УДК 519.61

О НЕКОТОРЫХ ПРИЕМАХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИММЕТРИИ ДЛЯ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ИКРАМОВ Х. Д.

(Москва)

Описаны некоторые приемы использования известной априори симметрии решения или симметрий в матрице коэффициентов для понижения порядка линейно-алгебраических задач. Указаны приложения к решению интегральных уравнений, возникающих при расчете постоянных распространения поверхностных волн в диэлектрическом волноводе, поперечное сечение которого имеет нетривиальную группу симметрий.

1. Пусть решается система линейных уравнений

$$Ax=b \tag{1}$$

с $(n\times n)$-матрицей A, и пусть известно, что искомое решение x обладает симметрией, описываемой равенством

$$Px=x, \tag{2}$$

где P — некоторая матрица перестановки. Соотношение (2) означает, что x — собственный вектор матрицы P, соответствующий собственному значению 1. Пусть столбцы $(n\times r)$-матрицы Z образуют базис собственного подпространства матрицы P для собственного значения 1. Тогда для некоторого вектора y размерности r имеем $x=Zy$ и

$$AZy=b. \tag{3}$$

Пусть A_r — подматрица, образованная любыми r строками A, b_r — соответствующий подвектор в b. Из (3) следует, что

$$(A_rZ)\,y=b_r, \tag{4}$$

т. е. y является решением $(r\times r)$-системы (4). Если система (1) определена, то среди систем (4) также найдется определенная.

Так как собственное подпространство матрицы перестановки определяется без труда, то описанный простой прием эффективно понижает порядок решаемой системы с n до r. Заметим, что вместо (2) можно было бы рассмотреть условие $Px=-x$.

Приведем два примера применения этой идеи. Начнем с совсем элементарного случая, когда матрица P имеет вид

$$P_n=\begin{Vmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdots & \\ 1 & & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Для простоты считаем n числом четным: $n=2k$. Равенство (2) означает, что вектор x может быть представлен в виде

$$x=\begin{Vmatrix} x_k \\ P_k\,x_k \end{Vmatrix},$$

где P_k — матрица перестановки порядка k, аналогичная матрице P_n. Разобьем матрицу A на клетки порядка k:

$$A=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix},$$

и пусть $b=\|b_1 \vdots b_2\|^{\mathrm{T}}$, b_i имеют порядок k. Тогда x_k может быть найден решением

любой из $(k\times k)$-систем:

$$(A_{11}+A_{12}P_k)x_k=b_1, \tag{6}$$

$$(A_{21}+A_{22}P_k)x_k=b_2. \tag{7}$$

Формирование матриц этих систем сводится к суммированию соответствующих элементов матрицы A.

Отметим, что если в системе (1) вектор b нулевой, т. е. разыскивается ядро матрицы A, то из вырожденности A вытекает (при наличии предположенной симметрии в x) вырожденность матриц систем (6) и (7). Это замечание ниже будет использовано.

Приведем теперь более сложный пример реальной ситуации, в которой были использованы описанные соображения. В [1] предложена новая методика расчета собственных волн в диэлектрических волноводах с произвольным поперечным сечением, сводящая эту задачу к решению системы из четырех линейных однородных интегродифференциальных уравнений. Неизвестными являются функции u и v (составляющие вдоль оси волновода векторов электрической и магнитной напряженностей) и их производные $\partial u/\partial n$ и $\partial v/\partial n$ по направлению нормали к контуру Г поперечного сечения волновода. Интегрирование проводится вдоль Г; ядра интегральных операторов зависят от параметра h (постоянной распространения поверхностных волн), значения которого определяются условием, чтобы указанная система имела нетривиальное решение. Точный вид уравнений здесь не играет роли и не будет выписан.

При практическом расчете собственных волн интегродифференциальная система путем дискретизации сводится к алгебраической; неизвестными здесь являются значения функций u, v, $\partial u/\partial n$ и $\partial v/\partial n$ в выбранных узлах контура. Естественно, что при наличии симметрии в контуре она должна быть отражена в выборе узлов сетки.

Пусть рассматривается волновод, поперечное сечение которого имеет две перпендикулярные оси симметрии. Исходная система допускает решения, компоненты которых суть функции, обладающие симметрией или кососимметрией относительно этих осей. Такие решения как раз и представляют наибольший физический интерес. Рассмотрим, к примеру, вычисление собственной волны, в которой u и $\partial u/\partial n$ имеют симметрию относительно обеих осей, а v и $\partial v/\partial n$ симметричны относительно одной оси и кососимметричны относительно другой.

Пусть на каждой четверти контура взято k узлов дискретизации и узлы на разных четвертях расположены симметрично относительно осей. Тогда векторы u_n, v_n, w_n, z_n $(w=\partial u/\partial n,\ z=\partial v/\partial n)$ — дискретные аппроксимации соответствующих функций — можно представить в виде

$$u_n=\begin{Vmatrix} u_k \\ P_k u_k \\ u_k \\ P_k u_k \end{Vmatrix},\quad v_n=\begin{Vmatrix} v_k \\ -P_k v_k \\ v_k \\ -P_k v_k \end{Vmatrix},\quad w_n=\begin{Vmatrix} w_k \\ P_k w_k \\ w_k \\ P_k w_k \end{Vmatrix},\quad z_n=\begin{Vmatrix} z_k \\ -P_k z_k \\ z_k \\ -P_k z_k \end{Vmatrix}.$$

Здесь P_k — матрица перестановки, аналогичная (5).

Прежде всего нужно найти значение постоянной распространения h. Оно определяется из условия вырожденности матрицы $A(h)$ полной системы (ее порядок $4n$, поскольку исходная интегродифференциальная система содержала 4 уравнения и на контуре взято n точек). Однако сделанное при разборе первого примера замечание позволяет вычислять h из условия вырожденности матрицы $B(h)$ порядка $n=4k$, формируемой из матрицы $A(h)$. Та же матрица, соответствующая найденному значению h_0, используется для вычисления векторов u_k, v_k, w_k, z_k.

Заметим, что так как h_0 вычисляется лишь приближенно, то ни матрица $A(h_0)$, ни матрица $B(h_0)$ не будут точно вырожденными. Поэтому задача отыскания ядра

заменяется для матриц $A(h_0)$ либо $B(h_0)$ задачей вычисления собственных векторов, отвечающих младшему по модулю собственному значению. Для этой цели применяется метод обратных итераций. На каждом шаге этого метода приходится решать линейную систему с матрицей A либо B. Последнее снова в 4 раза сокращает порядок системы.

Описанный метод использования симметрии был реализован в НИВЦ МГУ программами для машины БЭСМ-6. Эти программы позволяют для волноводов с указанным типом симметрии брать на контуре до 140 узлов дискретизации.

2. В п. 1 речь шла об использовании априорно известной симметрии решения. Выясним, при каких условиях такую симметрию можно гарантировать. Вопрос этот будет рассмотрен в применении к задаче расчета собственных волн диэлектрического волновода. Для простоты будем считать, что непрерывная задача описывается одним интегродифференциальным уравнением, а не системой таких уравнений, как предполагалось в п. 1. Симметрии матрицы, которые будут получены ниже, существуют и в случае системы, но на уровне клеток, соответствующих отдельным интегродифференциальным уравнениям и компонентам неизвестной вектор-функции.

Как говорилось в конце п. 1, задача отыскания ядра для матрицы $A(h_0)$ заменяется задачей вычисления собственных векторов, отвечающих наименьшему по модулю собственному значению этой матрицы (напомним, что $A(h_0)$ почти вырождена). Поэтому посмотрим, что можно сказать о собственных векторах матрицы A. Будем при этом считать, что соответствующее собственное значение простое; это предположение, как правило, выполняется при расчете собственных волн волновода.

Пусть поперечное сечение волновода имеет нетривиальную группу симметрий. Каждой симметрии соответствует матрица перестановки P такая, что для матрицы A дискретизованной задачи выполняется соотношение

$$PAP^{\mathrm{T}}=A. \tag{8}$$

Если x — нормированный собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ, то из $Ax=\lambda x$ следует $APx=PAP^{\mathrm{T}}Px=\lambda Px$. Так как λ — простой корень, то либо $Px=x$, либо $Px=-x$. (На протяжении всей статьи предполагается, что рассматриваются лишь вещественные уравнения, матрицы, корни и т. д.) Таким образом, для искомого собственного вектора x выполнено условие (2). Заметим, что если P в (8) совпадает с матрицей (5), то матрица A называется центросимметричной; таким образом, в качестве частного случая получен известный факт центросимметричности либо косоцентросимметричности собственных векторов такой матрицы (см. [2]).

Рассмотрим применение этой техники к расчету двух конкретных контуров. В первом примере возьмем эллиптический волновод. Группа симметрий эллипса, не являющегося кругом, есть четверная группа Клейна; ее образующими можно считать отражения относительно главных осей эллипса. Пусть на контуре взято $n=4k$ точек. Обозначим через $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ следующие матрицы перестановок:

$$P^{(1)}=\begin{Vmatrix} P_{2k} & 0 \\ 0 & P_{2k} \end{Vmatrix}, \qquad P^{(2)}=P_n,$$

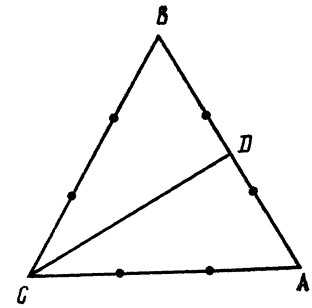
где P_n определена формулой (5). Вектор x порядка n, описывающий собственную волну эллиптического волновода, должен удовлетворять при каждом i, $i=1, 2$, одному из соотношений: $P^{(i)}x=x$ либо $-P^{(i)}x=x$. Следовательно, вектор x должен иметь одну из четырех форм:

$$\begin{Vmatrix} x_k \\ P_kx_k \\ x_k \\ P_kx_k \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} x_k \\ P_kx_k \\ -x_k \\ -P_kx_k \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} x_k \\ -P_kx_k \\ -x_k \\ P_kx_k \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} x_k \\ -P_kx_k \\ x_k \\ -P_kx_k \end{Vmatrix}.$$

В качестве второго примера рассмотрим волновод, сечение которого есть правильный треугольник, изображенный на фигуре. Для простоты будем предполагать,

что на контуре взято лишь 6 узлов. Группа симметрий правильного треугольника имеет порядок 6; ее образующими являются поворот на угол $\pi/3$ и отражение относительно какой-либо оси симметрии, например CD. Первому из этих преобразований соответствует матрица перестановки

$$P^{(1)}=\begin{Vmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{Vmatrix},$$



а второму — матрица перестановки

$$P^{(2)}=\begin{Vmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}P_2&0\\0&P_4\end{Vmatrix}$$

Матрица $P^{(1)}$ имеет собственное значение 1 кратности 2 и не имеет собственного значения -1, поэтому равенство $-P^{(1)}x=x$ возможно лишь для нулевого x. Базис собственного подпространства для $\lambda=1$ образуют векторы $e_1=(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$ и $e_2=(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$. Следовательно, искомый вектор x есть линейная комбинация e_1 и e_2. Из условия $P^{(2)}x=\pm x$ вытекает, что первые две компоненты вектора x либо совпадают, либо отличаются лишь знаком. Поэтому нормированный вектор x совпадает (с точностью до знака) с одним из двух векторов: $f_1=6^{-1/2}(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)^{\mathrm{T}}$ или $f_2=6^{-1/2}(1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1)^{\mathrm{T}}$.

В случае большего числа точек на контуре правильного треугольника сохраняется та же закономерность, что и в разобранном примере: использование симметрий позволяет в шесть раз понизить порядок задачи, если рассматривать систему лишь относительно узлов, расположенных на полустороне треугольника.

В работе не сформулированы общие результаты, однако примеры п. 2 ясно показывают, что снижение порядка возможно для любого волновода, сечение которого обладает нетривиальной группой симметрий.

Литература

1. *Коршунова Е. Н., Сивов А. Н.* Метод контурного интегрального уравнения для расчета собственных волн диэлектрических нитей произвольного сечения — Радиотехн. и электроника, 1975, т. 20, № 5, с. 1084—1087.
2 *Andrew A. L* Eigenvectors of certain matrices.— Linear Algebra and Appl., 1973, v. 7, № 2, p. 151—162.

Поступила в редакцию 9.VII.1979