



Общероссийский математический портал

Н. Д. Леонтьев, Анализ стационарного режима функционирования системы массового обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2016, выпуск 2, 39–48

<https://www.mathnet.ru/vtpmk11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

18 мая 2025 г., 10:21:18



**АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ АВТОРЕГРЕССИОННОГО ТИПА****Леонтьев Н.Д.**

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

---

*Поступила в редакцию 20.05.2016, после переработки 03.06.2016.*

---

В работе рассматривается одноканальная система массового обслуживания с неограниченным числом мест для ожидания, в которую поступает пуассоновский поток групп требований. Особенностью системы является авторегрессионная зависимость размеров групп поступающих требований: размер  $n$ -й поступившей в систему группы требований либо с некоторой фиксированной вероятностью равен размеру  $(n - 1)$ -й поступившей в систему группы требований, либо с дополнительной вероятностью является независимой от него случайной величиной. Длительности обслуживания требований являются независимыми случайными величинами с произвольным распределением. Изучается стационарный режим функционирования системы; получено выражение для производящей функции длины очереди, а также математическое ожидание длины очереди в частном случае.

**Ключевые слова:** теория массового обслуживания, стационарный режим, системы с групповым поступлением требований.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 39–48.*

**Введение**

Настоящая работа является продолжением статьи [1], где рассмотрена система массового обслуживания типа  $M|G|1$  с групповым поступлением требований, в которой размеры поступающих групп связаны регрессионной зависимостью. Мы концентрируемся на изучении стационарного режима функционирования системы. Основными результатами статьи являются выражения для распределения и математического ожидания длины очереди.

**1. Описание системы**

Рассмотрим систему обслуживания, состоящую из одного обслуживающего устройства, на которое поступает простейший поток групп требований с интенсивностью  $a$ . Будем считать, что число мест для ожидания не ограничено, а длительность обслуживания требований имеет функцию распределения  $B(x)$  с плотностью  $b(x)$  и преобразованием Лапласа  $\beta(s)$ . Поступающие в систему группы требований могут иметь размер  $1, \dots, M$  с вероятностями, соответственно,  $h_1, \dots, h_M$ .

При этом размер  $n$ -й поступившей в систему группы требований с вероятностью  $0 \leq p < 1$  равен размеру  $(n - 1)$ -й, либо с дополнительной вероятностью  $1 - p$  является независимой от него случайной величиной.

Определим следующие случайные процессы:

- $L(t)$  – число требований в системе в момент  $t$ ;
- $X(t)$  – время, прошедшее с начала обслуживания требования, находящегося на обслуживании в момент  $t^1$ ;
- $N(t)$  – размер последней поступившей в систему до момента  $t$  группы требований.

Введем следующие обозначения:

$$P(n, k, x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}(L(t) = n, N(t) = k, X(t) < x),$$

$$P(n, k, t) = \mathbf{P}(L(t) = n, N(t) = k).$$

Обозначим

$$\pi(z, k, x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} P(n, k, x, t) dt, \quad \pi_0(k, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P(0, k, t) dt$$

при  $|z| \leq 1, \operatorname{Re}(s) > 0$ .

## 2. Предварительные результаты

В статье [1] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Функция  $\pi(z, k, x, s)$  при  $|z| < 1, k = 1, \dots, M, x \geq 0, \operatorname{Re}(s) > 0$  определяется по формуле*

$$\pi(z, k, x, s) = (1 - B(x)) \sum_{n=1}^M C_n(z, s) \frac{(1-p)h_k a z^k}{\tilde{\lambda}_n(z) - p a z^k} \exp\left(-\left(s + a - \tilde{\lambda}_n(z)\right)x\right),$$

где

$$C_n(z, s) = \frac{1}{1 - z^{-1}\beta\left(s + a - \tilde{\lambda}_n(z)\right)} \frac{\prod_{i=1}^M \left(\tilde{\lambda}_n(z) - p a z^i\right)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^M \left(\tilde{\lambda}_n(z) - \tilde{\lambda}_j(z)\right)} \sum_{m=1}^M \frac{b_m(z, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - p a z^m}, \quad (1)$$

$$b_m(z, s) = -(s + a)\pi_0(m, s) + h_m + \left[ p\pi_0(m, s) a z^m + (1 - p) \sum_{n=1}^M \pi_0(n, s) h_n a z^m \right].$$

<sup>1</sup> В случае, когда система свободна, можно для определенности положить  $X(t) = 0$ .

$\tilde{\lambda}_1(z), \dots, \tilde{\lambda}_M(z)$  определяются из уравнения

$$\prod_{i=1}^M (paz^i - \tilde{\lambda}) + \sum_{i=1}^M (1-p)h_i a z^i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (paz^j - \tilde{\lambda}) = 0, \quad (2)$$

а  $\pi_0(1, s), \dots, \pi_0(M, s)$  — из системы

$$\sum_{m=1}^M \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M (\tilde{\lambda}_n(z_n) - paz_n^j) \left( -(s+a)\pi_0(m, s) + h_m + \tilde{\lambda}_n(z_n)\pi_0(m, s) \right) = 0, \quad (3)$$

в которой  $z_n = z_n(s)$  — решение функционального уравнения

$$z_n = \beta \left( s + a - \tilde{\lambda}_n(z_n) \right). \quad (4)$$

Введем обозначения

$$P(n, t) = \mathbf{P}(L(t) = n)$$

и

$$\begin{aligned} \pi(z, k, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} P(n, k, t) dt, \\ \pi(z, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} P(n, t) dt, \end{aligned}$$

при  $|z| < 1, \operatorname{Re}(s) > 0$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \pi(z, k, s) &= \int_0^{\infty} \pi(z, k, x, s) dx = \\ &= \sum_{n=1}^M C_n(z, s) \frac{(1-p)h_k a z^k}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^k} \int_0^{\infty} (1-B(x)) \exp\left(-\left(s+a-\tilde{\lambda}_n(z)\right)x\right) dx = \\ &= \sum_{n=1}^M C_n(z, s) \frac{(1-p)h_k a z^k}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^k} (s+a-\tilde{\lambda}_n(z))^{-1} (1-\beta(s+a-\tilde{\lambda}_n(z))). \end{aligned}$$

Далее, подставляя  $\tilde{\lambda}_n(z)$  в уравнение (2), получим

$$\prod_{i=1}^M (paz^i - \tilde{\lambda}_n(z)) + \sum_{i=1}^M (1-p)h_i a z^i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (paz^j - \tilde{\lambda}_n(z)) = 0.$$

Поделив обе части уравнения на  $\prod_{i=1}^M (paz^i - \tilde{\lambda}_n(z))$ , после некоторых преобразований получим

$$\sum_{i=1}^M \frac{(1-p)h_i az^i}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^i} = 1.$$

С учетом этого результата будем иметь

$$\begin{aligned} \pi(z, s) &= \sum_{k=1}^M \pi(z, k, s) = \\ &= \sum_{n=1}^M C_n(z, s) (s + a - \tilde{\lambda}_n(z))^{-1} (1 - \beta(s + a - \tilde{\lambda}_n(z))) \sum_{k=1}^M \frac{(1-p)h_k az^k}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^k} = \\ &= \sum_{n=1}^M C_n(z, s) (s + a - \tilde{\lambda}_n(z))^{-1} (1 - \beta(s + a - \tilde{\lambda}_n(z))). \end{aligned}$$

Подставим выражение для  $C_n(z, s)$  из (1):

$$\begin{aligned} \pi(z, s) &= \sum_{n=1}^M (s + a - \tilde{\lambda}_n(z))^{-1} \frac{1 - \beta(s + a - \tilde{\lambda}_n(z))}{1 - z^{-1}\beta(s + a - \tilde{\lambda}_n(z))} \times \\ &\times \frac{\prod_{i=1}^M (\tilde{\lambda}_n(z) - paz^i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^M (\tilde{\lambda}_n(z) - \tilde{\lambda}_j(z))} \sum_{m=1}^M \frac{b_m(z, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m}. \end{aligned}$$

Упростим последний множитель, подставив в него выражение для  $b_m(z, s)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \frac{b_m(z, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m} &= \sum_{m=1}^M \frac{h_m - (s + a - paz^m)\pi_0(m, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m} + \\ &+ \sum_{k=1}^M \pi_0(k, s) \sum_{m=1}^M \frac{(1-p)h_m az^m}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m} = \sum_{m=1}^M \frac{h_m - (s + a - paz^m)\pi_0(m, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m} + \\ &+ \sum_{k=1}^M \pi_0(k, s) = \sum_{m=1}^M \frac{h_m - (s + a - paz^m)\pi_0(m, s) + (\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m)\pi_0(m, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m} = \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{h_m - (s + a - \tilde{\lambda}_n(z))\pi_0(m, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m}. \end{aligned}$$

Итак, окончательное выражение для  $\pi(z, s)$  принимает вид

$$\begin{aligned} \pi(z, s) &= \sum_{n=1}^M (s + a - \tilde{\lambda}_n(z))^{-1} \frac{1 - \beta(s + a - \tilde{\lambda}_n(z))}{1 - z^{-1}\beta(s + a - \tilde{\lambda}_n(z))} \times \\ &\times \frac{\prod_{i=1}^M (\tilde{\lambda}_n(z) - paz^i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^M (\tilde{\lambda}_n(z) - \tilde{\lambda}_j(z))} \sum_{m=1}^M \frac{h_m - (s + a - \tilde{\lambda}_n(z))\pi_0(m, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m}. \end{aligned}$$

### 3. Стационарный режим

В дальнейшем будем предполагать, что  $a\beta_1\mathbf{E}H < 1$ , где  $\beta_1 = -\beta'(0) = \int_0^\infty xdB(x)$ , а  $\mathbf{E}H = \sum_{n=1}^M nh_n$ .

Обозначим

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \lim_{t \rightarrow \infty} P(n, t), \\ p_0(m) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(0, m, t). \end{aligned}$$

В соответствии с абелевой теоремой (см. Приложение)

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s\pi(z, s) = \sum_{n=1}^M (a - \tilde{\lambda}_n(z))^{-1} \frac{1 - \beta(a - \tilde{\lambda}_n(z))}{1 - z^{-1}\beta(a - \tilde{\lambda}_n(z))} \times \\ &\times \frac{\prod_{i=1}^M (\tilde{\lambda}_n(z) - paz^i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^M (\tilde{\lambda}_n(z) - \tilde{\lambda}_j(z))} \sum_{m=1}^M \frac{-(a - \tilde{\lambda}_n(z)) \lim_{s \rightarrow 0^+} s\pi_0(m, s)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m} = \\ &= - \sum_{n=1}^M \frac{1 - \beta(a - \tilde{\lambda}_n(z))}{1 - z^{-1}\beta(a - \tilde{\lambda}_n(z))} \frac{\prod_{i=1}^M (\tilde{\lambda}_n(z) - paz^i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^M (\tilde{\lambda}_n(z) - \tilde{\lambda}_j(z))} \sum_{m=1}^M \frac{p_0(m)}{\tilde{\lambda}_n(z) - paz^m}. \end{aligned} \quad (5)$$

#### 3.1 Частный случай $M = 2$

Рассмотрим более подробно ситуацию, когда  $M = 2$ .

Характеристическое уравнение (2) в этом случае будет квадратным и примет вид

$$\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda}(paz + paz^2 + (1-p)h_1az + (1-p)h_2az^2) + pa^2z^3 = 0.$$

Его корни

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1(z) &= \frac{paz + paz^2 + (1-p)h_1az + (1-p)h_2az^2 + \sqrt{D}}{2}, \\ \tilde{\lambda}_2(z) &= \frac{paz + paz^2 + (1-p)h_1az + (1-p)h_2az^2 - \sqrt{D}}{2}.\end{aligned}$$

где  $D = (paz + paz^2 + (1-p)h_1az + (1-p)h_2az^2)^2 - 4pa^2z^3$ . Легко видеть, что  $D(1) = (a - pa)^2$ ,  $\tilde{\lambda}_1(1) = a$ ,  $\tilde{\lambda}_2(1) = pa$ . Также нетрудно установить, что

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}'_1(1) &= a(1 + h_2), \\ \tilde{\lambda}''_1(1) &= \frac{2ah_2(1 - ph_2)}{1 - p}, \\ \tilde{\lambda}'_2(1) &= pa(1 + h_1) = pa(2 - h_2).\end{aligned}$$

Из уравнения (4) следует, что

$$z'_i(s) = \beta' \left( s + a - \tilde{\lambda}_i(z_i(s)) \right) \left( 1 - \tilde{\lambda}'_i(z_i(s)) z'_i(s) \right),$$

а значит

$$z'_i(s) = \frac{\beta' \left( s + a - \tilde{\lambda}_i(z_i(s)) \right)}{1 + \beta' \left( s + a - \tilde{\lambda}_i(z_i(s)) \right) \tilde{\lambda}'_i(z_i(s))}.$$

С учетом полученных выше выражений для  $\tilde{\lambda}_1(z)$  и  $\tilde{\lambda}_2(z)$ , нетрудно установить, что  $z_1(0) = 1$ , а значит  $z'_1(0) = -\frac{\beta_1}{1 - a\beta_1(1 + h_2)}$ .

Система (3) примет вид

$$\begin{aligned}(\tilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(-(s + a)\pi_0(1, s) + h_1 + \tilde{\lambda}_1\pi_0(1, s)) + \\ + (\tilde{\lambda}_1 - paz_1)(-(s + a)\pi_0(2, s) + h_2 + \tilde{\lambda}_1\pi_0(2, s)) = 0, \\ (\tilde{\lambda}_2 - paz_2^2)(-(s + a)\pi_0(1, s) + h_1 + \tilde{\lambda}_2\pi_0(1, s)) + \\ + (\tilde{\lambda}_2 - paz_2)(-(s + a)\pi_0(2, s) + h_2 + \tilde{\lambda}_2\pi_0(2, s)) = 0.\end{aligned}$$

Ее решение

$$\begin{aligned}\pi_0(1, s) &= \frac{1}{(\tilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2) - (\tilde{\lambda}_1 - paz_1)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2^2)} \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2)}{s + a - \tilde{\lambda}_1} - \frac{(\tilde{\lambda}_1 - paz_1)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2^2)}{s + a - \tilde{\lambda}_2} \right] h_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{(s + a - \tilde{\lambda}_1)(s + a - \tilde{\lambda}_2)} (\tilde{\lambda}_1 - paz_1)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2) h_2 \right\}, \\ \pi_0(2, s) &= \frac{1}{(\tilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2) - (\tilde{\lambda}_1 - paz_1)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2^2)} \times\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1}{(s + a - \tilde{\lambda}_1)(s + a - \tilde{\lambda}_2)} (\tilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2^2)h_1 + \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2)}{s + a - \tilde{\lambda}_2} - \frac{(\tilde{\lambda}_1 - paz_1)(\tilde{\lambda}_2 - paz_2^2)}{s + a - \tilde{\lambda}_1} \right] h_2 \right\}.$$

Отсюда

$$p_0(1) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s\pi_0(1, s) = \frac{\tilde{\lambda}_2(z_2(0)) - paz_2(0)}{paz_2^2(0) - paz_2(0)} (1 - a\beta_1(1 + h_2)),$$

$$p_0(2) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s\pi_0(2, s) = -\frac{\tilde{\lambda}_2(z_2(0)) - paz_2^2(0)}{paz_2^2(0) - paz_2(0)} (1 - a\beta_1(1 + h_2)).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + a - \tilde{\lambda}_1} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + a - \tilde{\lambda}_1(z_1(s))} = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}'_1(z_1(0))z'_1(0)} = \\ &= \frac{1}{1 + a(1 + h_2) \frac{\beta_1}{1 - a\beta_1(1 + h_2)}} = 1 - a\beta_1(1 + h_2). \end{aligned}$$

Выражение (5) в случае  $M = 2$  примет вид

$$\begin{aligned} \pi(z) &= - \left\{ \frac{1 - \beta(a - \tilde{\lambda}_1(z))}{1 - z^{-1}\beta(a - \tilde{\lambda}_1(z))} \frac{1}{\tilde{\lambda}_1(z) - \tilde{\lambda}_2(z)} \times \right. \\ &\times \left( (\tilde{\lambda}_1(z) - paz^2)p_0(1) + (\tilde{\lambda}_1(z) - paz)p_0(2) \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1 - \beta(a - \tilde{\lambda}_2(z))}{1 - z^{-1}\beta(a - \tilde{\lambda}_2(z))} \frac{1}{\tilde{\lambda}_2(z) - \tilde{\lambda}_1(z)} \times \right. \\ &\times \left. \left( (\tilde{\lambda}_2(z) - paz^2)p_0(1) + (\tilde{\lambda}_2(z) - paz)p_0(2) \right) \right\} = -\frac{1}{\tilde{\lambda}_1(z) - \tilde{\lambda}_2(z)} \times \\ &\times \left\{ \frac{z(1 - \beta(a - \tilde{\lambda}_1(z)))}{z - \beta(a - \tilde{\lambda}_1(z))} \left( (\tilde{\lambda}_1(z) - paz^2)p_0(1) + (\tilde{\lambda}_1(z) - paz)p_0(2) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z(1 - \beta(a - \tilde{\lambda}_2(z)))}{z - \beta(a - \tilde{\lambda}_2(z))} \left( (\tilde{\lambda}_2(z) - paz^2)p_0(1) + (\tilde{\lambda}_2(z) - paz)p_0(2) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Найдем математическое ожидание длины очереди в стационарном режиме. Имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}L(t) = \pi'(1)$ . Продифференцируем  $\pi(z)$ :

$$\begin{aligned} \pi'(z) &= \frac{\tilde{\lambda}'_1(z) - \tilde{\lambda}'_2(z)}{(\tilde{\lambda}_1(z) - \tilde{\lambda}_2(z))^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{z(1 - \beta(a - \tilde{\lambda}_1(z)))}{z - \beta(a - \tilde{\lambda}_1(z))} \left( (\tilde{\lambda}_1(z) - paz^2)p_0(1) + (\tilde{\lambda}_1(z) - paz)p_0(2) \right) - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{z(1-\beta(a-\tilde{\lambda}_2(z)))}{z-\beta(a-\tilde{\lambda}_2(z))} \left( (\tilde{\lambda}_2(z)-paz^2)p_0(1) + (\tilde{\lambda}_2(z)-paz)p_0(2) \right) \Big\} - \\
& \quad -\frac{1}{\tilde{\lambda}_1(z)-\tilde{\lambda}_2(z)} \times \\
& \times \left\{ \frac{-\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z)) + \beta^2(a-\tilde{\lambda}_1(z)) + z^2\beta'(a-\tilde{\lambda}_1(z))\tilde{\lambda}'_1(z) - z\beta'(a-\tilde{\lambda}_1(z))\tilde{\lambda}'_1(z)}{(z-\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z)))^2} \times \right. \\
& \quad \times \left( (\tilde{\lambda}_1(z)-paz^2)p_0(1) + (\tilde{\lambda}_1(z)-paz)p_0(2) \right) + \\
& \quad + \frac{z(1-\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z)))}{z-\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z))} \left( (\tilde{\lambda}'_1(z)-2paz)p_0(1) + (\tilde{\lambda}'_1(z)-pa)p_0(2) \right) - \\
& \quad - \frac{-\beta(a-\tilde{\lambda}_2(z)) + \beta^2(a-\tilde{\lambda}_2(z)) + z^2\beta'(a-\tilde{\lambda}_2(z))\tilde{\lambda}'_2(z) - z\beta'(a-\tilde{\lambda}_2(z))\tilde{\lambda}'_2(z)}{(z-\beta(a-\tilde{\lambda}_2(z)))^2} \times \\
& \quad \times \left( (\tilde{\lambda}_2(z)-paz^2)p_0(1) + (\tilde{\lambda}_2(z)-paz)p_0(2) \right) - \\
& \quad \left. - \frac{z(1-\beta(a-\tilde{\lambda}_2(z)))}{z-\beta(a-\tilde{\lambda}_2(z))} \left( (\tilde{\lambda}'_2(z)-2paz)p_0(1) + (\tilde{\lambda}'_2(z)-pa)p_0(2) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(1-\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z)))}{z-\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z))} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z)) + z\beta'(a-\tilde{\lambda}_1(z))\tilde{\lambda}'_1(z)}{1+\beta'(a-\tilde{\lambda}_1(z))\tilde{\lambda}'_1(z)} = \\
&= \frac{1-1+1(-\beta_1)a(1+h_2)}{1+(-\beta_1)a(1+h_2)} = \frac{-a\beta_1(1+h_2)}{1-a\beta_1(1+h_2)}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$f(z) = -\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z)) + \beta^2(a-\tilde{\lambda}_1(z)) + z^2\beta'(a-\tilde{\lambda}_1(z))\tilde{\lambda}'_1(z) - z\beta'(a-\tilde{\lambda}_1(z))\tilde{\lambda}'_1(z),$$

$$g(z) = (z-\beta(a-\tilde{\lambda}_1(z)))^2.$$

Имеем

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f''(1)}{g''(1)} = \frac{2a^2\beta_1^2(1+h_2)^2 - a^2\beta_2(1+h_2)^2 - 2a\beta_1 \frac{h_2(1-ph_2)}{1-p} - 2a\beta_1(1+h_2)}{2(1-a\beta_1(1+h_2))^2},$$

где  $\beta_2 = \beta''(0) = \int_0^\infty x^2 dB(x)$ . Тем самым

$$\begin{aligned}
\pi'(1) &= \frac{p}{1-p}(1-h_2) + a\beta_1(1+h_2) + \frac{a^2\beta_2(1+h_2)^2}{2(1-a\beta_1(1+h_2))} + \\
&+ \frac{a\beta_1}{1-a\beta_1(1+h_2)} \frac{h_2(1-ph_2)}{1-p} - \frac{p}{1-p} \frac{1}{1-a\beta_1(1+h_2)} p_0(1).
\end{aligned}$$

## Заключение

Мы рассмотрели систему массового обслуживания типа  $M|G|1$  с групповым поступлением требований, в которой размеры поступающих групп связаны регрессионной зависимостью: размер  $n$ -й поступившей в систему группы требований либо с некоторой фиксированной вероятностью равен размеру  $(n - 1)$ -й поступившей в систему группы требований, либо с дополнительной вероятностью является независимой от него случайной величиной. Исследован стационарный режим функционирования системы; найдено распределение длины очереди и математическое ожидание длины очереди для случая  $M = 2$ .

## Приложение

**Теорема 2** (Абелева теорема для преобразования Лапласа). Пусть  $f(t)$  — функция действительного переменного и существует предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ . Тогда имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

*Доказательство.* См., например, [2]. □

## Список литературы

- [1] Леонтьев Н.Д., Ушаков В.Г. Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа // Информатика и ее применения. 2014. Т. 8, № 3. С. 39–44.
- [2] Doetsch G. Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. Berlin: Springer Verlag, 1974. 326 p.

## Библиографическая ссылка

Леонтьев Н.Д. Анализ стационарного режима функционирования системы массового обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 39–48.

## Сведения об авторах

### 1. Леонтьев Николай Дмитриевич

аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

# ANALYSIS OF THE STEADY-STATE BEHAVIOR OF A QUEUEING SYSTEM WITH AUTOREGRESSIVE ARRIVALS

**Leontyev Nikolay Dmitrievich**

PhD student at Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,  
Lomonosov Moscow State University

---

*Received 20.05.2016, revised 03.06.2016.*

---

The paper studies a single server queueing system with infinite capacity and with batch Poisson arrival process. A feature of the system under study is autoregressive dependence of the arriving batch sizes: the size of the  $n$ th batch is equal to the size of the  $(n - 1)$ st batch with a fixed probability, and is an independent random variable with complementary probability. Service times are supposed to be independent random variables with a specified distribution. The steady-state behaviour is studied; expression for the probability generating function of the queue length is derived, as well as the mean queue length for a special case.

**Keywords:** queueing theory, steady-state behaviour, batch arrivals.

## Bibliographic citation

Leontyev N.D. Analysis of the steady-state behavior of a queueing system with autoregressive arrivals. *Vestnik TverGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 39–48. (in Russian)

## References

- [1] Leont'ev N.D., Ushakov V.G. Analysis of the service system with incoming stream of autoregression type. *Informatika i ee Primeneniya* [Computer Science and its Applications], 2014, vol. 8(3), pp. 39–44. (in Russian)
- [2] Doetsch G. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer Verlag, Berlin, 1974. 326 p.