И. В. Бойков, К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, *Матем. заметки*, 1972, том 12, выпуск 2, 177–186

https://www.mathnet.ru/mzm9866

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 2 (1972), 177—186

УДК 513.88

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. Бойков

В работе предлагается вычислительная схема коллокационного типа для линейного сингулярного интегрального уравнения со степенной особенностью в регулярном интеграле и дается ее обоснование. Полученные результаты используются для обоснования приближенного решения сингулярного интегрального уравнения

$$Kx \equiv a(t)\,x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{h(t,\tau,x(\tau))}{|\tau - t|^{\delta}}\,d\tau = f(t)$$

одной модификацией метода минимальных невязок. Библ. 11 назв.

§ 1. Приближенное решение линейного сингулярного интегрального уравнения. В этом параграфе рассматривается приближенное решение сингулярного интегрального уравнения (с.и.у.)

$$Kx \equiv a(t)\,x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{h(t,\tau)\,x(\tau)}{|\tau - t|^{\delta}}\,d\tau = f(t), \qquad (1.1)$$

где γ — единичная окружность с центром в начале координат, функции $a(t)$, $b(t)$, $h(t, \tau)$, $f(t) \in C_{2\pi}$, $\delta < 1$.

В случае, когда a, b, h, $f \in H_{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, $\delta = 0$, приближенное решение уравнения (1.1) методом коллокации полностью рассмотрено В. В. Ивановым [1, 2], а методом механических квадратур Б. Г. Габдулхаевым [3].

1°. **Метод вычислений.** Приближенное решение уравнения (1.1) ищется в виде многочлена

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений, записываемых в операторной форме следующим образом:

$$\widetilde{K}\tilde{x} \equiv P\left[a(t)\tilde{x}(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{\tilde{x}(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} P_{\tau}\left[h^*(t, \tau)\tilde{x}(\tau)\right] d\tau\right] = P\left[f(t)\right], \qquad (1.2)$$

где P — оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов по узлам

$$t_k = e^{is_k},\ s_k = 2k\pi/(2n+1)\ (k = \overline{0, 2n}),\ \tau = e^{i\sigma},\ t = e^{is},$$

$$h^*(t, \tau) = h(t, \tau)\,d(t, \tau),\quad d(t, \tau) = |\tau - t|^{-\delta} \text{ при }$$
$$|\sigma - s| \geqslant 2\pi/(2n+1),$$
$$d(t, \tau) = |e^{is_1} - 1|^{-\delta} \text{ при } |\sigma - s| < 2\pi/(2n+1).$$

2°. **Обоснование метода.** Пусть коэффициенты $a(t)$, $h(t, \tau)$, $b(t)$ и правая часть $f(t)$ уравнения (1.1) непрерывны:

$$a(e^{is}),\ b(e^{is}),\ h(e^{is}, e^{i\sigma}),\ f(e^{is}) \in C_{2\pi}. \qquad (1.3)$$

Обоснование будем проводить в пространстве функций X со скалярным произведением [2]

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} f_1(t)\overline{f_2(t)}\frac{dt}{it} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t)\overline{f_2(t)}\,ds,\ f_1, f_2 \in L_2.$$

Будем считать, что в пространстве X оператор K имеет линейный обратный.

Введем уравнение

$$K_1 x \equiv \tilde{a}(t)x(t) + \frac{\tilde{b}(t)}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} h(t, \tau)\,d^*(t, \tau)\,x(\tau)\,d\tau = f(t),$$

где $\tilde{a}(t)$, $\tilde{b}(t)$ — полиномы наилучшего равномерного приближения степени m для функций $a(t)$, $b(t)$ соответственно, $d^*(t, \tau) = |\tau - t|^{-\delta}$ при $|\tau - t| \geqslant \rho$, $d^*(t, \tau) = \rho^{-\delta}$ при $|\tau - t| < \rho$, ρ — положительное число, $\rho > s_1$. Числа ρ и m фиксируются ниже.

Из теоремы Банаха следует, что при m и ρ таких, что

$$q_1 = A_1(\rho^{1-\delta} + \omega(a;\, m^{-1}) + \omega(b;\, m^{-1})) < 1,$$

оператор K_1 имеет линейный обратный с нормой $\|K_1^{-1}\| \leqslant \leqslant \|K^{-1}\| / (1 - q_1)$.

Метод механических квадратур для уравнения $K_1 x = f$ в операторной форме записывается следующим образом:

$$\tilde{K}_1 \tilde{x} \equiv P\left[\tilde{a}(t)\tilde{x}(t) + \frac{\tilde{b}(t)}{\pi i} \int_\gamma \frac{\tilde{x}(\tau)\, d\tau}{\tau - t} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma P_\tau [h(t, \tau)\, d^*(t, \tau)\, \tilde{x}(\tau)]\, d\tau\right] = P[f] = \tilde{f}.$$

Поставим в соответствие каждой функции $z(t) \in L_2$ функции $z^+(t)$ и $z^-(t)$, аналитические внутри и вне γ соответственно, и связанные с $z(t)$ формулами Племеля — Сохоцкого: $z(t) = z^+(t) - z^-(t)$,

$$I(z) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{z(\tau)\, d\tau}{\tau - t} = z^+(t) + z^-(t).$$

Известно [1], [2], что уравнения $K_1 x = f$ и $\tilde{K}_1 \tilde{x} = \tilde{f}$ эквивалентны соответственно следующим уравнениям, записываемым в операторной форме:

$$K_2 x \equiv Vx + Wx = y, \quad K_2 \in [X \to X] \tag{1.4}$$

и

$$\tilde{K}_2 \tilde{x} \equiv \tilde{V}\tilde{x} + \tilde{W}\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{K}_2 \in [\tilde{X} \to \tilde{X}], \tag{1.5}$$

где

$$Vx = \psi^- x^+ - \psi^+ x^-, \quad Wx = \frac{l}{2\pi i} \int_\gamma h(t, \tau)\, d^*(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

$$l = \psi^- / (\tilde{a} + \tilde{b}),$$

$$\psi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\ln\left[\frac{\tilde{a}(\tau) - \tilde{b}(\tau)}{\tilde{a}(\tau) + \tilde{b}(\tau)}\right] : (\tau - z)\right] d\tau\right\},$$

$$\widetilde{V}\tilde{x} = P\,[V\tilde{x}],$$
$$\widetilde{W}\tilde{x} = P\left[\frac{l}{2\pi i}\int_{\gamma} P_{\tau}\,[h(t, \tau)\,d^{*}(t, \tau)\,\tilde{x}(\tau)]\,d\tau\right],$$
$$y = lf,\ \tilde{y} = P\,[y],$$

$\widetilde{X} = \left\{\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k\right\}$ — $(2n+1)$-мерное пространство полиномов степени не выше n, с той же нормой, что и пространство X.

Для обоснования предложенной вычислительной схемы введем, следуя [1], [2], [4], полином

$$\tilde{\varphi}(t) = V_n\tilde{x} + (T^{[n/2]}\,[l])\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} T_t^{[n/2]}\,[h(t, \tau)\,d^{*}(t, \tau)]\,\tilde{x}(\tau)\,d\tau,$$

где $V_n\tilde{x} = \psi_n^{-}\tilde{x}^{+} - \psi_n^{+}\tilde{x}^{-}$, $[n/2]$ — наибольшее целое число, заключающееся в $n/2$, $T^{[n/2]}\,[f]$ и ψ_n — полиномы наилучшего равномерного приближения степени $n/2$ и n для функций f и ψ соответственно.

Нетрудно видеть, что

$$\|K_2\tilde{x} - \tilde{\varphi}\| + \|PK_2\tilde{x} - \tilde{\varphi}\| \leqslant$$
$$\leqslant A_2\,(m^{1-\varepsilon}/n^{1-\varepsilon} + \omega\,(h;\, n^{-1})/\rho^{2\delta})\,\|\tilde{x}\|, \quad (1.6)$$

где ε-произвольное число $0 < \varepsilon < 1$*).

Оценим теперь **)

$$\|\widetilde{K}_2\tilde{x} - PK_2\tilde{x}\| \leqslant \left\|P\left[\frac{l}{2\pi i}\int_{\gamma} R_{\tau}\,[h(t, \tau)\,\tilde{x}(\tau)\,d^{*}(t, \tau)]\,d\tau\right]\right\| \leqslant$$
$$\leqslant A_3\omega\,(h;\, n^{-1})\,\|\tilde{x}\|/\rho^{2\delta}, \quad (1.7)$$

где $R = E - P$, E — единичный оператор.

Из (1.6) — (1.7) (полагая $\rho = [\omega\,(h\,;\, n^{-1})]^{1/(1+\delta)}$, $\varepsilon = 1/\ln n$, $m = n^{1/2}$) и теоремы 1 работы [6] следует, что при n таких, что

$$q_2 = A_4\,[\omega\,[a\,;\, n^{-1/2}) + \omega\,(b\,;\, n^{-1/2}) + [\omega\,(h;\, n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)}] < 1,$$

---

*) Необходимость введения ε следует из теоремы И. И. Привалова [5], так как $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ входят в класс Гёльдера с показателем 1 и с коэффициентами $m\cdot\max|\tilde{a}|$, $m\cdot\max|\tilde{b}|$ соответственно.

**) Предполагается, что если $h\,(t, \tau) \in H_{\alpha,\alpha}$, то $\alpha < \delta$.

существует линейный оператор $\widetilde{K}_2^{-1}$ с нормой $\| \widetilde{K}_2^{-1} \| \leqslant \leqslant \| K_2^{-1} \| / (1 - q_2)$. При этом

$$\| x^* - \tilde{x}_1^* \| \leqslant A_5 \{ \omega (a; n^{-1/2}) + \omega (b; n^{-1/2}) + \\ + [\omega (h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \omega (f; n^{-1}) \},$$

где x^* и $\tilde{x}_1^*$ — решения уравнений (1.1) и (1.5) соответственно.

Так как уравнения (1.5) и $\widetilde{K}_1 \tilde{x} = \tilde{f}$ эквивалентны, то существует линейный оператор $\widetilde{K}_1^{-1}$. Оценим его норму. Так как

$$\| \tilde{x}_1^* \| \leqslant \| \widetilde{K}_2^{-1} \| \| \tilde{y} \| = \| \widetilde{K}_2^{-1} \| \| P [l P [f]] \| \leqslant \| \widetilde{K}_2^{-1} \| | l | \| P [f] \|,$$

то $\| \widetilde{K}_1^{-1} \| \leqslant \| \widetilde{K}_2^{-1} \| | l |$.

Нетрудно видеть, что

$$\| \widetilde{K} \tilde{x} - \widetilde{K}_1 \tilde{x} \| \leqslant A_6 [| a - \tilde{a} | + | b - \tilde{b} | + I_1] \| \tilde{x} \|, \qquad (1.8)$$

где

$$I_1 = \left\| P \left[\frac{l}{2\pi i} \int_\gamma P_\tau [h (t, \tau) \tilde{x} (\tau) b (t, \tau)] \, d\tau \right] \right\|,$$

$$b (t, \tau) = [d^* (t, \tau) - d (t, \tau)].$$

I_1 можно представить в следующем виде:

$$I_1 \leqslant \max_s \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | P_\sigma [h (s, \sigma) \operatorname{sgn} [b (s, \sigma)] \, | b (s, \sigma) |^{1/2}] |^2 \, d\sigma \right\}^{1/2} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | P_\sigma [\tilde{x} (\sigma) e^{i\sigma} P_s [| l (s) | \, | b (s, \sigma) |^{1/2}]] |^2 \, d\sigma \right\} ds \right\}^{1/2} = \\ = I_2 \cdot I_3, \qquad (1.9)$$

где

$$h (s, \sigma) = h (e^{is}, e^{i\sigma}), \quad b (s, \sigma) = b (e^{is}, e^{i\sigma}), \quad l (s) = l (e^{is}).$$

Обозначив через v величину $[\rho (2n + 1)/2\pi] + 1$, где $[m]$ — наибольшее целое число, не превосходящее m, оценим I_2:

$$I_2^2 \leqslant A_7 \frac{1}{2n + 1} \sum_{k=1}^{v} \left(\frac{1}{s_k} \right)^\delta \leqslant A_8 \left[\frac{1}{(2n + 1)^{1-\delta}} + \rho^{1-\delta} \right]. \qquad (1.10)$$

Нетрудно видеть, что

$$I_3^2 = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{2n} |\tilde{x}(s_i)|^2 |b(s_k, s_i)| |l(s_i)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|l|}{(2n+1)^2} \sum_{i=0}^{2n} |\tilde{x}(s_i)|^2 \sum_{k=0}^{2n} |b(s_k, s_i)| \leqslant A_9 \|\tilde{x}\|^2 \rho^{1-\delta}. \quad (1.11)$$

Из оценок (1.9) — (1.11) (при приведенных выше значениях m, ρ) и теоремы Банаха следует

ТЕОРЕМА 1. *Пусть оператор K имеет линейный обратный и выполнены условия* (1.3). *Тогда при n таких, что*

$$q = A_{10} [\omega(a; n^{-1/2}) + \omega(b; n^{-1/2}) + [\omega(h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)}] < 1,$$

уравнение (1.2) *однозначно разрешимо при любой правой части, причем*

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leqslant A_{11} [\omega(a; n^{-1/2}) + \omega(b; n^{-1/2}) +$$
$$+ [\omega(h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \omega(f; n^{-1})],$$

где x^* и $\tilde{x}^*$ — решения уравнений (1.1) *и* (1.2) *соответственно (через A_i обозначены вполне определенные постоянные, не зависящие от n).*

З а м е ч а н и е 1. Величины A_i могут быть легко оценены, если известна $\| K^{-1} \|$. Последнюю можно оценить, пользуясь результатами монографии [2].

З а м е ч а н и е 2. Выше был рассмотрен случай, когда индекс $\varkappa$ уравнения (1.1) равен 0. Случай произвольного индекса сводится к предыдущему [2].

З а м е ч а н и е 3. Так как X — гильбертово пространство, то для нахождения решения уравнения (1.2) может быть применен метод наискорейшего спуска [7].

§ 2. Приближенное решение уравнения (2.3)

1°. **Одна теорема метода минимальных невязок.** Рассмотрим в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Kx = 0, \quad (2.1)$$

где K — нелинейный оператор, действующий из H в H. Для решения уравнения (2.1) может быть применен [8] итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \{\| Kx_n \|^2 / \| K'(x_0) Kx_n \|^2\} [K'(x_0)]^* Kx_n, \quad (2.2)$$

где $K'(x_0)$ — производная Гато оператора K в точке x_0, $[K'(x_0)]^*$ — сопряженный $K'(x_0)$ линейный оператор, x_0 — начальное приближение. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $\|Kx_0\| \equiv \delta_0$;

2) *оператор K имеет производную Гато в окрестности точки x_0, причем* $\|K'(x_0)h\| \geqslant \frac{1}{c}\|h\|$, $\|K'(x_0)\| \leqslant a$;

3) *в сфере* $S[x;\ \|x - x_0\| \leqslant r]$ $(r = ac^2\delta_0/(1-q)$, $q = Lac^2 + \sqrt{1 - 1/a^2c^2} < 1)$ *выполняется неравенство*

$$\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leqslant L.$$

Тогда уравнение (2.1) *имеет в S единственное решение x^*, к которому сходятся приближения* (2.2), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant aq^n\delta_0/(1-q).$$

Для доказательства теоремы достаточно, воспользовавшись неравенством [9]

$$\|Kx_1 - Kx_2 - K'(x_0)(x_1 - x_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|K'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) - K'(x_0)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \ (0 < \theta < 1),$$

повторить в основных чертах (рассуждения теоремы 13.2 монографии [8].

2°. В этом пункте обосновывается одна модификация метода минимальных невязок для с.и.у.

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{|\tau - t|^\delta}\,d\tau - f(t) = 0, \quad (2.3)$$

где $h'_u(t, \tau, u) \in C_{2\pi}$.

Приближенное решение уравнения (2.3) будем искать с помощью итерационного процесса

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \{\|\tilde{K}\tilde{x}_n\|^2 / \|\tilde{K}'(\tilde{x}_0)\tilde{K}\tilde{x}_n\|^2\}[\tilde{K}'(\tilde{x}_0)]^*\tilde{K}\tilde{x}_n, \quad (2.4)$$

где

$$\tilde{K}\tilde{x} \equiv P[a(t)\tilde{x}(t) + b(t)I(\tilde{x}) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P[h(t, \tau)\tilde{x}(\tau)d(t, \tau)]\,d\tau - f],$$

$x_0(t)$ — достаточно хорошее приближение к решению $x^*(t)$ уравнения (2.3), $\tilde{x}_0 = P\ [x_0]$; $\tilde{x}(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n.

Будем считать выполненными условия:

1) $a(t),\ b(t),\ f(t),\ h(t, \tau, u),\ h'_u(t, \tau, u),\ x_0(t) \in C_{2\pi}$;
2) в некоторой сфере S (определенной ниже)

$$\max_{t,\ \tau\in\gamma} | h'_u(t, \tau, u_1) - h'_u(t, \tau, u_2) | \leqslant F_1(u_1, u_2 \in S). \qquad (2.5)$$

Обоснование будем проводить в гильбертовом пространстве X. При выполнении условий (2.5) оператор K имеет производную Фреше

$$K'(x)\tilde{z} \equiv$$
$$\equiv a(t)\tilde{z}(t) + b(t)\, I(\tilde{z}) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'_u(t, \tau, x(\tau))\,\tilde{z}(\tau)}{|\tau - t|^\delta}\, d\tau, \qquad (2.6)$$

причем справедливо неравенство

$$\| K'(x_1) - K'(x_2) \| \leqslant A_1 F_1. \qquad (2.7)$$

Заметим, что

$$I_4 = K(x + \tilde{z}) - K(x) - K'(x)\tilde{z} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left\{\left\{\int_0^1 [h'_u(t, \tau, x(\tau) + v\tilde{z}(\tau)) - h'_u(t, \tau, x(\tau))]\, dv\right\} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, \tilde{z}(\tau)\, |\tau - t|^{-\delta}\right\} d\tau. \qquad (2.8)$$

Для доказательства (2.6) введем, следуя [10], произвольное ε ($\varepsilon > 0$). Если $|\tilde{z}| \not> \varepsilon$, то из тождества (2.8) следует, что $\|I_4\| \leqslant A_1 \|\tilde{z}\|\, \omega(h'_4;\ |\tilde{z}|)$. Если $|\tilde{z}| > \varepsilon$, то из этого же тождества и [11] следует, что

$$\|I_4\| / \|\tilde{z}\| \leqslant \|I_4\| / (\varepsilon) \leqslant A_2 \|\tilde{z}\| / (\varepsilon).$$

Справедливость (2.6) доказана. Аналогично доказывается (2.7).

Нетрудно видеть, что производная Фреше оператора $\tilde{K}$ имеет вид

$$\tilde{K}'(x)\tilde{z} \equiv P\,[a(t)\tilde{z}(t) + b(t)\, I(\tilde{z}) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P\,[h'_u(t, \tau, \tilde{x}(\tau))\, d(t, \tau)\, \tilde{z}(\tau)]\, d\tau].$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем оценку

$$\| \widetilde{K}'(\widetilde{x}_1) - \widetilde{K}'(\widetilde{x}_2) \| \leqslant A_3 F_1. \tag{2.9}$$

Будем считать, что существует линейный оператор $[K'(x_0)]^{-1}$. Существование линейного оператора $[K'(\widetilde{x}_0)]^{-1}$ следует из теоремы Банаха при n таких, что $q_1 = A_4\omega(h_u'; \omega(x_0; n^{-1})) < 1$.

В предыдущем параграфе доказано существование линейного оператора $[\widetilde{K}'(\widetilde{x}_0)]^{-1}$ с нормой, равной B_0.

Обозначив через δ_0 величину $\| Kx_0 \|$, оценим $\| \widetilde{K}\widetilde{x}_0 \|$:

$$\widetilde{\delta}_0 = \| \widetilde{K}\widetilde{x}_0 \| \leqslant \| Kx_0 \| + \| Kx_0 - K\widetilde{x}_0 \| + \\ + \| K\widetilde{x}_0 - P[K\widetilde{x}_0] \| + \| P[K\widetilde{x}_0] - \widetilde{K}\widetilde{x}_0 \| \leqslant \\ \leqslant \delta_0 + A_5 [\omega(a; n^{-1}) + \omega(b; n^{-1}) + [\omega(h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \\ + \omega(x_0; n^{-1})].$$

Введем обозначение $\{\| K'(x_0) \|, \| \widetilde{K}'(\widetilde{x}_0) \|\} = B_*$. Полагая, что в сфере $S[x; \| x - x_0 \| \leqslant r]$, где

$$r = B_* B_0^2 \widetilde{\delta}_0/(1-q) + \omega(x_0; n^{-1}),$$

$$q = [\max(A_1, A_3)] F_1 B_* B_0^2 + \sqrt{1 - 1/B_*^2 B_0^2} < 1,$$

выполняется неравенство (2.5), убеждаемся в выполнении условий теоремы 1 § 2. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в сфере* $S[x; \| x - x_0 \| \leqslant r]$

$$(r = B_* B_0^2 \delta_0/(1-q) + \omega(x_0; n^{-1}),$$

$$q = [\max(A_1, A_3)] F_1 B_* B_0^2 + \sqrt{1 - 1/B_0^2 B_*^2} < 1$$

выполнены условия (2.5) *и оператор* $K'(x_0)$ *имеет линейный обратный. Тогда при* n *таких, что*

$$p = A_8 [\omega(a; n^{-1/2}) + \omega(b; n^{-1/2}) + \\ + [\omega(h_u'; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \omega(h_u'; \omega(x_0; n^{-1})] < 1,$$

уравнение $\widetilde{K}\widetilde{x} = 0$ *имеет в* S *единственное решение* $\widetilde{x}^*$, *к которому сходится итерационный процесс* (2.4). *Расстояние между* $\widetilde{x}^*$ *и решением* x^* *уравнения* (2.3) *оцениваетcя неравенством*

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leqslant A_0 [\omega(a; n^{-1}) + \omega(b; n^{-1}) + + [\omega(h_u'; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \omega(x_0; n^{-1}) + \omega(f; n^{-1})].$$

Казанский государственный
университет

Поступило
13.X.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Иванов В. В., О применении метода моментов и смешанного метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, **114**, № 5 (1957), 945—948.

[2] Иванов В. В., Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968.

[3] Габдулхаев Б. Г., Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Докл. АН СССР, **179**, № 2 (1968), 260—264.

[4] Фан Ван Хап, Об одном методе приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **5**, № 2 (1965), 171—184.

[5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения., М., 1962.

[6] Габдулхаев Б. Г., Некоторые вопросы теории приближенных методов I, Изв. вузов. Математика, № 9 (1968), 16—28.

[7] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.

[8] Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

[9] Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных уравнений, М., 1956.

[10] Гусейнов А. И., О производной Фреше оператора $Au \equiv \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \Phi[s, u(s)] \cdot \mathrm{ctg}(s-x)/2\, ds$. Уч. зап. Азербайджанского ун-та, Физ.-матем. и хим. сер., № 1 (1959), 3—5.

[11] Михлин С. Г., Курс математической физики. М., 1968.