И. В. Павлов, О. В. Назарько, Теорема о преобразовании свободного выбора для деформированных субмартингалов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2014, том 59, выпуск 3, 585–594

DOI: 10.4213/tvp4585

4. *Грубер П. М., Леккеркеркер К. Г.* Геометрия чисел. М.: Наука, 2008, 728 с.
5. *Касселс Дж.* Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965, 422 с.
6. *Мейзлер Д., Парасюк О., Рвачева Е.* О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей. — Укр. матем. журн., 1949, № 1, с. 9–20.
7. *Миталаускас А.* О многомерной предельной теореме для решетчатых распределений. — Тр. Лит. ССР, Сер. Б, 1960, т. 2, № 22, с. 3–14.
8. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
9. *Прохоров Ю. В.* О локальной предельной теореме для решетчатых распределений. — Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4, с. 535–538.
10. *Рауделюнас А.* О многомерной локальной предельной теореме, — Лит. мат. сб., 1964, т. 4, в. 1, с. 141–145.
11. *Розанов Ю. А.* О локальной предельной теореме теории вероятностей для решетчатых распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 2, с. 275–280.
12. *Сазонов В. В.* К многомерной центральной предельной теореме. — Лит. матем. сб., 1963, т. 1, с. 219–224.
13. *Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей. М.: Факториал, 1999, 296 с.
14. *Феллер В. В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
15. *Хинчин А. Я.* Математические основания квантовой статистики. М.-Л.: Гостехиздат, 1951.
16. *Хинчин А. Я.* Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ОНТИ, 1938, 117 с.

Поступила в редакцию
23.II.2014

 ПАВЛОВ И. В.*, ***НАЗАРЬКО О. В.****

ТЕОРЕМА О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СВОБОДНОГО ВЫБОРА ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СУБМАРТИНГАЛОВ[1)]

Рассматривается семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathscr{F}_n$, называемое деформацией 1-го рода, если при всех $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ $Q^{(n+1)}|_{\mathscr{F}_n} \ll Q^{(n)}$, и деформацией 2-го рода, если $Q^{(n+1)}|_{\mathscr{F}_n} \gg Q^{(n)}$. Для конечных моментов остановки вводятся меры $Q^{(\tau)}$ по формуле $Q^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} Q^{(i)}(A\{\tau = i\})$, где $A \in \mathscr{F}_\tau$. С помощью этих мер формулируется и доказывается обобщение теоремы Дж. Л. Дуба о преобразовании свободного выбора: для деформированных субмартингалов 1-го рода (в случае соседних моментов остановки) и 2-го рода (в случае ограниченно удаленных друг от друга моментов остановки).

Ключевые слова и фразы: деформация, деформированный стохастический базис, деформированный (суб-, супер-) мартингал, момент остановки, теорема о преобразовании свободного выбора.

1. Введение. В начале 50-х годов прошлого столетия американский математик Дж. Л. Дуб доказал (для дискретного и непрерывного времени) теорему о преобразовании свободного выбора (ТПСВ) для (супер-, суб-) мартингалов (см. [1], современные

* Ростовский государственный строительный университет, Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: pavloviv2005@mail.ru

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00637а).

формулировки можно найти в [2], [3]). Практически сразу после этого (данный процесс продолжается и сейчас) стали появляться работы, обобщающие указанный результат в различных направлениях. В 1955 г. Бохнер (см. [4]) определил мартингалы и моменты остановки для процессов с временными индексами из произвольного направленного множества. Сформулированные им в виде гипотез различные варианты ТПСВ исследовались длительное время многими математиками (см., например, [5]–[7]) и породили огромное число новых тонких понятий и результатов. Другое направление в обобщении ТПСВ — это обобщение на мартингалы со значениями в различных множествах. Упомянем лишь недавнюю работу Гроблера, где ТПСВ доказана для субмартингалов со значениями в пространствах Рисса, т.е. линейных упорядоченных пространствах, где отношение порядка согласовано с алгебраической структурой (см. [8, теорема 6.8]), а также работу Ало, Корвина и Робертса, где ТПСВ доказана для мартингалов, значения которых суть замкнутые выпуклые множества (см. [9, с. 4]). К более «экзотическим» направлениям обобщения ТПСВ относятся следующие работы: статья Букдана и Энгельберта [10], где ТПСВ доказана для введенных авторами рандомизированных моментов остановки; статья Ху, Ма, Пенга и Яо, в которой получен вариант ТПСВ, когда вместо обычного математического ожидания используется так называемое $\mathscr{F}$-согласованное нелинейное математическое ожидание (см. [11, теорема 4.3, с. 1532]); статья Кокио, где ТПСВ доказана для квантовых мартингалов (см. [12, предложение 3.9, с. 164]).

Данная работа посвящена развитию теории преобразования свободного выбора (в случае дискретного времени) на структуре, значительно более общей, чем классический стохастический базис. Эта структура названа авторами деформированным стохастическим базисом, который представляет собой фильтрованное пространство вместе с некоторым семейством вероятностей.

Пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ — фильтрованное пространство с дискретным временем, где Ω — произвольное множество, а $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр на нем (фильтрация). Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathscr{F}_n$, будем называть деформацией (выбор такого термина подробно аргументирован в [13]). Назовем $\mathbf{Q}$ деформацией 1-го рода (D1), если при всех $n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ выполняются соотношения абсолютной непрерывности $Q^{(n+1)}|_{\mathscr{F}_n} \ll Q^{(n)}$, и деформацией 2-го рода (D2), если выполняются соотношения $Q^{(n+1)}|_{\mathscr{F}_n} \gg Q^{(n)}$.

Предположим, что при всех $n \in \mathbf{N}$ случайные величины Z_n принадлежат пространствам $L_1(\Omega, \mathscr{F}_n, Q^{(n)})$. Если $\mathbf{Q}$ есть D1 (соответственно D2), то процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathscr{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ назовем деформированным субмартингалом 1-го рода — DSubM1 (соответственно 2-го рода — DSubM2) при выполнении для всех $n \in \mathbf{N}$ $Q^{(n+1)}$-п.н. (соответственно $Q^{(n)}$-п.н.) неравенств $Z_n \leqslant E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]$. Аналогично определяются деформированные супермартингалы и мартингалы 1-го и 2-го рода (DSupM1, DSupM2, DM1, DM2).

2. Меры $Q^{(\tau)}$. Пусть $\tau\colon \Omega \to \mathbf{N}$ — конечный момент остановки (м.о.) относительно фильтрации $(\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ (в данной работе мы будем рассматривать только такие м.о.). Пусть также $\mathbf{Q}$ — произвольная деформация.

Определение 1. Для любого $A \in \mathscr{F}_\tau$ обозначим

$$Q^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} Q^{(i)}(A\{\tau = i\}).$$

Ясно, что $Q^{(\tau)}$ — неотрицательная σ-конечная мера, совпадающая на $\{\tau = n\}$ при любом $n \in \mathbf{N}$ с мерой $Q^{(n)}$. Если м.о. τ принимает лишь конечное число значений, то мера $Q^{(\tau)}$ ограничена. В дальнейшем, если интеграл по мере $Q^{(\tau)}$ от $\mathscr{F}_\tau$-измеримой случайной величины случайной величины f определен, то он обозначается $E^{(\tau)}(f) = E^{Q^{(\tau)}}(f)$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть случайная величина f измерима либо относительно $\mathscr{F}_\tau$, либо относительно $\mathscr{F}_n$ при некотором $n \in \mathbf{N}$. Тогда $fI_{\{\tau=n\}}$ измерима как относительно $\mathscr{F}_\tau$, так и относительно $\mathscr{F}_n$, причем справедливо равенство $E^{(\tau)}(fI_{\{\tau=n\}}) = E^{(n)}(fI_{\{\tau=n\}})$. Если g — другая такая же случайная величина, то равенство $fI_{\{\tau=n\}} = gI_{\{\tau=n\}}$ (или неравенство $fI_{\{\tau=n\}} \geqslant gI_{\{\tau=n\}}$) выполняется $Q^{(\tau)}$-п.в. тогда и только тогда, когда оно выполняется $Q^{(n)}$-п.н.

Предложение 1. *Пусть f измерима относительно $\mathscr{F}_\tau$ и либо $f \geqslant 0$ $Q^{(\tau)}$-п.в., либо $f \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\tau, Q^{(\tau)})$. Тогда*

$$E^{(\tau)}(f) = \sum_{i=0}^{\infty} E^{(i)}(fI_{\{\tau=i\}}). \tag{1}$$

Доказательство немедленно следует из замечания 1.

Предложение 2. *Пусть м.о. τ и ν таковы, что $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant 1$, случайная величина f измерима относительно $\mathscr{F}_\nu$ и $f \geqslant 0$ $Q^{(\nu)}$-п.в. Тогда $Q^{(\nu)}$-п.в. справедливо равенство*

$$E^{(\nu)}[f \mid \mathscr{F}_\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} fI_{\{\tau=k\}}I_{\{\nu=k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}[fI_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k]I_{\{\tau=k\}}I_{\{\nu=k+1\}}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя формулу (1), имеем при $A \in \mathscr{F}_\tau$:

$$\begin{aligned} &E^{(\nu)}(I_A E^{(\nu)}[f \mid \mathscr{F}_\tau]) = E^{(\nu)}(fI_A) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k)}(fI_A I_{\{\nu=k\}} I_{\{\tau=k\}}) + \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(fI_A I_{\{\nu=k+1\}} I_{\{\tau=k\}}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &E^{(\nu)}\left(I_A\left\{\sum_{k=0}^{\infty} fI_{\{\nu=k\}}I_{\{\tau=k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}\Big[fI_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k\Big]I_{\{\nu=k+1\}}I_{\{\tau=k\}}\right\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E^{(\nu)}\Big(fI_A I_{\{\nu=k\}} I_{\{\tau=k\}}\Big) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} E^{(\nu)}\Big(I_A E^{(k+1)}\Big[fI_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k\Big] I_{\{\nu=k+1\}} I_{\{\tau=k\}}\Big). \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} E^{(\nu)}\Big(fI_A I_{\{\nu=k\}} I_{\{\tau=k\}}\Big) &= \sum_{i=0}^{\infty} E^{(i)}\Big(fI_A I_{\{\nu=k\}} I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=i\}}\Big) \\ &= E^{(k)}\Big(fI_A I_{\{\nu=k\}} I_{\{\tau=k\}}\Big). \end{aligned}$$

Так как $I_A I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}} = I_A I_{\{\nu>\tau\}} I_{\{\tau=k\}}$ является $\mathscr{F}_k$-измеримой случайной величиной, то, применяя ($Q^{(k+1)}$-п.н.) простые свойства условных математических ожиданий и замечание 1, получаем:

$$\begin{aligned} &E^{(\nu)}\Big(I_A E^{(k+1)}[fI_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\nu=k+1\}} I_{\{\tau=k\}}\Big) \\ &= E^{(\nu)}\Big(E^{(k+1)}\Big[fI_A I_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k\Big] I_{\{\nu=k+1\}} t I_{\{\tau=k\}}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} E^{(i)}\Big(E^{(k+1)}[fI_A I_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\nu=k+1\}} I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=i\}}\Big) \\ &= E^{(k+1)}\Big(E^{(k+1)}\Big[fI_A I_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\nu=k+1\}} I_{\{\tau=k\}}\Big) \\ &= E^{(k+1)}\Big(fI_A I_{\{\nu=k+1\}} I_{\{\tau=k\}}\Big). \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (2) доказано.

Моменты остановки τ и ν, удовлетворяющие условию $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant 1$, мы будем называть соседними.

Следствие 1. *Если $f \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\nu, Q^{(\nu)})$, то равенство* (2) *выполняется.*

Теорема 1. *Пусть м.о. τ и ν таковы, что $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$.*
1) *Если $\mathbf{Q}$ есть* D1, *то $Q^{(\nu)}|_{\mathscr{F}_\tau} \ll Q^{(\tau)}$.*
2) *Если $\mathbf{Q}$ есть* D2, *то $Q^{(\tau)} \ll Q^{(\nu)}|_{\mathscr{F}_\tau}$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathscr{F}_\tau$. Сначала докажем теорему для случая $N = 1$.

1) Предположим, что $\mathbf{Q}$ есть D1. Мы будем пользоваться очевидным равенством

$$Q^{(\nu)}(A) = Q^{(0)}(A\{\nu = 0\}) + \sum_{k=0}^{\infty} Q^{(k+1)}(A\{\nu = k+1\}).$$

Пусть $Q^{(\tau)}(A) = 0$, т.е. $Q^{(i)}(A\{\tau = i\}) = 0$ для любого $i \in \mathbf{N}$. Из вложения $\{\nu = 0\} \subset \{\tau = 0\}$ вытекает, что $Q^{(0)}(A\{\nu = 0\}) \leqslant Q^{(0)}(A\{\tau = 0\}) = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} Q^{(k+1)}(A\{\nu = k+1\}) &= Q^{(k+1)}(A\{\nu = k+1\}\{\tau = k+1\}) \\ &\quad + Q^{(k+1)}(A\{\nu = k+1\}\{\tau = k\}) \\ &\leqslant Q^{(k+1)}(A\{\tau = k+1\}) + Q^{(k+1)}(A\{\tau = k\}) \\ &= Q^{(k+1)}(A\{\tau = k\}). \end{aligned}$$

Из того, что $\mathbf{Q}$ есть D1, получаем:

$$Q^{(k)}(A\{\tau = k\}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^{(k+1)}(A\{\tau = k\}) = 0.$$

Следовательно, $Q^{(\nu)}(A) = 0$.

2) Предположим, что $\mathbf{Q}$ есть D2. Пусть $Q^{(\nu)}(A) = 0$, т.е. $Q^{(i)}(A\{\nu = i\}) = 0$ для любого $i \in \mathbf{N}$. Имеем:

$$\begin{aligned} Q^{(i)}(A\{\tau = i\}) &= Q^{(i)}(A\{\tau = i\}\{\nu = i\}) + Q^{(i)}(A\{\tau = i\}\{\nu = i+1\}) \\ &= Q^{(i)}(A\{\tau = i\}\{\nu = i+1\}). \end{aligned}$$

Так как $\{\nu > \tau\} \in \mathscr{F}_\tau$, то $A\{\tau = i\}\{\nu = i+1\} = A\{\tau = i\}\{\nu > \tau\} \in \mathscr{F}_i$. Поэтому

$$\begin{aligned} Q^{(i+1)}(A\{\nu = i+1\}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad Q^{(i+1)}(A\{\tau = i\}\{\nu = i+1\}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad Q^{(i)}(A\{\tau = i\}\{\nu = i+1\}) = 0 \end{aligned}$$

(последняя импликация вытекает из того, что $\mathbf{Q}$ есть D2). В результате $Q^{(\tau)}(A) = 0$, что и требовалось.

Доказательство теоремы для произвольного $N \in \mathbf{N}$ легко получается рассмотрением связывающей последовательности м.о. $\sigma_n = \nu \wedge (\tau + n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, удовлетворяющей следующим условиям:

(i) $\tau = \sigma_0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \cdots \leqslant \sigma_N = \nu$;

(ii) $0 \leqslant \sigma_{n+1} - \sigma_n \leqslant 1$.

Моменты остановки τ и ν, удовлетворяющие условию $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$, будем называть ограниченно удаленными друг от друга. Ясно, что если м.о. τ и ν ограничены, то они ограниченно удалены друг от друга.

Следствие 2. *Если ν принимает конечное число значений* (*т.е. ограничен*) *и $\tau \leqslant \nu$, то выполняются свойства* 1) *и* 2) *теоремы* 1.

В п. 3 нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть м.о. τ ограничен, а $\mathbf{Q}$ есть* D1 *либо* D2. *Тогда $Q^{(\tau)}(\Omega) > 0$.*

Доказательство. 1) Пусть $\tau \leqslant N < \infty$, а $\mathbf{Q}$ есть D1. Предположим, что $Q^{(\tau)}(\Omega) = 0$. Тогда для всех $k \leqslant N$ имеем $Q^{(k)}(\tau = k) = 0$ и, следовательно, $Q^{(N)}(\tau = k) = 0$. Отсюда вытекает противоречивое равенство $Q^{(N)}(\Omega) = 0$. Таким образом, $Q^{(\tau)}(\Omega) > 0$.

2) Пусть $\mathbf{Q}$ есть D2. Опять предполагаем противное: $Q^{(\tau)}(\Omega) = 0$. Покажем, что $Q^{(k)}(\tau > k) > 0$ для всех $k \leqslant N$, что противоречит ограниченности τ. Так как $Q^{(0)}(\tau = 0) = 0$, то $Q^{(0)}(\tau > 0) = 1$. Обозначим $n := \min\{k\colon Q^{(k)}(\tau > k) = 0\}$. Если $n < \infty$, то $Q^{(n)}(\tau > n) = 0$ и $Q^{(k)}(\tau > k) > 0$ при $k < n$. Так как $Q^{(n)}(\tau = n) = 0$, то $Q^{(n)}(\tau > n-1) = 0$, и из того, что $\mathbf{Q}$ есть D2, вытекает противоречивое равенство $Q^{(n-1)}(\tau > n-1) = 0$. Следовательно, $n = \infty$ и противоречие с ограниченностью τ дает $Q^{(\tau)}(\Omega) > 0$.

Отметим, что если м.о. τ неограничен, то легко конструируются примеры деформаций 1-го и 2-го рода, для которых $Q^{(\tau)}(\Omega) = 0$.

3. Теорема о преобразовании свободного выбора для соседних моментов остановки.

Предложение 4. *Пусть* $(Z_n, \mathscr{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *есть* DSubM, *а моменты остановки* τ *и* ν *таковы, что* $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant 1$ *и* $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\nu, Q^{(\nu)})$.

1) *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D1, *то* $E^{(\nu)}[Z_\nu \mid \mathscr{F}_\tau] \geqslant Z_\tau$ $Q^{(\nu)}|_{\mathscr{F}_\tau}$*-п.в.*

2) *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2, *то* $E^{(\nu)}[Z_\nu \mid \mathscr{F}_\tau] \geqslant Z_\tau$ $Q^{(\tau)}$*-п.в.*

Доказательство. Применив формулу (2), имеем:

$$
\begin{aligned}
E^{(\nu)}[Z_\nu \mid \mathscr{F}_\tau] &= \sum_{k=0}^{\infty} Z_\nu I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}[Z_\nu I_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} Z_k I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}[Z_{k+1} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}}.
\end{aligned}
$$

Полученное равенство выполняется $Q^{(\nu)}$-п.в.

1) Так как $E^{(k+1)}[Z_{k+1} \mid \mathscr{F}_k] \geqslant Z_k$ $Q^{(k+1)}$-п.н., то по замечанию 1

$$
E^{(k+1)}[Z_{k+1} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}} \geqslant Z_k I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}} \quad Q^{(\nu)}\text{-п.н.}
$$

Поэтому $Q^{(\nu)}$-п.в. имеем:

$$
\begin{aligned}
E^{(\nu)}[Z_\nu \mid \mathscr{F}_\tau] &\geqslant \sum_{k=0}^{\infty} Z_k I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} Z_k I_{\{\tau=k\}} = Z_\tau.
\end{aligned}
$$

2) Из теоремы 1 вытекает, что $Q^{(\tau)} \ll Q^{(\nu)}$ на $\mathscr{F}_\tau$. Поэтому полученное в начале доказательства равенство выполняется $Q^{(\tau)}$-п.в. Так как по условию данного предложения $E^{(k+1)}[Z_{k+1} \mid \mathscr{F}_k] \geqslant Z_k$ $Q^{(k)}$-п.н., то по замечанию 1 выполняется неравенство $E^{(k+1)}[Z_{k+1} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\tau=k\}} \geqslant Z_k I_{\{\tau=k\}}$ $Q^{(\tau)}$-п.в. Следовательно, $Q^{(\tau)}$-п.в. имеем:

$$
\begin{aligned}
&E^{(k+1)}[Z_{k+1} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}} = E^{(k+1)}[Z_{k+1} \mid \mathscr{F}_k] I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu>\tau\}} \\
&\quad \geqslant Z_k I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu>\tau\}} = Z_k I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $Q^{(\tau)}$-п.в. $E^{(\nu)}[Z_\nu \mid \mathscr{F}_\tau] \geqslant Z_\tau$.

Принимая во внимание предложение 3, обозначим

$$
R^{(n)} := Q^{(\nu\wedge n)} / Q^{(\nu\wedge n)}(\Omega).
$$

Теорема 2. *Пусть* $(Z_n, \mathscr{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *есть* DSubM *и момент остановки* ν *таков, что* $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\nu, Q^{(\nu)})$.

1) *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D1, *то* $(Z_{\nu\wedge n}, \mathscr{F}_{\nu\wedge n}, R^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ — DSubM1.

2) *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2, *то* $(Z_{\nu\wedge n}, \mathscr{F}_{\nu\wedge n}, R^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ — DSubM2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (1) легко следует, что $E^{Q^{(\nu\wedge n)}}|Z_{\nu\wedge n}|<\infty$. Теперь нужные субмартингальные неравенства вытекают из предложения 4.

Следствие 3. *Предложение* 4 *и теорема* 2 *с очевидными видоизменениями справедливы для* DSupM *и для* DM.

4. Операторы $E_\tau^{(\nu)}$ для соседних м.о. τ и ν. Рассмотрим пространства $L_p(\Omega,\mathscr{F}_\tau,Q^{(\tau)})$. Легко видеть, что

$$\|f\|_{L_p(\Omega,\mathscr{F}_\tau,Q^{(\tau)})}=\left(\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i)}(|f|^pI_{\{\tau=i\}})\right)^{1/p}$$

при $1\leqslant p<\infty$ и

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_\tau,Q^{(\tau)})}=\sup_k\|fI_{\{\tau=k\}}\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_k,Q^{(k)})}.$$

Для деформации 2-го рода $\mathbf{Q}$ введем процесс плотностей $(h^{(n)},\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ согласно формуле $dQ^{(n)}=h^{(n)}dQ^{(n+1)}|_{\mathscr{F}_n}$. Будем говорить, что $\mathbf{Q}$

— ограничена (BD2), если $\|h^{(n)}\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_n,Q^{(n)})}<\infty$ для любого $n\in\mathbf{N}$;

— равномерно ограничена (UBD2), если $\sup_n\|h^{(n)}\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_n,Q^{(n)})}<\infty$.

Пусть $0\leqslant\nu-\tau\leqslant 1$. Рассмотрим операторы $E_\tau^{(\nu)}f:=E^{(\nu)}[f\mid\mathscr{F}_\tau]$.

Предложение 5. 1) *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2, *то*

$$E_\tau^{(\nu)}\colon L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_\nu,Q^{(\nu)})\to L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_\tau,Q^{(\tau)})$$

— ограниченный линейный оператор с нормой 1.

2) *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* UBD2, *то* $E_\tau^{(\nu)}\colon L_p(\Omega,\mathscr{F}_\nu,Q^{(\nu)})\to L_p(\Omega,\mathscr{F}_\tau,Q^{(\tau)})$ *— ограниченный линейный оператор при любом* $1\leqslant p<\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как $Q^{(\tau)}\ll Q^{(\nu)}|_{\mathscr{F}_\tau}$ (см. утверждение 2) теоремы 1), то

$$\|E_\tau^{(\nu)}f\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_\tau,Q^{(\tau)})}\leqslant\|E_\tau^{(\nu)}f\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_\tau,Q^{(\nu)})}\leqslant\|f\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_\nu,Q^{(\nu)})}.$$

2) Воспользовавшись формулой (2), получаем при $p=1$:

$$\begin{aligned}
&\|E_\tau^{(\nu)}f\|_{L_1(\Omega,\mathscr{F}_\tau,Q^{(\tau)})}=E^{(\tau)}(|E_\tau^{(\nu)}f|)\leqslant E^{(\tau)}(E_\tau^{(\nu)}|f|)\\
&\overset{(1)}{=}\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i)}\Big(E_\tau^{(\nu)}(|f|)I_{\{\tau=i\}}\Big)=\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|f|I_{\{\tau=k\}}I_{\{\nu=k\}}I_{\{\tau=i\}}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k=0}^{\infty}E^{(k+1)}\Big[|f|I_{\{\nu=k+1\}}\mid\mathscr{F}_k\Big]I_{\{\tau=k\}}I_{\{\nu=k+1\}}I_{\{\tau=i\}}\right)\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i)}\Big(|f|I_{\{\tau=i\}}I_{\{\nu=i\}}\Big)+\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i)}\Big(E^{(i+1)}\Big[|f|I_{\{\tau=i\}}I_{\{\nu=i+1\}}\mid\mathscr{F}_i\Big]\Big)\\
&\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i)}\Big(|f|I_{\{\tau=i\}}I_{\{\nu=i\}}\Big)+\sum_{i=0}^{\infty}c^{(i)}E^{(i+1)}\Big(|f|I_{\{\tau=i\}}I_{\{\nu=i+1\}}\Big)\\
&\leqslant c\left(\sum_{k=0}^{\infty}E^{(k)}\Big(|f|I_{\{\tau=k\}}I_{\{\nu=k\}}\Big)+\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i+1)}\Big(|f|I_{\{\tau=i\}}I_{\{\nu=i+1\}}\Big)\right)\\
&=c\left(E^{(0)}\Big(|f|I_{\{\tau=0\}}I_{\{\nu=0\}}\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}E^{(k)}\Big(|f|I_{\{\tau=k\}}I_{\{\nu=k\}}\Big)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i+1)}\Big(|f|I_{\{\tau=i\}}I_{\{\nu=i+1\}}\Big)\right)
\end{aligned}$$

$$
\overset{i=k-1}{=} c\biggl(E^{(0)}\Bigl(|f|I_{\{\nu=0\}}\Bigr)+\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i+1)}\Bigl(|f|I_{\{\tau=i+1\}}I_{\{\nu=i+1\}}\Bigr)
+\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i+1)}\Bigl(|f|I_{\{\tau=i\}}I_{\{\nu=i+1\}})\Bigr)\biggr)
$$

$$
= c\biggl(E^{(0)}\Bigl(|f|\cdot I_{\{\nu=0\}}\Bigr)+\sum_{i=0}^{\infty}E^{(i+1)}\Bigl(|f|I_{\{\nu=i+1\}}\Bigr)\biggr)
$$

$$
= c\sum_{k=0}^{\infty}E^{(k)}\Bigl(|f|I_{\{\nu=k\}}\Bigr)=c\|f\|_{L_1(\Omega,\mathscr{F}_\nu,Q^{(\nu)})}.
$$

Для $1<p<\infty$ нужный результат вытекает из интерполяционной теоремы Рисса–Торина.

Следствие 4. *Предположим, что ν принимает лишь конечное число значений. Тогда результат пункта* 2) *предыдущего предложения справедлив, если* $\mathbf{Q}$ *есть* BD2.

5. Операторы $E_\tau^{(\nu)}$ для ограниченно удаленных друг от друга м.о. τ и ν. Прежде всего докажем следующее предложение.

Предложение 6. *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2, *то $Q^{(\tau)}$-п.в. справедливо равенство*

$$
E^{(\nu)}[f\mid\mathscr{F}_\tau]=\sum_{k=0}^{\infty}fI_{\{\tau=k\}}I_{\{\nu=k\}}+\sum_{k=0}^{\infty}E^{(k+1)}[fI_{\{\nu=k+1\}}\mid\mathscr{F}_k]I_{\{\tau=k\}}. \tag{3}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1 $Q^{(\tau)}\ll Q^{(\nu)}$ на $\mathscr{F}_\tau$. Следовательно, равенство (2) выполняется и $Q^{(\tau)}$-п.в. Но из замечания 1 вытекает, что $Q^{(\tau)}$-п.в. правая часть равенства (2) совпадает с правой частью равенства (3). Таким образом, соотношение (3) доказано.

Дальнейшая наша цель — обобщение формулы (3).

Теорема 3. *Пусть $\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\dots\leqslant\tau_N$ — возрастающая последовательность м.о. такая, что $\tau_{i+1}-\tau_i\leqslant 1$, $i=0,1,\dots,N-1$. Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2, *а f есть $\mathscr{F}_{\tau_N}$-измеримая случайная величина такая, что $f\geqslant 0$ $Q^{(\tau_N)}$-п.в., то $Q^{(\tau_0)}$-п.в. справедлива формула*

$$
E_{\tau_0}^{(\tau_1)}E_{\tau_1}^{(\tau_2)}\dots E_{\tau_{N-1}}^{(\tau_N)}f=\sum_{k=0}^{\infty}I_{\{\tau_0=k\}}\sum_{i=0}^{N}E_k^{(k+i)}\Bigl(fI_{\{\tau_N=k+i\}}\Bigr). \tag{4}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по N. При $N=1$ формула (4) совпадает с доказанной ранее формулой (3). Пусть формула (4) верна, если в ней вместо N стоит $N-1$. Так как $\mathbf{Q}$ есть D2, то по формуле (3) $Q^{(\tau_{N-1})}$-п.в. имеем:

$$
E_{\tau_{N-1}}^{(\tau_N)}f=\sum_{j=0}^{\infty}fI_{\{\tau_{N-1}=j\}}I_{\{\tau_N=j\}}+\sum_{j=0}^{\infty}E_j^{(j+1)}\Bigl(fI_{\{\tau_N=j+1\}}\Bigr)I_{\{\tau_{N-1}=j\}}. \tag{5}
$$

Ясно, что $E_{\tau_{N-1}}^{(\tau_N)}f\geqslant 0$ $Q^{(\tau_{N-1})}$-п.в. По предположению индукции получаем:

$$
E_{\tau_0}^{(\tau_1)}E_{\tau_1}^{(\tau_2)}\dots E_{\tau_{N-1}}^{(\tau_N)}f=E_{\tau_0}^{(\tau_1)}E_{\tau_1}^{(\tau_2)}\dots E_{\tau_{N-2}}^{(\tau_{N-1})}\Bigl(E_{\tau_{N-1}}^{(\tau_N)}f\Bigr)
$$

$$
=\sum_{k=0}^{\infty}I_{\{\tau_0=k\}}\sum_{i=0}^{N-1}E_k^{(k+i)}\Bigl(E_{\tau_{N-1}}^{(\tau_N)}fI_{\{\tau_{N-1}=k+i\}}\Bigr).
$$

Применяя равенство (5), находим:

$$
I_{\{\tau_0=k\}}\sum_{i=0}^{N-1}E_k^{(k+i)}\Bigl(E_{\tau_{N-1}}^{(\tau_N)}f\cdot I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}}\Bigr)
$$

$$
\begin{aligned}
&= I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=0}^{N-1} E_k^{(k+i)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} f I_{\{\tau_{N-1}=j\}} I_{\{\tau_N=j\}} I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}} \right) \\
&\quad + I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=0}^{N-1} E_k^{(k+i)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} E_j^{(j+1)} \Big(f I_{\{\tau_N=j+1\}} \Big) I_{\{\tau_{N-1}=j\}} I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}} \right) \\
&= I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=0}^{N-1} E_k^{(k+i)} \Big(f I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}} I_{\{\tau_N=k+i\}} \Big) \\
&\quad + I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=0}^{N-1} E_k^{(k+i)} \left(E_{k+i}^{(k+i+1)} \Big(f I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}} I_{\{\tau_N=k+i+1\}} \Big) \right) \\
&= I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=0}^{N-1} E_k^{(k+i)} \Big(f I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}} I_{\{\tau_N=k+i\}} \Big) \\
&\quad + I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=0}^{N-1} E_k^{(k+i+1)} \Big(f I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}} I_{\{\tau_N=k+i+1\}} \Big) \\
&= I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=0}^{N-1} E_k^{(k+i)} \Big(f I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}} I_{\{\tau_N=k+i\}} \Big) \\
&\quad + I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=1}^{N} E_k^{(k+i)} \Big(f I_{\{\tau_{N-1}=k+i-1\}} I_{\{\tau_N=k+i\}} \Big) \\
&= f I_{\{\tau_0=k\}} I_{\{\tau_{N-1}=k\}} I_{\{\tau_N=k\}} + I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=1}^{N-1} E_k^{(k+i)} \Big(f I_{\{\tau_{N-1}=k+i\}} I_{\{\tau_N=k+i\}} \Big) \\
&\quad + I_{\{\tau_0=k\}} \sum_{i=1}^{N-1} E_k^{(k+i)} \Big(f I_{\{\tau_{N-1}=k+i-1\}} I_{\{\tau_N=k+i\}} \Big) \\
&\quad + I_{\{\tau_0=k\}} E_k^{(k+N)} \Big(f I_{\{\tau_0=k\}} I_{\{\tau_{N-1}=k+N-1\}} I_{\{\tau_N=k+N\}} \Big).
\end{aligned}
$$

Используя в первом члене вложение $\{\tau_0 = k\}\{\tau_N = k\} \subset \{\tau_{N-1} = k\}$, во втором и третьем — $\{\tau_N = k+i\} \subset \{\tau_{N-1} = k+i-1\} + \{\tau_{N-1} = k+i\}$ и, наконец, в четвертом — $\{\tau_0 = k\}\{\tau_N = k+N\} \subset \{\tau_{N-1} = k+N-1\}$, получаем равенство (4).

Следствие 5. *Формула* (4) *справедлива в следующих случаях*:

1) *если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2 *и* $f \in L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_\nu, Q^{(\nu)})$;

2) *если* $\mathbf{Q}$ *есть* UBD2 *и* $f \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\nu, Q^{(\nu)})$;

3) *если* $\mathbf{Q}$ *есть* BD2, $f \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\nu, Q^{(\nu)})$ *и* ν *принимает конечное число значений.*

Доказательство. Пункты 1) и 2) вытекают из теоремы 3 и предложения 6. Пункт 3) следует из теоремы 3 и следствия 4.

Определение 2. Пусть $\mathbf{Q}$ есть D2 и $\tau \leqslant \nu$ — два м.о., удовлетворяющие условию $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$. Образуем последовательность м.о. $\{\tau_k\}_{k=0}^{K}$ со следующими свойствами:

(i) $\tau = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_K = \nu$;

(ii) $0 \leqslant \tau_{k+1} - \tau_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, K-1$

(например, можно положить $\tau_k = \nu \wedge (\tau + k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$). Если f — $\mathscr{F}_\nu$-измеримая случайная величина, такая, что $f \geqslant 0$ $Q^{(\nu)}$-п.в., то можно определить оператор

$$
E_\tau^{(\nu)} f = E_{\tau_0}^{(\tau_1)} E_{\tau_1}^{(\tau_2)} \ldots E_{\tau_{K-1}}^{(\tau_K)} f. \tag{6}
$$

Этот оператор можно определить также в случае, если выполняется одно из условий следствия 5.

Используя формулу (4), докажем корректность определения $E_\tau^{(\nu)}$. Пусть имеется последовательность $(\nu_i)_{i=0}^L$ м.о. такая, что $\tau = \nu_0 \leqslant \nu_1 \leqslant \cdots \leqslant \nu_L = \nu$ и $\nu_{i+1} - \nu_i \leqslant 1$ для любого $i = 0, 1, \dots, L-1$. Тогда формула (4) имеет вид

$$E_{\nu_0}^{(\nu_1)} E_{\nu_1}^{(\nu_2)} \dots E_{\nu_{L-1}}^{(\nu_L)} f = \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{\tau=k\}} \sum_{i=0}^{L} E_k^{(k+i)} (f I_{\{\nu=k+i\}}).$$

Если $L = N$, то эта формула совпадает с формулой (4). Пусть $L > N$. Образовав новую последовательность м.о. $\theta_0 = \tau_0, \dots, \theta_N = \tau_N$, $\theta_{N+1} = \nu, \dots, \theta_L = \nu$, легко получаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_{\{\tau=k\}} \sum_{i=N+1}^{L} E_k^{(k+i)} (f I_{\{\nu=k+i\}}) = 0,$$

т.е. $E_{\tau_0}^{(\tau_1)} E_{\tau_1}^{(\tau_2)} \dots E_{\tau_{N-1}}^{(\tau_N)} f = E_{\nu_0}^{(\nu_1)} E_{\nu_1}^{(\nu_2)} \dots E_{\nu_{L-1}}^{(\nu_L)} f$. Случай $L < N$ аналогичен.

Итак, в условиях определения 2 справедлива формула

$$E_\tau^{(\nu)} f = \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{\tau=k\}} \sum_{i=0}^{\infty} E_k^{(k+i)} (f I_{\{\nu=k+i\}}) \quad Q^{(\tau)}\text{-п.в.} \tag{7}$$

6. Теорема о преобразовании свободного выбора для ограниченно удаленных друг от друга м.о. τ и ν. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 4 (обобщение теоремы Дуба о преобразовании свободного выбора)**.** *Пусть* $\mathbf{Q}$ *есть* UBD2, $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathscr{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *есть* DSubM, $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$ *и* $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\nu, Q^{(\nu)})$. *Справедливо неравенство*

$$E_\tau^{(\nu)} Z_\nu \geqslant Z_\tau \quad Q^{(\tau)}\text{-}\textit{п.в.}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность м.о. $\sigma_n = \nu \wedge (\tau + n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, удовлетворяющую условиям определения 2. Используя предложения 4 и 6, получаем:

$$\begin{aligned} E_\tau^{(\nu)} Z_\nu &= E_{\sigma_0}^{(\sigma_1)} E_{\sigma_1}^{(\sigma_2)} \dots E_{\sigma_{N-1}}^{(\sigma_N)} Z_\nu = E_{\sigma_0}^{(\sigma_1)} \dots E_{\sigma_{N-1}}^{(\sigma_N)} Z_{\sigma_N} \\ &\geqslant E_{\sigma_0}^{(\sigma_1)} \dots E_{\sigma_{N-2}}^{(\sigma_{N-1})} Z_{\sigma_{N-1}} \geqslant E_{\sigma_0}^{(\sigma_1)} \dots E_{\sigma_{N-3}}^{(\sigma_{N-2})} Z_{\sigma_{N-2}} \\ &\geqslant E_{\sigma_0}^{(\sigma_1)} Z_{\sigma_1} \geqslant Z_{\sigma_0} = Z_\tau \quad Q^{(\tau)}\text{-п.в.} \end{aligned}$$

Следствие 6. *Теорема* 6 *с очевидными видоизменениями справедлива для* DSupM *и для* DM.

Следствие 7. *Теорема о преобразовании свободного выбора справедлива, если* $\mathbf{Q}$ *есть* BD2 *в случае, когда м.о.* ν *принимает конечное число значений.*

Замечание 2. Пусть P — вероятностная мера, определенная на $\mathscr{F}_\infty$ — наименьшей σ-алгебре, содержащей все $\mathscr{F}_n$ $(n \in \mathbf{N})$, и пусть $Q^{(n)} = P|_{\mathscr{F}_n}$. Тогда следствие 7 совпадает с классической теоремой о преобразовании свободного выбора для ограниченных м.о. Что касается основной теоремы 6., то для классического стохастического базиса $(\Omega, \mathbf{F}, \mathscr{F}_\infty, P)$ при условиях $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$ и $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\nu, P)$ получаем выполнение P-п.н. неравенства $E[Z_\nu \,|\, \mathscr{F}_\tau] \geqslant Z_\tau$. Авторы не нашли такой формулировки теоремы о преобразовании свободного выбора в доступной им литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с.

2. *Ширяев А. Н.* О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением. М.: МИАН, 2007, 78 с. (Совр. пробл. матем., в. 8.)
3. *Watkins J. C.* Discrete Time Stochastic Processes. Lecture Notes. 2007, 106 p. http://math/arizona/edu/∼jwatkins/discretetime.pdf
4. Bochner S. Partial ordering in the theory of martingales. — Ann. Math., 1955, v. 62, № 1, p. 162–169.
5. *Kurtz T. G.* The optional sampling theorem for martingales indexed by directed sets. — Ann. Probab., 1980, v. 8, № 4, p. 675–681.
6. *Washburn R.*, *jr.*, *Willsky A.* Optional sampling for submartingales indexed by partially ordered sets. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 6, p. 957–970.
7. Hürzeler H. E. The optional sampling theorem for processes indexed by a partially ordered set. — Ann. Probab., 1985, v. 13, № 4, p. 1224–1235.
8. *Grobler J.* Doob's optional sampling theorem in Riesz spaces. — Positivity, 2011, v. 15, № 4, p. 617–637.
9. *Alò R. A.*, *de Korvin A.*, *Roberts Ch.* The optional sampling theorem for convex set valued martingales. — J. Reine Angew. Math., 1979, v. 310, p. 1–6.
10. *Buckdahn R.*, *Engelbert H. J.* Randomized stopping times: Doob's optional sampling theorem and optimal stopping. — Math. Nachr., 1984, v. 115, p. 237–247.
11. *Hu Y.*, *Ma Y.*, *Peng Sh.*, *Yao S.* Representation theorems for quadratic $\mathscr{F}$-consistent nonlinear expectations. — Stochastic Process. Appl., 2008, v. 118, № 9, p. 1518–1551.
12. *Coquio A.* The optional stopping theorem for quantum martingales. — J. Funct. Anal., 2006, v. 238, № 1, p. 149–180.
13. *Назарько О. В.*, *Павлов И. В.* Рекуррентный метод построения слабых деформаций по процессу плотностей в рамках модели стохастического базиса, снабженного специальной хааровской фильтрацией. — Вестн. РГУПС, 2012, т. 45, № 1, p. 201–208.

Поступила в редакцию
18.X.2013

 САВИНОВ Е. А.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ IT-КОПУЛАМИ t-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

Показано, что асимптотика максимума в треугольной схеме связанных IT-копулами Стьюдента случайных величин аналогична асимптотике в схеме серий случайных величин, связанных гауссовскими копулами. Ввиду этого при надлежащем выборе базиса и соответствующей системы проекций, порождающих указанную треугольную схему, имеет место сходимость к максимум-устойчивому двойному экспоненциальному закону.

Ключевые слова и фразы: копулы, преобразование независимости, треугольная схема, максимум-устойчивое распределение.

1. Введение. Изучается последовательность копул, полученных в результате преобразования независимости (independence transformation) случайных векторов, обладающих распределением Стьюдента с расширяющейся недиагональной матрицей точности. Для схемы серий случайных величин, связанных такими стьюдентовскими IT-копулами, установлены условия сходимости максимума в каждой серии

* Самарский государственный университет, Самара, Россия; e-mail: henrylee@dxdy.ru