Рама как в этих пространствах, так и на замыкании гладких финитных функций в нем при $n \geqslant 2$.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: весовые пространства Гёльдера, комплекс де Рама.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11924

1. Введение. Как известно, пространства Гёльдера являются важным инструментом для изучения дифференциальных уравнений и начально-краевых задач для них (см., например, [1]–[3]). Пространства Гёльдера особенно полезны, поскольку интегральные операторы, решающие начально-краевые задачи, обычно непрерывны в них, но разрывны на шкале пространств с целыми показателями гладкости. После многих десятилетий успешного использования неожиданно обнаружилось, что функции класса Гёльдера не могут быть аппроксимированы гладкими функциями в гёльдеровской топологии; см. [4]. Есть и другие очевидные недостатки данных пространств: они не сепарабельны и не рефлексивны. Однако в них естественно определена непрерывная операция умножения функций, что является большим преимуществом при изучении нелинейных уравнений; см., например, [3].

Нетрудно получить критерий аппроксимируемости гёльдеровских функций гладкими как на открытых множествах, так и на компактах (см., например, [4]). В настоящей работе мы получаем описание замыкания гладких финитных функций в весовых пространствах Гёльдера над $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, с весом, контролирующим поведение в бесконечно удаленной точке. В качестве применения, используя стандартное фундаментальное решение оператора Лапласа и технику, разработанную в статье [5], мы

Первый автор поддержан грантом Правительства РФ для научных исследований под руководством ведущего ученого в Сибирском федеральном университете, контракт № 14.Y26.31.0006. Второй автор поддержан грантом Министерства образования и науки РФ № 1.2604.2017/ПЧ.

© К. В. Сидорова (Гагельганс), А. А. Шлапунов, 2019

доказываем критерий разрешимости операторных уравнений, порожденных дифференциалами де Рама в весовых пространствах Гёльдера и в соответствующих замыканию гладких финитных функций подпространствах. В частности, такие результаты проясняют поведение проектора Гельмгольца (из теории уравнений Навье–Стокса) на шкале весовых пространств Гёльдера; ср. [6; гл. 1, § 2] для пространства Лебега. Уместно отметить, что дифференциалы де Рама не порождают операторы Фредгольма в обычных пространствах Гёльдера и Соболева на $\mathbb{R}^n$.

2. Свойства весовых пространств Гёльдера. Предположим, что $\mathscr{X}$ есть неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Мы намерены контролировать рост функций на $\mathscr{X}$ в бесконечно удаленной точке. Пусть

$$w(x) = \sqrt{1+|x|^2}, \quad w(x,y) = \max\{w(x), w(y)\}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Для $s \in \mathbb{Z}_+$ и $\delta \in \mathbb{R}$ обозначим через $C^{s,0}_\delta(\overline{\mathscr{X}})$ пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций на замыкании $\overline{\mathscr{X}}$ области $\mathscr{X}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{s,0}_\delta(\overline{\mathscr{X}})} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \sup_{x\in\overline{\mathscr{X}}} w^{\delta+|\alpha|}(x)\,|\partial^\alpha u(x)|.$$

Пусть U будет пустым множеством, если $\overline{\mathscr{X}}$ не содержит начало координат; в противном случае пусть $U \subset \overline{\mathscr{X}}$ будет непустой ограниченной окрестностью нуля в относительной топологии $\overline{\mathscr{X}}$. Для $0 < \lambda \leqslant 1$ положим

$$\langle u\rangle_{\lambda,\delta,\overline{\mathscr{X}}} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathscr{X}}\setminus U,\, x\neq y\\ |x-y|\leqslant|x|/2}} w^{\delta+\lambda}(x,y)\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Пусть $C^{0,\lambda}_\delta(\overline{\mathscr{X}})$ состоит из всех непрерывных функций на $\overline{\mathscr{X}}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}_\delta} = \|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{U})} + \|u\|_{C^{0,0}_\delta(\overline{\mathscr{X}})} + \langle u\rangle_{\lambda,\delta,\overline{\mathscr{X}}},$$

где

$$\|\cdot\|_{C^{0,\lambda}(\overline{U})} = \|\cdot\|_{C^{0,0}(\overline{U})}| + \langle\cdot\rangle_{\lambda,\overline{U}}$$

есть норма обычного пространства Гёльдера $C^{0,\lambda}(\overline{U})$ на компакте $\overline{U}$; см., например, [1]–[3]. Наконец, для $s \in \mathbb{Z}_+$ пусть $C^{s,\lambda}_\delta(\overline{\mathscr{X}})$ обозначает пространство всех s раз непрерывно дифференцируемых функций на $\overline{\mathscr{X}}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{s,\lambda}_\delta(\overline{\mathscr{X}})} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \|\partial^\alpha u\|_{C^{0,\lambda}_{\delta+|\alpha|}(\overline{\mathscr{X}})}.$$

Базовые свойства таких пространств хорошо известны; см., например, [7] для полиэдральных областей. Так, нормированные пространства $C^{s,\lambda}_\delta(\overline{\mathscr{X}})$, очевидно, образуют шкалу банаховых пространств, параметризованных индексами $s \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in [0,1]$ и $\delta \in \mathbb{R}$. Данная конструкция становится естественной, если мы рассматриваем $\mathscr{X}$ как многообразие с особой точкой в бесконечности (ср. [8]). Первое слагаемое соответствует координатной карте в неособой части многообразия, а второе и третье – координатной карте бесконечно удаленной точки. Нам нет нужды склеивать слагаемые с помощью разбиения единицы в $\overline{\mathscr{X}}$, поскольку есть глобальные координаты в $\mathbb{R}^n$, а рассматриваемые операторы обладают свойством трансмиссии.

Если $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$, мы положим $U = B_2$, где B_R есть шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом $R > 0$. Будем использовать обозначение $C^{s,\lambda}_\delta$ для $C^{s,\lambda}_\delta(\mathbb{R}^n)$. Очевидно,

пространство $C^{s,\lambda}_{\delta}$ непрерывно вложено в пространство Фреше $C^{s,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. По определению каждая (частная) производная ∂^α отображает $C^{s,\lambda}_{\delta}$ непрерывно в $C^{s-|\alpha|,\lambda}_{\delta+|\alpha|}$, если $|\alpha| \leqslant s$. Поэтому следующая теорема вложения вполне ожидаема.

Теорема 1. *Предположим, что $s, s' \in \mathbb{Z}_+$, $\delta, \delta' \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda, \lambda' \in [0,1]$. Если $\delta \leqslant \delta'$, $s \leqslant s'$ и $s+\lambda \leqslant s'+\lambda'$, то пространство $C^{s',\lambda'}_{\delta'}$ вложено непрерывно в пространство $C^{s,\lambda}_{\delta}$. Более того, вложение компактно, если $\delta < \delta'$ и $s+\lambda < s'+\lambda'$.*

Доказательство. Непрерывность вложения $C^{s,0}_{\delta} \hookrightarrow C^{s-1,1}_{\delta}$ немедленно вытекает из теоремы Лагранжа о среднем и неравенств

$$\frac{|x|}{2} \leqslant |y| \leqslant \frac{3}{2}|x|, \qquad w(x) \leqslant w(x,y) \leqslant \frac{\sqrt{13}}{2}\, w(x), \quad \text{если} \quad |x-y| \leqslant \frac{|x|}{2}. \tag{2.1}$$

Поскольку непрерывность вложений $C^{s,\lambda'}_{\delta'} \hookrightarrow C^{s,\lambda}_{\delta}$ следует непосредственно из определения пространств при $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda' \leqslant 1$, $\delta \leqslant \delta'$ и $s \in \mathbb{Z}_+$, то мы заключаем, что утверждение теоремы о непрерывных вложениях справедливо.

Что касается компактных вложений, то отметим, что $C^{0,\lambda'}(\overline{B}_2)$, как хорошо известно, компактно вложено в $C^{0,\lambda}(\overline{B}_2)$ при $0 \leqslant \lambda < \lambda' \leqslant 1$. Мы будем использовать подобные аргументы для второй части нормы. Для этого воспользуемся конической одноточечной компактификацией. Именно, вложим $\mathbb{R}^n$ в компактную гиперповерхность $\mathscr{S} = \mathscr{S}_- \cup \mathscr{S}_0 \cup \mathscr{S}_+$ с конической особенностью в координатах $(z^0, z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, где $\mathscr{S}_- = \{|z| = 1,\ -1 \leqslant z_0 \leqslant 0\}$ – нижняя полусфера,

$$\mathscr{S}_+ = \left\{1 - z_0 = |(z^1, \dots, z^n)|,\ \frac{1}{3} \leqslant z_0 \leqslant 1\right\}$$

– конус, а поверхность

$$\mathscr{S}_0 = \left\{z_0 = \rho(z^1, \dots, z^n),\ \frac{2}{3} \leqslant |(z^1, \dots, z^n)| \leqslant 1\right\}$$

выбрана так, чтобы гиперповерхность $\mathscr{S} \setminus (1, 0 \dots, 0)$ была бесконечно гладкой. На самом деле вложение задается следующим отображением: $\iota\colon \widehat{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\iota(x) = \begin{cases} (-\sqrt{1-|x|^2}, x), & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ \left(\rho\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right), \dfrac{x}{|x|^2}\right), & \text{если } 1 < |x| < \dfrac{3}{2}, \\ \left(1 - \dfrac{1}{|x|}, \dfrac{x}{|x|^2}\right), & \text{если } |x| \geqslant \dfrac{3}{2}, \\ (1, 0, \dots, 0), & \text{если } x = \infty, \end{cases}$$

с некоторой гладкой обратимой функцией ρ, а обратное ему задается как

$$\iota^{-1}(z) = \begin{cases} (z^1, \dots, z^n), & \text{если } -1 \leqslant z_0 \leqslant 0, \\ \dfrac{(z^1, \dots, z^n)}{(\rho^{-1}(z_0))^2}, & \text{если } 0 < z_0 \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{(z^1, \dots, z^n)}{(1-z^0)^2}, & \text{если } \dfrac{1}{3} \leqslant z^0 < 1, \\ \infty, & \text{если } z = (1, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Отображение ι, очевидно, непрерывно на $\widehat{\mathbb{R}}^n$, гладкое и неособое на $\mathscr{S} \setminus (1, 0 \ldots, 0)$. Функция $d(x, y) = |\iota(x) - \iota(y)|$ есть метрика на множестве $\widehat{\mathbb{R}}^n \cong \mathscr{S}$. Теперь мы можем сформулировать критерий компактности на основе теоремы Арцела–Асколи, который нам потребуется для дальнейшего доказательства теоремы.

Лемма 1. *Пусть M есть подмножество в $C^{s,0}_{\delta'}$, обладающее следующими свойствами*:

1) *M ограничено в $C^{s,0}_{\delta'}$;*
2) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих оценке $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$, и всех $u \in M$ и $|\alpha| \leqslant s$ справедливо, что*
$$|(w(x))^{\delta+|\alpha|}\, \partial^\alpha u(x) - (w(y))^{\delta+|\alpha|}\, \partial^\alpha u(y)| < \varepsilon;$$
3) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x, y \in \overline{B}_2$, удовлетворяющих оценке $|x - y| < \delta(\varepsilon)$, и для всех $u \in M$ и $|\alpha| \leqslant s$ мы имеем*
$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| < \varepsilon.$$

Тогда множество M предкомпактно в $C^{s,0}_{\delta}$ для любых $\delta' > \delta$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\delta' > \delta$. Если M есть ограниченное множество в $C^{s,0}_{\delta'}$, то для всех $u \in M$, функции
$$u^{(\alpha)}(z) = \begin{cases} ((wx))^{\delta+|\alpha|}\, \partial^\alpha_x u)(\iota^{-1}(z)), & \text{если } z \in \mathscr{S} \setminus (1, 0, \ldots, 0), \\ 0, & \text{если } z = (1, 0, \ldots, 0), \end{cases}$$
непрерывны на компакте $\mathscr{S}$ для $|\alpha| \leqslant s$, $\delta < \delta'$, поскольку
$$|u^{(\alpha)}(z)| \leqslant \|\partial^\alpha_x u\|_{C^{0,0}_{\delta'+|\alpha|}} (w(\iota^{-1}(z))^{\delta-\delta'}$$
для всех $z \in \mathscr{S} \setminus (1, 0, \ldots, 0)$, и $\iota^{-1}(z) \to (\infty)$, если $z \to (1, 0, \ldots, 0)$ так как $1 - z_0 = |(z^1, \ldots, z^n)|$ на конусе $\mathscr{S}_+$. В частности, множество $\{u^{(\alpha)}\}_{u \in M}$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела–Асколи, а значит, оно предкомпактно в $C(\mathscr{S})$. Это означает, что M предкомпактно в $C^{s,0}_{\delta}$, что и требовалось.

Вернемся к доказательству теоремы. Если M есть ограниченное множество в пространстве $C^{0,\lambda'}_{\delta'}$, то оно, очевидно, ограничено также и в $C^{0,0}_{\delta'}$ и $C^{0,\lambda'}(\overline{B}_2)$. Для любого $0 \leqslant \lambda < \lambda' \leqslant 1$, это множество предкомпактно в $C^{0,\lambda}(\overline{B}_2)$. Более того, мы имеем
$$(w(x, y))^{\delta'} |u(x) - u(y)| \leqslant \|u\|_{C^{0,\lambda'}_{\delta'}} \left(\frac{|x - y|}{w(x, y)}\right)^{\lambda'} \leqslant 2^{\lambda'/2} \|u\|_{C^{0,\lambda'}_{\delta'}}$$
для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих $|x - y| \leqslant |x|/2$.

Если $|x| \leqslant |y|$, то
$$|(w(x))^\delta u(x) - (w(y))^\delta u(y)| \leqslant (w(x))^\delta |u(x) - u(y)| + |(w(x))^\delta - (w(y))^\delta||u(y)|,$$
что, в свою очередь, оценивается через
$$\frac{1}{(w(x, y))^{\delta'-\delta}} (w(x, y))^{\delta'} |u(x) - u(y)| + \frac{(\sqrt{2})^{\delta'}}{(w(x, y))^{\delta'-\delta}} \frac{|(w(x))^\delta - (w(y))^\delta|}{(w(x, y))^\delta} (w(y))^{\delta'} |u(y)|,$$

поскольку в этом случае $w(x) \leqslant w(x,y) \leqslant \sqrt{2}w(y)$ и $\delta \leqslant \delta'$. Следовательно, для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих $|x| \leqslant |y|$, мы имеем

$$\begin{aligned} &|(w(x))^\delta u(x) - (w(y))^\delta u(y)| \\ &\qquad \leqslant c\frac{\|u\|_{C^{0,\lambda'}_{\delta'}}}{(w(x,y))^{\delta'-\delta}}\left(\frac{|x-y|}{w(x,y)}\right)^{\lambda'} + c\frac{\|u\|_{C^{0,0}_{\delta'}}}{(w(x,y))^{\delta'-\delta}}\frac{|(w(x))^\delta - (w(y))^\delta|}{(w(x,y))^\delta} \end{aligned} \tag{2.2}$$

с некоторой положительной постоянной c, не зависящей от x, y и u.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\delta' > \delta$ и

$$\frac{|x-y|}{w(x,y)} \leqslant \sqrt{2}, \qquad \frac{|(w(x))^\delta - (w(y))^\delta|}{(w(x,y))^\delta} \leqslant 2,$$

то мы заключаем, что найдется такое число $R > 0$, что

$$\frac{\|u\|_{C^{0,\lambda'}_{\delta'}}}{(w(x,y))^{\delta'-\delta}}\left(\frac{|x-y|}{w(x,y)}\right)^{\lambda'} < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \frac{\|u\|_{C^{0,0}_{\delta'}}}{(w(x,y))^{\delta'-\delta}}\frac{|(w(x))^\delta - (w(y))^\delta|}{(w(x,y))^\delta} < \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех x и y, удовлетворяющих неравенству $|x|^2 + |y|^2 > R^2$. Поскольку функция $w(x)$ и отображение $\iota(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}^n$, то они равномерно непрерывны на шаре $\overline{B}_R$. На замкнутом шаре метрика $d(x,y)$ определяет ту же самую топологию, что и стандартная метрика $|x-y|$. Значит, найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$, зависящее от ε и такое, что

$$\frac{\|u\|_{C^{0,\lambda}_{\delta'}}}{(w(x,y))^{\delta'-\delta}}\left(\frac{|x-y|}{w(x,y)}\right)^{\lambda'} < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \frac{\|u\|_{C^{0,0}_{\delta'}}}{(w(x,y))^{\delta'-\delta}}\frac{|(w(x))^\delta - (w(y))^\delta|}{(w(x,y))^\delta} < \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех $x, y \in \overline{B}_R$, удовлетворяющих $d(x,y) < \delta(\varepsilon)$.

Так как для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено или $|x| \leqslant |y|$ или $|y| \leqslant |x|$, то, оценивая разность $|(w(x))^\delta u(x) - (w(y))^\delta u(y)|$, мы можем ограничиться случаем $|x| \leqslant |y|$. В частности, (2.2) означает, что M удовлетворяет условиям леммы 1, а значит, M предкомпактно в $C^{0,0}_\delta$, что доказывает компактное вложение $C^{0,\lambda'}_{\delta'} \subset C^{0,0}_\delta$. Это означает, что любая последовательность в M содержит подпоследовательность $\{u_\nu\}$, сходящуюся в $C^{0,0}_\delta$. Без потери общности мы можем предположить, что она сходится к нулю в этом пространстве. С другой стороны, при $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} &(w(x,y))^{\delta+\lambda}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} \\ &\qquad \leqslant \left((w(x,y))^{\delta'+\lambda'}\frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^{\lambda'}}\right)^{\lambda/\lambda'} \frac{((w(x,y))^\delta|u(x,t)-u(y,t)|)^{1-\lambda/\lambda'}}{(w(x,y))^{(\delta'-\delta)\lambda/\lambda'}}. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (2.1)

$$\langle u_\nu\rangle_{\lambda,\delta} \leqslant C\langle u_\nu\rangle^{\lambda/\lambda'}_{\lambda',\delta'}\|u_\nu\|^{1-\lambda/\lambda'}_{C^{0,0}_\delta},$$

с постоянной $C > 0$, независящей от ν, а поэтому последовательность $\{u_\nu\}$ также стремится к нулю в $C^{0,\lambda}_\delta$. Значит, множество M предкомпактно в $C^{0,\lambda}_\delta$. Итак, $C^{0,\lambda'}_{\delta'}$

компактно вложено в $C^{0,\lambda}_{\delta}$, если $0 \leqslant \lambda < \lambda' \leqslant 1$ и $\delta < \delta'$. Рассуждая по индукции, мы заключаем, что вложение $C^{s,\lambda'}_{\delta'} \hookrightarrow C^{s,\lambda}_{\delta}$ компактно для всех целых чисел $s \geqslant 0$, при условии, что $0 \leqslant \lambda < \lambda' \leqslant 1$ и $\delta < \delta'$.

Наконец, так как непрерывные вложения $C^{s,0}_{\delta} \hookrightarrow C^{s-1,1}_{\delta}$ уже доказаны, то $C^{s',\lambda'}_{\delta'}$ компактно вложено в $C^{s,\lambda}_{\delta}$, если $s \leqslant s'$, $s+\lambda < s'+\lambda'$ и $\delta < \delta'$. Теорема доказана.

Легко получить и стандартную лемму об умножении функций.

Лемма 2. *Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$, $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$. Если $u, v \in C^{s,\lambda}_{\delta}$, то произведение uv принадлежит $C^{s,\lambda}_{\delta+\delta'}$ и $\|uv\|_{C^{s,\lambda}_{\delta+\delta'}} \leqslant c\,\|u\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}}\|v\|_{C^{s,\lambda}_{\delta'}}$ с постоянной $c > 0$, не зависящей от u, v.*

Теперь мы готовы обсуждать более тонкие свойства весовых пространств Гёльдера. Обозначим через $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $\mathbb{R}^n$. Пусть $0 < \lambda < 1$, и пусть $C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$ обозначает подмножество в $C^{s,\lambda}_{\delta}$, элементы которого обладают следующими свойствами: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma_\varepsilon > 0$, что

$$\sum_{|\alpha|\leqslant s} \langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|} < \varepsilon \qquad \text{как только} \quad \frac{|x-y|}{w(x,y)} < \gamma_\varepsilon; \tag{2.3}$$

кроме того,

$$\lim_{R\to\infty} \|u\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}(\mathbb{R}^n\setminus B_R)} = 0. \tag{2.4}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено $0 < \lambda < 1$, $s, s' \in \mathbb{Z}_+$ и $\delta' > \delta$. Если $0 \leqslant \lambda' \leqslant 1$, $s \leqslant s'$ и $s+\lambda < s'+\lambda'$, то замыкания множеств $C^{s',\lambda'}_{\delta'}$ и $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $C^{s,\lambda}_{\delta}$ совпадают с $C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$.*

Доказательство. Сначала отметим, что вложение $C^{s',\lambda'}_{\delta'} \hookrightarrow C^{s,\lambda}_{\delta}$ гарантировано теоремой 1. Если $s' = s$ и $\lambda' > \lambda$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющего $|\alpha| \leqslant s$, и любого $u \in C^{s',\lambda'}_{\delta}$ мы имеем

$$\langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|} \leqslant \langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda',\delta+|\alpha|}\left(\frac{|x-y|}{w(x,y)}\right)^{\lambda'-\lambda}.$$

Если $s' > s$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющего $|\alpha| \leqslant s$, и любого $u \in C^{s',\lambda'}_{\delta}$ мы имеем

$$\langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\partial_i\,\partial^\alpha u\|_{C^{0,0}_{\delta+|\alpha|+1}}\left(\frac{|x-y|}{w(x,y)}\right)^{1-\lambda}.$$

Так как $C^{s',\lambda'}_{\delta'} \subset C^{s',\lambda'}_{\delta}$ при $\delta' \geqslant \delta$, то это показывает, что элементы $C^{s',\lambda'}_{\delta'}$ удовлетворяют (2.3) при $s'+\lambda' > s+\lambda$. Кроме того, если $\delta' > \delta$ и $u \in C^{s',\lambda'}_{\delta'}$, то

$$\sup_{|x|\geqslant R} |\partial^\alpha u(x)| w^{\delta+|\alpha|}(x) \leqslant \|u\|_{C^{s,0}_{\delta'}} w^{\delta-\delta'}(R),$$

$$\langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|,\mathbb{R}^n\setminus B_R} \leqslant \langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda',\delta'+|\alpha|}\left(\frac{|x-y|}{w(x,y)}\right)^{\lambda'-\lambda} w^{\delta-\delta'}(R)$$

для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих $|\alpha| \leqslant s$. Это показывает, что элементы $C^{s',\lambda'}_{\delta'}$ удовлетворяют (2.4) при $s' + \lambda' > s + \lambda$ и $\delta' > \delta$, т.е. в этом случае $C^{s',\lambda'}_{\delta'} \subset C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$. Очевидно, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset C^{s',\lambda'}_{\delta'}$ для любых $s' \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant \lambda' \leqslant 1$, $\delta' \in \mathbb{R}$, а значит,

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}.$$

Теперь мы покажем, что $C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$ является замкнутым подпространством в $C^{s,\lambda}_{\delta}$. В самом деле, пространство, очевидно, линейно. Возьмем какую-нибудь последовательность $\{u_\nu\} \subset C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$, сходящуюся к пределу u в пространстве $C^{s,\lambda}_{\delta}$. Тогда для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющего $|\alpha| \leqslant s$, мы имеем

$$\langle \partial^\alpha u \rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|} \leqslant \langle \partial^\alpha (u - u_\nu) \rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|} + \langle \partial^\alpha u_\nu \rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|}. \tag{2.5}$$

По определению предела в пространстве $C^{s,\lambda}_{\delta}$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $\nu \geqslant N_\varepsilon$ мы имеем

$$\sum_{|\alpha| \leqslant s} \langle \partial^\alpha (u - u_\nu) \rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|} \leqslant \|u - u_\nu\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Поскольку $u_{N_\varepsilon} \in C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$, то с учетом (2.3), (2.5) и (2.6) мы заключаем, что u также удовлетворяет (2.3). Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $\nu \geqslant N_\varepsilon$ и любого $R > 0$ мы имеем

$$\|u - u_\nu\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)} \leqslant \|u - u_\nu\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Более того, по неравенству треугольника для любого $\nu \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|u\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)} \leqslant \|u - u_\nu\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)} + \|u_\nu\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)}. \tag{2.8}$$

Так как $u_{N_\varepsilon} \in C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$, то с учетом (2.4), (2.7) и (2.8) мы видим, что $u \in C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$.

Итак, мы доказали, что замыкания множеств $C^{s',\lambda'}_{\delta'}$ и $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ лежат в $C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$. Осталось доказать, что $C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$ лежит в замыкании пространства $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $u \in C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$. Используя стандартную регуляризацию (см., например, [9]), построим направленность $\{u_r\}_{r>0} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, сходящуюся к u в $C^{s,\lambda}_{\delta}$ при $r \to +0$. С этой целью зафиксируем гладкую функцию ψ с носителем в единичном шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^n$, нормализованную условием

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 1. \tag{2.9}$$

По известной лемме Бохнера для каждого $0 < r < 2/3$ найдется гладкая функция $\eta_r(t)$ на $[-1, 1]$ с носителем на отрезке $[-1, 1 - r]$ такая, что $0 \leqslant \eta_r \leqslant 1$, $\eta_r(t) = 1$ на $[-1, 1 - 2r]$ и

$$\left| \frac{d^k \eta_t}{dt^k}(t) \right| \leqslant c_k \left(\frac{1}{r} \right)^k \tag{2.10}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ с постоянной c_k, не зависящей от t. Положим

$$u_r(x) = r^{-n} \eta_r(\iota_0(x)) \int_{\mathbb{R}^n} u(t) \psi\left(\frac{t - x}{r} \right) dt.$$

Так как функция η_r принадлежит $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, то из правила Лейбница следует, что $u_r \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. С другой стороны, после очевидной замены переменных имеем

$$u_r(x) = \eta_r(\iota_0(x)) \int_{|\tau|\leqslant 1} u(r\tau + x)\psi(\tau)\, d\tau.$$

Свойство (2.9) означает, что

$$u_r(x) - u(x) = \eta_r(\iota_0(x)) \int_{|\tau|\leqslant 1} (u(r\tau + x) - u(x))\psi(\tau)\, d\tau + (1 - \eta_r(\iota_0(x)))u(x). \quad (2.11)$$

Теперь из свойств функции η_r и (2.3) следует, что для всех $|\alpha| \leqslant s$

$$\partial_x^\alpha(u_r(x) - u(x)) = \int_{|\tau|\leqslant 1} \partial_x^\alpha(u(r\tau + x) - u(x))\psi(\tau)\, d\tau \qquad \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \quad 0 < r < \frac{2}{3}, \quad (2.12)$$

$$|\partial_x^\alpha(u(r\tau + x) - u(x))| \leqslant |r\tau|^\lambda \langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda,\overline{B}_2} \qquad \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \quad 0 < r < \frac{2}{3}, \quad (2.13)$$

Поэтому из (2.9), (2.12), (2.13) вытекает, что

$$\lim_{r\to 0+} \|u_r - u\|_{C^{s,0}(\overline{B}_2)} = 0. \quad (2.14)$$

Непосредственно вычисляя, получаем для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\partial^\beta \iota_0(x)| \leqslant \frac{c_\beta}{|x|^{|\beta|+1}} \quad (2.15)$$

с некоторой постоянной c_β, не зависящей от x. Так как функция $\eta_r(\iota_0(x))$ тождественно равна единице 1 для $|x| \leqslant 1/(2r)$, то из (2.10), (2.15) следует, что для $\beta \neq 0$ справедливы следующие равенство и неравенство:

$$\sup_{|x|\geqslant 2} |\partial^\beta \eta_r(\iota_0(x))| = \sup_{|x|\geqslant (2r)^{-1}} |\partial^\beta \eta_r(\iota_0(x))| \leqslant \widetilde{c}_\beta |x|^{-|\beta|} \quad (2.16)$$

с некоторой постоянной $\widetilde{c}_\beta$, не зависящей от r. Значит, согласно (2.3) и (2.16) для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, удовлетворяющих $|\alpha| + |\beta| \leqslant s$, мы имеем

$$\sup_{|x|\geqslant 2} w^{\delta+|\alpha|+|\beta|}(x)|\partial^\beta \eta_r(\iota_0(x))||\partial_x^\alpha(u(r\tau + x) - u(x))| \leqslant c_{\alpha,\beta}|r\tau|^\lambda \langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|}, \quad (2.17)$$

$$\sup_{|x|\geqslant 2} w^{\delta+|\alpha|+|\beta|}(x)|\partial^\beta(1 - \eta_r(\iota_0(x)))||\partial^\alpha u(x)| \leqslant c_{\alpha,\beta}\|\partial^\alpha u\|_{C^{0,0}_{\delta+|\alpha|}(\mathbb{R}^n\setminus B_{1/(2r)})} \quad (2.18)$$

с некоторой постоянной $c_{\alpha,\beta}$, не зависящей от r, $0 < r < 2/3$. Теперь из правила Лейбница, (2.4), (2.9), (2.14)–(2.18) мы заключаем, что

$$\lim_{r\to 0+} \|u_r - u\|_{C^{s,0}_\delta} = 0. \quad (2.19)$$

Далее, для любых функций f, g и точек p, q из их области определения мы имеем

$$|(fg)(p)-(fg)(q)|\leqslant|f(p)-f(q)||g(p)|+|g(p)-g(q)||f(q)|.$$

Поэтому для всех $\gamma>0$ и $|\alpha|\leqslant s$ правило Лейбница, (2.1) и (2.11) дают следующее неравенство с некоторыми постоянными $c^{\beta}_{\widetilde{\beta}}$:

$$\begin{aligned}
&\langle\partial^{\alpha}(u_r-u)\rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|}\\
&\quad\leqslant\sum_{\beta+\widetilde{\beta}=\alpha}c^{\beta}_{\widetilde{\beta}}(\langle\partial^{\widetilde{\beta}}\eta_r(\iota_0(\,\cdot\,))\rangle_{\lambda,|\widetilde{\beta}|}\,\|\partial^{\beta}(u_r-u)\|_{C^{0,0}_{\delta+|\beta|}}\\
&\qquad\qquad+\|\partial^{\widetilde{\beta}}(1-\eta_r(\iota_0(\,\cdot\,))\|_{C^{0,0}_{\delta+|\widetilde{\beta}|}(\mathbb{R}^n\setminus B_{1/(2r)})}\|\partial^{\beta}u\|_{C^{0,\lambda}_{\delta+|\beta|}(\mathbb{R}^n\setminus B_{1/(2r)})}\\
&\qquad\qquad+\langle\partial^{\widetilde{\beta}}(1-\eta_r(\iota_0(\,\cdot\,)))\rangle_{\lambda,|\widetilde{\beta}|,\mathbb{R}^n\setminus B_{1/2r}}\,\|\partial^{\beta}u\|_{C^{0,0}_{\delta+|\beta|}(\mathbb{R}^n\setminus B_{1/2r})})\\
&\quad+\sum_{\beta+\widetilde{\beta}=\alpha}c^{\beta}_{\widetilde{\beta}}\|\partial^{\widetilde{\beta}}(\eta_r(\iota_0(x)))\|_{C^{0,0}_{\delta+|\widetilde{\beta}|}}\\
&\quad\times\Bigg(\sup_{\substack{x,y\notin\overline{B}_2\\|x-y|/w(x,y)\leqslant\gamma}}\int_{|\tau|\leqslant1}\frac{w^{\delta+\lambda+|\beta|}(x,y)|\partial^{\beta}u(x)-\partial^{\beta}u(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\,\psi(\tau)\,d\tau\\
&\qquad+\sup_{\substack{x,y\notin\overline{B}_2\\|x-y|/w(x,y)\leqslant\gamma}}\int_{|\tau|\leqslant1}\frac{13}{4}\,\frac{w^{\delta+\lambda+|\beta|}(x+r\tau,y+r\tau)|\partial^{\beta}u(r\tau+x)-\partial^{\beta}u(r\tau+y)|}{|x+r\tau-r\tau-y|^{\lambda}}\,\psi(\tau)\,d\tau\\
&\qquad+\frac{\sqrt{13}}{2}\left(\frac{r}{\gamma}\right)^{\lambda}\sup_{\substack{x,y\notin\overline{B}_2\\|x-y|\geqslant\gamma}}\int_{|\tau|\leqslant1}\frac{w^{\delta+\lambda+|\beta|}(x+r\tau,x)|\partial^{\beta}u(r\tau+x)-\partial^{\beta}u(x)|}{|r\tau|^{\lambda}}\,\psi(\tau)\,d\tau\\
&\qquad+\frac{\sqrt{13}}{2}\left(\frac{r}{\gamma}\right)^{\lambda}\sup_{\substack{x,y\notin\overline{B}_2\\|x-y|\geqslant\gamma}}\int_{|\tau|\leqslant1}\frac{w^{\delta+\lambda+|\beta|}(y,y+r\tau)|\partial^{\beta}u(r\tau+y)-\partial^{\beta}u(y)|}{|r\tau|^{\lambda}}\,\psi(\tau)\,d\tau\Bigg).
\end{aligned}\tag{2.20}$$

С другой стороны, как следует из теоремы 1 и (2.16), для любого $\widetilde{\beta}\in\mathbb{Z}^n_+$ найдется постоянная $c_{\widetilde{\beta}}$, не зависящая от r, такая, что

$$\|\partial^{\widetilde{\beta}}(\eta_r(\iota_0(\,\cdot\,)))\|_{C^{0,\lambda}_{|\widetilde{\beta}|}}\leqslant\|\partial^{\widetilde{\beta}}(\eta_r(\iota_0(\,\cdot\,)))\|_{C^{1,0}_{|\widetilde{\beta}|}}\leqslant c_{\widetilde{\beta}},$$

а значит, согласно (2.4)

$$\lim_{r\to0+}\|\eta_r(\iota_0(\,\cdot\,)))\|_{C^{s,\lambda}_0}\|u\|_{C^{s,\lambda}_{\delta}(\mathbb{R}^n\setminus B_{1/(2r)})}=0.\tag{2.21}$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и положим $\gamma=\gamma_{\varepsilon/16}$ в формуле (2.20), где γ_{ε} – номер из свойства (2.3). Тогда из (2.3), (2.9), (2.19) и (2.21) следует существование такого числа R_{ε}, что для всех $r\in(0,R_{\varepsilon})$ и всех $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, удовлетворяющих $|\alpha|\leqslant s$, мы имеем

$$\langle\partial^{\alpha}u_r-\partial^{\alpha}u\rangle_{\lambda,\delta}\leqslant\frac{3\varepsilon}{4}\,.\tag{2.22}$$

Аналогично, из (2.3), (2.9) и (2.12) следует, что для любых $\varepsilon > 0$, любых r из интервала $(0, (\varepsilon/16)^{1/\lambda}\gamma_{\varepsilon/16})$ и всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, удовлетворяющих $|\alpha| \leqslant s$, мы получаем

$$\begin{aligned}
&\langle \partial^\alpha (u_r - u)\rangle_{\lambda,\overline{B}_2} \\
&\quad \leqslant \sup_{\substack{x,y\in\overline{B}_2\\ |x-y|\leqslant\gamma_{\varepsilon/16}}} \int_{|\tau|\leqslant 1} \frac{|\partial^\alpha u(r\tau+x) - \partial^\alpha u(r\tau+y)| + |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}\,\psi(\tau)\,d\tau \\
&\qquad + \left(\frac{r}{\gamma_{\varepsilon/16}}\right)^\lambda \sup_{\substack{x,y\in\overline{B}_2\\ |x-y|\geqslant\gamma_{\varepsilon/16}}} \int_{|\tau|\leqslant 1} \frac{|\partial^\alpha u(r\tau+x) - \partial^\alpha u(x)| + |\partial^\alpha u(r\tau+y) - \partial^\alpha u(y)|}{|r\tau|^\lambda}\,\psi(\tau)\,d\tau \\
&\quad \leqslant \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Наконец, из (2.19), (2.22) и (2.23) вытекает, что

$$\lim_{r\to 0+} \|u_r - u\|_{C_\delta^{s,\lambda}} = 0.$$

Теорема 2 доказана.

Пример 1. Для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^n$ функция

$$u_a(x) = \frac{|x-a|^\lambda}{w^{\delta+\lambda}(x)}$$

принадлежит пространству $C_\delta^{s,\lambda}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Ясно, что $\|u_a - u_b\|_{C_\delta^{s,\lambda}} \geqslant 1$, если $a \neq b$ и $0 < \lambda \leqslant 1$, а тогда пространство $C_\delta^{s,\lambda}$ не сепарабельно при $0 < \lambda \leqslant 1$, так как множество точек $a \in \mathbb{R}^n$ несчетно. Элементы вида u_a как раз и не могут быть приближены в $C_\delta^{s,\lambda}$ функциями из $C_{\delta'}^{s',\lambda'}$ при $0 < \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda' \leqslant 1$, $s \leqslant s'$ и $s + \lambda < s' + \lambda'$, $\delta' > \delta$.

3. Комплекс де Рама над весовыми пространствами Гёльдера. Обозначим через Λ^q расслоение внешних дифференциальных форм степени $0 \leqslant q \leqslant n$ над $\mathbb{R}^n$. Для заданной области $\mathscr{X}$ в $\mathbb{R}^n$ будем писать $\Omega^q(\mathscr{X})$ для пространства всех дифференциальных форм степени q с C^∞-гладкими коэффициентами на $\mathscr{X}$. Эти пространства образуют так называемый комплекс де Рама $\Omega^\cdot(\mathscr{X})$ на $\mathscr{X}$, дифференциалы которого задаются внешними производными d. Удобно использовать обозначение $du := d^q u$ для $u \in \Omega^q(\mathscr{X})$ и положить $d^q = 0$ для $q < 0$ и $q \geqslant n$ (см., например, [10]). Мы будем опускать индекс q для градуированных операторов, если это не приводит к недоразумениям. Верхний индекс q в обозначении функциональных пространств всегда означает, что рассматриваются дифференциальные формы степени q с коэффициентами соответствующего функционального класса.

Как обычно, обозначим через d^* формально сопряженный оператор для d, более точно, $d^* g = (d^{q-1})^* g$ для $g \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$. Лапласиан комплекса $\Omega^\cdot(\mathbb{R}^n)$ на q-формах задается как

$$\Delta^q := d^* d + dd^* = -E_{k_q}\Delta, \qquad (3.1)$$

где $k_q = \binom{n}{k}$, E_{k_q} есть единичная $(k_q \times k_q)$-матрица, Δ есть обычный оператор Лапласа, примененный покомпонентно к коэффициентам формы.

Чтобы описать условия разрешимости операторных уравнений, индуцированных дифференциалами комплекса де Рама на шкале $C^{s,\lambda}_{\delta}$, используем так называемый *оператор Ходжа* на $\mathbb{R}^n$:

$$\star\colon \Omega^q(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{n-q}(\mathbb{R}^n),$$

определенный (по линейности) с помощью соотношения $dx^I \wedge (\star dx^I) = dx$ для всех мультииндексов $I = (i_1, \dots, i_q)$ с $1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant n$. Известно, что $\star(u \wedge \star u) = |u|^2$ для всех дифференциальных форм на $\mathbb{R}^n$ с вещественнозначными коэффициентами. На самом деле поведение дифференциалов де Рама на шкале весовых пространств Гёльдера вполне аналогично поведению эллиптических операторов на шкале весовых пространств Соболева (см., например, [5]).

Итак, для дифференциального оператора A, действующего на сечениях векторного расслоения Λ^q над $\mathbb{R}^n$, обозначим через $C^{s,\lambda,q}_{\delta} \cap \mathscr{S}_A$ пространство дифференциальных форм $u \in C^{s,\lambda,q}_{\delta}$, удовлетворяющих $Au = 0$ в смысле распределений в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, это замкнутое подпространство в $C^{s,\lambda,q}_{\delta}$, а значит, это пространство Банаха с индуцированной нормой.

Тогда согласно (3.1) дифференциальный оператор $d \oplus d^*$ индуцирует линейные непрерывные операторы

$$d \oplus d^*\colon C^{s+1,\lambda,q}_{\delta} \to C^{s,\lambda,q+1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_d \oplus C^{s,\lambda,q-1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_{d^*}, \tag{3.2}$$

$$d \oplus d^*\colon C^{s+1+0,\lambda+0,q}_{\delta+0} \to C^{s+0,\lambda+0,q+1}_{\delta+1+0} \cap \mathscr{S}_d \oplus C^{s+0,\lambda+0,q-1}_{\delta+1+0} \cap \mathscr{S}_{d^*}. \tag{3.3}$$

Пусть $R^{s,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1}$ и $R^{s+0,\lambda+0,q+1,q-1}_{\delta+1+0}$ обозначают образы линейных ограниченных операторов (3.2) и (3.3) соответственно, и пусть $H^q_{\leqslant m}$ обозначает пространство всех дифференциальных форм степени q, коэффициенты которых суть гармонические многочлены степени $\leqslant m$. В следующей теореме $L^2(\mathscr{X})$ есть стандартное гильбертово пространство Лебега на $\mathscr{X}$ со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{L^2(\mathscr{X})}$.

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 2$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \lambda < 1$. Если $\delta > 0$ и $\delta + 1 - n \notin \mathbb{Z}_+$, то операторы (3.2) и (3.3) являются фредгольмовыми. Более того,*

1) *(3.2) и (3.3) суть изоморфизмы, если $0 < \delta < n - 1$;*
2) *(3.2) и (3.3) суть инъекции с замкнутым образом, если $n - 1 + m < \delta < n + m$ при $m \in \mathbb{Z}_+$; более точно, образ $R^{s,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1}$ состоит из всех пар $f \in C^{s,\lambda,q+1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_d$, $g \in C^{s,\lambda,q-1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_{d^*}$, удовлетворяющих*

$$(f, dh)_{L^{2,q+1}(\mathbb{R}^n)} + (g, d^*h)_{L^{2,q-1}(\mathbb{R}^n)} = 0 \qquad \text{для всех} \quad h \in H^q_{\leqslant m+1}, \tag{3.4}$$

а образ $R^{s+0,\lambda+0,q+1,q-1}_{\delta+1+0}$ состоит из всех пар

$$f \in C^{s+0,\lambda+0,q+1}_{\delta+1+0} \cap \mathscr{S}_d, \qquad g \in C^{s+0,\lambda+0,q-1}_{\delta+1+0} \cap \mathscr{S}_{d^*},$$

удовлетворяющих (3.4).

Доказательство. Начнем с отображения (3.2). В целом доказательство следует по стандартной схеме, как в [5], для оператора Лапласа в весовых пространствах Соболева, см., например, [11] даже в более общей ситуации на многообразии с конической особенностью. Поэтому мы только кратко изложим основные этапы доказательства. Ключевую роль в нем играет следующая априорная оценка.

Лемма 3. *Предположим, что* $\delta > 0$ *и* $0 < \lambda < 1$. *Если* $f \in C^{0,\lambda,q+1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_d$, $g \in C^{0,\lambda,q-1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_{d^*}$, $u \in C^{0,0,q}_{\delta}$ *удовлетворяют равенствам*

$$du = f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \qquad d^*u = g \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

в смысле распределений, то $u \in C^{1,\lambda,q}_{\delta}$ *и*

$$\|u\|_{C^{1,\lambda,q}_{\delta}} \leqslant c(\|f\|_{C^{0,\lambda,q+1}_{\delta+1}} + \|g\|_{C^{0,\lambda,q-1}_{\delta+1}} + \|u\|_{C^{0,0,q}_{\delta}})$$

с постоянной $c > 0$, *зависящей от* λ *и* δ, *но не от* u, f *и* g.

Доказательство основано на априорных оценках Шаудера для решений эллиптических уравнений, см., например, [2] для пространств Гёльдера, [12], [5] для весовых пространствах Соболева, [7] для весовых пространств Гёльдера на бесконечном конусе и [11; предложение 2.7] для весовых пространств Соболева и Гёльдера на многообразии с конической особой точкой.

Продолжим доказательство теоремы 3. Сначала заметим, что если $f = 0$ и $g = 0$, то коэффициенты формы u, удовлетворяющей $du = 0$, $d^*u = 0$ в $\mathbb{R}^n$, являются гармоническими функциями в силу (3.1), исчезающими в бесконечности, поскольку $\delta > 0$. Тогда из теоремы Лиувилля следует, что оператор $d \oplus d^*$ инъективен на $C^{s,\lambda,q}_{\delta}$ для любых $s \geqslant 1$ и $\delta > 0$.

Обозначим через H_m множество всех гармонических многочленов степени m. Тогда несобственные интегралы $(f, dh)_{L^{2,q+1}(\mathbb{R}^n)}$, $(g, d^*h)_{L^{2,q-1}(\mathbb{R}^n)}$ сходятся, если пара (f, g) принадлежит $C^{0,0,q+1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_d \oplus C^{0,0,q-1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_{d^*}$, $h \in H^q_{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}$, $\delta + 1 - m > n$. Ясно, что эти интегралы равны нулю, если $h \in H^q_0$, поскольку многочлены порядка нуль суть постоянные функции.

Если $m \in \mathbb{Z}_+$, $\delta > n-1+m$ и пара $(f, g) \in C^{0,0,q+1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_d \oplus C^{0,0,q+1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_{d^*}$ принадлежит образу оператора $d \oplus d^*$, действующего на пространстве $C^{0,0,q}_{\delta} \cap C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\begin{aligned}
&(f, dh)_{L^{2,q+1}(\mathbb{R}^n)} + (g, d^*h)_{L^{2,q-1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad = (du, dh)_{L^{2,q+1}(\mathbb{R}^n)} + (d^*u, d^*h)_{L^{2,q-1}(\mathbb{R}^n)} = \lim_{R \to +\infty} \int_{|x|=R} (u \wedge \star dh + \star u \wedge d^*h) = 0
\end{aligned}$$

для всех $h \in H^q_j$ при $1 \leqslant j \leqslant m+1$, так как $n - 1 - \delta + j - 1 < 0$, $R^{n-1-\delta+j-1} \to 0$ при $R \to +\infty$ и

$$(d^*d + dd^*)h = \Delta^{(q)}h = 0.$$

Чтобы завершить доказательство, мы адаптируем известную интегральную формулу Норге для комплекса де Рама к весовым рассматриваемым пространствам (ср. [10]). С этой целью положим

$$(E_q u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \wedge e_q(x, y)$$

для подходящей q-формы u, где

$$e_q(x, y) = \sum_{|I|=q} e(x - y)(\star dy_I)\, dx_I, \qquad e(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \ln |x| & \text{при} \quad n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{\sigma_n} \dfrac{|x|^{2-n}}{2-n} & \text{при} \quad n \geqslant 3, \end{cases}$$

т.е. e – стандартное фундаментальное решение сверточного типа для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$, а e_q – его аналог для действия на внешних формах (здесь σ_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$). Теперь для $f \in C^{s,\lambda,q+1}_{\delta+1}$, $g \in C^{s,\lambda,q-1}_{\delta+1}$ пусть

$$(\Phi_q f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \wedge \phi_q(x,y), \qquad (\widehat{\Phi}_q g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \wedge \widehat{\phi}_q(x,y), \tag{3.6}$$

где

$$\phi_q(x,y) = (d^{n-q-1})^*_y e_q(x,y), \quad \widehat{\phi}_q(x,y) = d^{n-q}_y e_q(x,y), \qquad n \geqslant 2.$$

Лемма 4. *Если $\delta > 0$, $\lambda \in (0,1)$, то градуированные потенциалы Φf, $\widehat{\Phi} g$, задаваемые формулой (3.6), удовлетворяют в смысле распределений на $\mathbb{R}^n$ равенствам*

$$d(\Phi f) = f, \qquad d^*(\Phi f) = 0, \qquad d^*(\widehat{\Phi} g) = g, \qquad d(\widehat{\Phi} g) = 0$$

для всех $f \in C^{0,\lambda,q+1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_d$, $g \in C^{0,\lambda,q-1}_{\delta+1} \cap \mathscr{S}_{d^*}$. Более того, если $0 < \delta < n-1$, то потенциалы (3.6) индуцируют ограниченные линейные операторы

$$\Phi\colon C^{0,\lambda,q+1}_{\delta+1} \to C^{1,\lambda,q}_{\delta}, \qquad \widehat{\Phi}\colon C^{0,\lambda,q-1}_{\delta+1} \to C^{1,\lambda,q}_{\delta}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что $\phi(x,y)$ есть фундаментальное решение комплекса де Рама, а $\widetilde{\phi}(x,y)$ есть фундаментальное решение сопряженного комплекса де Рама (см. [10]). Локально свойство Гёльдера сразу следует [2] из известных теорем о гладкости эллиптических потенциалов (см., например, [1]). Утверждение о поведении в бесконечности следует стандартным образом из структуры ядер $\phi(x,y)$ и $\widetilde{\phi}(x,y)$ и их поведения в бесконечности относительно x при каждом фиксированном y (и наоборот); ср. [5] для весовых пространств Соболева или [11] для многообразий с коническими особенностями.

Итак, лемма 4 дает доказательство утверждения 1) при $s = 0$.

Далее мы воспользуемся следующим разложением фундаментального решения оператора Лапласа по однородным гармоническим многочленам $\{h^{(j)}_k\}$, образующим ортонормированный базис в $L^2(\partial B_1)$ на единичной сфере ∂B_1 в $\mathbb{R}^n$:

$$e(x-y) = e(x-0) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{J(k)} \frac{h^{(j)}_k(x) h^{(j)}_k(y)}{(n+2k-2)|x|^{n+2k-2}}\,; \tag{3.7}$$

здесь $n \geqslant 2$, k – степень однородности многочлена, j – номер однородного многочлена степени k в базисе, а ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах их конуса $\{|x| > |y|\}$ в $\mathbb{R}^{2n}$ (см., например, [5], [13]). Положим

$$\phi_m(x,y) = \phi(x,y) + \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{J(k)} \frac{h^{(j)}_k(\vartheta(x))\, d^*_y(h^{(j)}_k(y)(\star dy_I))\, dx_I}{(n+2k-2)\vartheta^{n+2k-2}(x)}\,, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\widehat{\phi}_m(x,y) = \widehat{\phi}(x,y) + \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{J(k)} \frac{h^{(j)}_k(\vartheta(x))\, d_y(h^{(j)}_k(y)(\star dy_I))\, dx_I}{(n+2k-2)\vartheta^{n+2k-2}(x)}\,, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\vartheta(x)$ – какая-нибудь гладкая функция такая, что $\vartheta(x) = |x|$ для $|x| \geqslant 2$ и $0 < 1/\vartheta(x) \leqslant 1$.

Лемма 5. *Пусть $n-1+m<\delta<n+m$, $m\in\mathbb{Z}_+$. Тогда интегралы*

$$\Phi_m f(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\wedge\phi_m(x,y),\qquad \widehat{\Phi}_m g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\wedge\widehat{\phi}_m(x,y)$$

индуцируют ограниченные линейные операторы

$$\Phi_m\colon C^{0,\lambda,q+1}_{\delta+1}\to C^{1,\lambda,q}_{\delta},\qquad \widehat{\Phi}_m\colon C^{0,\lambda,q-1}_{\delta+1}\to C^{1,\lambda,q}_{\delta}$$

при $\lambda\in(0,1)$. Более того, потенциал $\Phi_m\oplus\widehat{\Phi}_m$ совпадает с потенциалом $\Phi\oplus\widehat{\Phi}$ на пространстве $R^{0,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1}$.

Доказательство. По построению потенциал $\Phi_m f+\widetilde{\Phi}_m g$ совпадает с интегралом $\Phi f+\widehat{\Phi}g$ на $R^{0,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1}$. Более того, из (3.7) следует, что ядра $\phi_m(x,y)$ и $\widetilde{\phi}_m(x,y)$ ведут себя как $|x-y|^{1-n-m}$ в бесконечности по x для каждого фиксированного y (и наоборот). Снова локально свойство Гёльдера следует из классических результатов о гладкости эллиптических потенциалов (см., например, [1], [2]) а утверждения о поведении в бесконечности следует стандартным образом из структуры ядер $\phi_m(x,y)$ и $\widetilde{\phi}_m(x,y)$, ср. [5] для весовых пространств Соболева или [11] для многообразий с коническими особенностями.

Это доказывает утверждение 2) для отображения (3.2) и (3.3) для $s=0$. Чтобы закончить доказательство теоремы для (3.2), нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. *Предположим, что P есть скалярный однородный оператор порядка $0\leqslant k\leqslant s$ с постоянными коэффициентами. Тогда*

1) *оператор P отображает пространство $C^{s,\lambda,q+1}_{\delta+1}\cap\mathscr{S}_d\oplus C^{s,\lambda,q-1}_{\delta+1}\cap\mathscr{S}_{d^*}$ непрерывно в пространство $R^{s-k,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1+k,}$, если $0<\delta<n-1$ и $n-1+m<\delta+k<n+m$;*
2) *оператор P отображает пространство $R^{s,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1}$ непрерывно в пространство $R^{s-k,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1+k}$, если $n-1+m<\delta<n+m$.*

Доказательство получается немедленно, поскольку любой скалярный оператор P порядка k с постоянными коэффициентами перестановочен с дифференциалами d и d^* и отображает $H^q_{\leqslant m}$ в $H^q_{\leqslant m-k}$.

Теперь мы можем рассуждать по индукции, поскольку интегрируя по частям для $f\in C^{s,\lambda,q+1}_{\delta+1}\cap\mathscr{S}_d$, $g\in C^{s,\lambda,q-1}_{\delta+1}\cap\mathscr{S}_{d^*}$ с использованием того факта, что ядро $e(x,y)$ является ядром сверточного типа, мы получаем

$$\partial^\alpha[(\Phi f)(x)+(\widehat{\Phi}g)(x)]=(\Phi\,\partial^\alpha f)(x)+(\widehat{\Phi}\,\partial^\alpha g)$$

для всех $\delta>0$ и $|\alpha|\leqslant s$. В самом деле, если выполнено одно из следующих двух условий:

- $0<\delta<n-1$ и $(f,g)\in C^{s,\lambda,q+1}_{\delta+1}\cap\mathscr{S}_d\oplus C^{s,\lambda,q-1}_{\delta+1}\cap\mathscr{S}_{d^*}$;
- $n-1+m<\delta<n+m$ и $(f,g)\in R^{s,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1}$,

то $(\partial^\alpha f,\partial^\alpha g)\in R^{s-1-|\alpha|,\lambda,q+1,q-1}_{\delta+1+|\alpha|}$ и

$$\partial^\alpha(\Phi f+\widehat{\Phi}g)=(\Phi_q\,\partial^\alpha f+\widehat{\Phi}\,\partial^\alpha g)=\Phi_m(\partial^\alpha f)+\widehat{\Phi}_m(\partial^\alpha g),$$
$$d\partial^\alpha(\Phi f+\widehat{\Phi}g)=\partial^\alpha f,\qquad d^*\,\partial^\alpha(\Phi f+\widehat{\Phi}g)=\partial^\alpha g$$

в силу свойств потенциалов $\Phi_m \oplus \widehat{\Phi}_m$ и $\Phi \oplus \widehat{\Phi}$, доказанных в лемме 5. В частности, $\partial^\alpha(\Phi f + \widehat{\Phi} g) \in C^{0,\lambda,q}_{\delta+|\alpha|}$ для всех $|\alpha| \leqslant s$ в соответствии с леммой 5. Следовательно, форма $u = (\Phi f + \widehat{\Phi} g) \in C^{s,\lambda,q}_\delta$ удовлетворяет (3.5).

Таким образом, мы доказали утверждения 1), 2) и 3) теоремы для (3.2) и $s \geqslant 1$.

Наконец, утверждение об отображении (3.3) следует из теоремы 2 и непрерывности операторов d, d^*, Φ, Φ_m, $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Phi}_m$ на шкале $C^{s,\lambda}_\delta$.

Поскольку операторы d^0, $(d^0)^*$, $(d^1)^*$ представляют операторы градиента, дивергенции и ротора в $\mathbb{R}^3$ соответственно, то теорема 3, в частности, проясняет поведение известного проектора Гельмгольца (из теории уравнений Навье–Стокса) на шкале весовых пространств Гёльдера (ср. [6; гл. 1, § 2] для пространства Лебега). Именно, обозначим через Σ^q замыкание пространства $\mathscr{D}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{S}_{d^*}$ в $L^{2,q}(\mathbb{R}^n)$. Ортогональный проектор $\Pi_q \colon L^{2,q}(\mathbb{R}^n) \to \Sigma^q$ называется *проектором Гельмгольца*. Пусть $\Sigma^{s,\lambda,q}_\delta$ обозначает замыкание пространства $\mathscr{D}^q(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{S}_{d^*}$ в $C^{s,\lambda,q}_\delta$.

Следствие 1. *Пусть $n \geqslant 2$, $\delta > 1$, $\delta - n \notin \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \lambda < 1$. Тогда для каждого $0 \leqslant q \leqslant n$ справедливо разложение*

$$I = d^*\Phi + d\widehat{\Phi} \qquad \text{на} \quad C^{s,\lambda,q}_\delta \quad \text{и} \quad C^{s+0,\lambda+0,q}_{\delta+0} \tag{3.8}$$

с непрерывными линейными операторами $d^*\Phi$ и $d\widehat{\Phi}$ в $C^{s,\lambda,q}_\delta$ и $C^{s+0,\lambda+0,q}_{\delta+0}$. Если $\delta > n/2$, то разложение (3.8) является $L^2(\mathbb{R}^n)$-ортогональным, а проектор Π равен $d^*\Phi$ на $C^{s+0,\lambda+0,q}_{\delta+0}$ и непрерывно отображает $C^{s+0,\lambda+0,q}_{\delta+0}$ в $\Sigma^{s,\lambda,q}_\delta$.

Доказательство. Напомним, что $d^q = 0$ для $q < 0$ и $q \geqslant n$. По теореме 3 при $\delta > 1$, $\delta - n \notin \mathbb{Z}_+$ линейные операторы $d^*\Phi$ и $d\widehat{\Phi}$ ограничены и в $C^{s,\lambda,q}_\delta$, и в $C^{s+0,\lambda+0,q}_{\delta+0}$. Поскольку $e(x-y)$ есть фундаментальное решение оператора Лапласа и имеет сверточный тип, то для всех $u \in C^{s,\lambda,q}_\delta$, $\delta > 1$, $\delta - n \notin \mathbb{Z}_+$, мы имеем

$$\Delta^q(u - d^*\Phi u - d\widehat{\Phi} u) = 0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^n$$

в смысле распределений. А так как форма $(u - (d^*\Phi u - d\widehat{\Phi} u)$ имеет гармонические коэффициенты и равна нулю в бесконечности при $\delta > 1$, то по теореме Лиувилля она тождественно равна нулю, т.е. справедливо разложение (3.8).

Если $\delta > n/2$, $\delta - n \notin \mathbb{Z}_+$, то $C^{s,\lambda,q}_\delta$ непрерывно вложено в $L^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ и для каждой формы $u \in C^{s,\lambda,q}_\delta$ формы $d^*\Phi u$ и $d\widehat{\Phi} u$ являются $L^2(\mathbb{R}^n)$-ортогональными, так как в этом случае можно пользоваться интегрированием по частям, а $d \circ d = 0$. Наконец, поскольку $d^* \circ d^* = 0$, то из теоремы 3 следует, что оператор $d^*\Phi$ непрерывно отображает $C^{s+0,\lambda+0,q}_{\delta+0}$ в $\Sigma^{s,\lambda,q}_\delta$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] N. M. Gunther, *La théorie du potentiel et ses applications aux problémes fondamentaux de la physique mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1934.

[2] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[3] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

[4] S. Krantz, “Intrinsic Lipschitz classes on manifolds with applications to complex function theory and estimates for the $\overline{\partial}$ and $\overline{\partial}_b$ equations”, *Manuscripta Math.*, **24**:4 (1978), 351–378.

[5] R. McOwen, “Behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **32**:6 (1979), 783–795.

[6] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.

[7] V. Mazya, J. Rossmann, “Schauder estimates for solutions to boundary value problems for second order elliptic systems in polyhedral domains”, *Appl. Anal.*, **83**:3 (2004), 271–308.

[8] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях”, Тр. ММО, **15**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1966, 400–451.

[9] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[10] Н. Н. Тарханов, *Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов*, Наука, Новосибирск, 1990.

[11] T. Behrndt, “On the Cauchy problem for the heat equation on Riemannian manifolds with conical singularities”, *Q. J. Math.*, **64**:4 (2011), 981–1007.

[12] L. Nirenberg, H. Walker, “The null spaces of elliptic partial differential operators in $\mathbb{R}^n$”, *J. Math. Anal. Appl.*, **42** (1973), 271–301.

[13] А. А. Шлапунов, “О задаче Коши для уравнения Лапласа”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:3 (1992), 205–215.

К. В. Сидорова (Гагельганс)
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
E-mail: ksenija.sidorova2017@yandex.ru

А. А. Шлапунов
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
E-mail: ashlapunov@sfu-kras.ru

Поступило
12.01.2018
Принято к публикации
30.01.2018