Математические заметки

Том 106 выпуск 4 октябрь 2019

УДК 517.518.23

Вложения пространств функций положительной гладкости на нерегулярных областях

О. В. Бесов

В работе устанавливается теорема вложения пространств функций положительной гладкости, определенных на нерегулярных областях n-мерного евклидова пространства, в пространства того же типа, а также некоторые близкие результаты.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: теоремы вложения, пространства функций положительной гладкости, нерегулярная область, пространства Соболева, пространства Лебега.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12198

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек, $n \geqslant 2$, $x = (x_1, \dots, x_n)$; $s > 0$; $1 \leqslant p < q < \infty$; $L_p(G)$ – лебегово пространство определенных на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \mathbb{R}^n$, функций с нормой

$$\|f \mid L_p(G)\| = \left(\int_G |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \qquad L(G) = L_1(G).$$

Все рассматриваемые функции f и производные $D^\alpha f$ локально суммируемы на области своего определения. Константы C с индексами, вообще говоря, различны в разных формулах.

Символом $W_p^s(G)$ при $s \in \mathbb{N}$ будем обозначать пространство Соболева с нормой

$$\|f \mid W_p^s(G)\| = \|f \mid L_p(G)\| + \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f \mid L_p(G)\|.$$

Известная теорема вложения Соболева $W_p^s(G) \subset L_q(G)$, характеризуемая неравенством

$$\|f \mid L_q(G)\| \leqslant C\|f \mid W_p^s(G)\|, \qquad s \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < q < \infty, \tag{1}$$

установлена им в 1938 г. для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса при

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0.$$

Это соотношение (определяющее максимально возможное значение q в теореме (1)) является и необходимым условием вложения. Результат С. Л. Соболева был перене-

© О. В. Бесов, 2019

сен на области более общего вида: области классов $J_{(n-1)/n}$, $I_{p,1/p-1/n}$ (В. Г. Мазья, 1960, 1975), области с условием Джона (John domains; Ю. Г. Решетняк, 1981), области с условием гибкого конуса (О. В. Бесов, 1983).

Определение 1. При $\sigma \geqslant 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *областью с условием гибкого σ-конуса* (или *σ-регулярной*), если при некоторых $T \in (0,1]$, $\kappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь

$$\gamma = \gamma_x \colon [0,T] \to G, \qquad \gamma(0) = x, \qquad |\gamma'| \leqslant 1 \quad \text{п.в.}, \tag{2}$$

такой, что

$$\operatorname{dist}(\gamma(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \geqslant \kappa t^\sigma \qquad \text{при} \quad 0 < t \leqslant T.$$

В случае $\sigma = 1$ такую область называют также *областью с условием гибкого конуса* или *регулярной*. Области, не удовлетворяющие условию гибкого конуса, будем называть *нерегулярными*.

Для нерегулярной области (которая в окрестности некоторой точки границы может, в частности, иметь вид внешнего пика) вложение (1) может оказаться неверным ни при каких соотношениях параметров или быть верным при некоторых более сильных ограничениях, связывающих n, s, p, q и зависящих от геометрических свойств области G.

В [1] приведена некоторая двухпараметрическая классификация областей евклидова пространства и установлена неулучшаемая теорема вложения (1) для областей каждого класса. В [2], [3] построены пространства положительной гладкости $B^s_{p,\theta}(G)$, $L^s_{p,\theta}(G)$, $s > 0$, на нерегулярных областях этого двухпараметрического семейства и установлены некоторые их свойства. В данной работе на областях из тех же классов устанавливается теорема вложения пространств $L^s_{p,\theta}(G)$, в пространства $L^l_{q,\tau}(G)$, $s > l > 0$, и уточняются некоторые случаи других теорем. Соотношение между параметрами функциональных пространств в этих теоремах вложения зависит от геометрических свойств области G. Такая зависимость для теоремы вложения (1) в некоторых случаях рассматриваемых здесь классов областей выявлена в работах [1], [4]–[6].

Доказательство основано на интегральном представлении функций, близком интегральному представлению из [7], но со специфическими отклонениями. Оно дает возможность оценить значения функции и ее производных через интегралы, содержащие ее локальные приближения. Вывод такого интегрального представления является центральным моментом работы.

При $t > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$,

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in [1,\sigma]^n, \qquad \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i = 1, \qquad |\mu| = \sum_{i=1}^n \mu_i \tag{3}$$

положим

$$y + tE := \{x : x = y + tz, z \in E\},$$
$$B(x,t) := \{y : |y - x| < t\} = x + B(0,t), \qquad B_0 = B(0,1),$$
$$Q_\mu(x,d) = x + \prod_{i=1}^n [-d^{\mu_i}, d^{\mu_i}],$$

χ – индикатор шара $B(0,1)$ или отрезка $[-1,1]$.

Для открытого множества G и достаточно малого числа $\delta > 0$ положим

$$G_\delta = \{x : x \in G,\ \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) > \delta\}.$$

Мы будем рассматривать функциональные пространства на различных подклассах классов σ-регулярных областей, характеризующихся дополнительным параметром – мультииндексом μ. Далее везде $\sigma \geqslant 1$, $G - \sigma-$регулярная область, $\kappa \in (0,1)$, $\Re$ – оператор некоторого поворота в $\mathbb{R}^n$, $r(t) = \kappa_0 t^\sigma$, $0 < t \leqslant T$.

Определение 2. Пусть открытые множества $G_0 \subset G \subset \mathbb{R}^n$. Пусть при некоторых $T, \varepsilon \in (0,1]$ для каждого $x \in G_0$ определен лежащий в G путь вида (2). Будем писать $(G, G_0) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, \mu)$, если при операторе некоторого поворота $\Re$ выполнены следующие свойства:

1°) гибкий σ-конус

$$V_x(t) := \bigcup_{0 \leqslant u \leqslant t} B(\gamma(u), \kappa u^\sigma) \subset G \cap \Re Q_\mu\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\, t \in (0,T] \quad \forall\, x \in G_0;$$

2°) выполнено

$$\exists\, c_1, c_2 > 0: \quad \forall\, x \in G_0 \quad \forall\, t_0 \in (0,T] \forall\, y \in B(\gamma_x(t_0), r(t_0)) \quad \exists\, [t_1, t_2] \subset (0,T]:$$
$$c_1 r(t_0) \leqslant t_2 - t_1 \leqslant c_2 r(t_0), \qquad |y - \gamma_x(t)| \geqslant r(t_0) \quad \text{при} \quad t \notin [t_1, t_2],$$
$$c_1 r(t_0) \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \chi\left(\frac{y - \gamma_x(t)}{2r(t)}\right) dt \leqslant c_2 r(t_0).$$

Отсюда следует, что

$$\exists\, c: \qquad \int_0^T t^{-\sigma} \chi\left(\frac{|y - \gamma_x(t)|}{\kappa t^\sigma}\right) dt \leqslant c \qquad \forall\, x \in G_0 \quad \forall\, y \in G.$$

Пример множеств (G, G_0) класса $\mathscr{G}(\sigma, \kappa, \mu)$ имеется в [1].

Замечание 1. Если путь γ вида (2) удовлетворяет условию 1°, то этот путь можно видоизменить (заменить конечнозвенной ломаной) таким образом, что он будет удовлетворять также и условию 2°. Способ исправления путей предложен в [5].

Определение 3. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma \geqslant 1$, $\kappa > 0$, $M \in [n, \sigma(n-1)+1]$. Пусть существует конечное число J открытых множеств G_j таких, что

$$(G, G_j) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, \mu^j), \qquad |\mu^j| = M \quad (j = 1, \ldots, J), \qquad \left| G \setminus \bigcup_{j=1}^J G^j \right| = 0.$$

Тогда будем писать $(G, \{G_j\}_1^J) \in \mathscr{G}((\sigma, \kappa, M)$.

Определение 4. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, открытые множества $G_0 \subset G_0^* \subset G$. Пусть при некоторых $T, \varepsilon \in (0,1]$ для каждого $x \in G_0^*$ определен лежащий в G кусочно гладкий путь $\gamma = \gamma_x = x + \gamma_x^{(0)}$ вида (2), причем для $x \in G_0$ этот путь лежит в G_0^*.

Будем писать $(G, G_0, G_0^*) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, \mu)$, если $(G_0^*, G_0) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, \mu)$ и выполнено свойство

3°) найдется c_3 такое, что для любых $x \in G_0$ на $D := \{(y,t) : 0 \leqslant t \leqslant T,\ |y| < \kappa t^\sigma\}$ функция $(y,t) \to \gamma^{(0)}_{\gamma_x(t)+y}(t)$ непрерывна, для любых y, $|y| < \kappa t^\sigma$, функция $t \to \gamma^{(0)}_{\gamma_x(t)+y}(t)$ кусочно гладкая и п.в. $|(\partial/\partial t)\gamma^{(0)}_{\gamma_x(t)+y}(t)| \leqslant c_3$ на $\{t : 0 \leqslant t \leqslant T,\ |y| < r(t)\}$.

Определение 5. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma \geqslant 1$, $\kappa > 0$, $M \in [n, \sigma(n-1)+1]$. Пусть существует конечное число J открытых множеств G_j, G_j^* таких, что

$$(G, G_j, G_j^*) \in \mathscr{G}(, \sigma, \kappa, \mu^j), \qquad |\mu^j| = M, \quad j = 1, \dots, J, \qquad \left| G \setminus \bigcup_{j=1}^J G^j \right| = 0.$$

Тогда будем писать $(G, \{G_j, G_j^*\}_1^J) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, M)$.

При $x, a \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ для числовой функции f положим

$$\tau_a f(x) = f(x+a), \qquad \sigma_t f(x) = f(tx).$$

Через $\mathbb{P}_{m-1}$ обозначим линейное пространство многочленов вида $\sum_{|\alpha| \leqslant m-1} c_\alpha x^\alpha$. Пусть $\pi = \pi^{m-1} \colon L(B_0) \to L(B_0)$ – некоторый проектор на $\mathbb{P}_{m-1}$,

$$\pi_{a,t} = \tau_a^{-1} \circ \sigma_t^{-1} \circ \pi \circ \sigma_t \circ \tau_a, \qquad D_{m-1}(t) f(x) = t^{-n} \| f - \pi_{x,t} f \mid L(B(x,t)) \|.$$

При $E \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$D_{m-1}(t, E) f(x) = \begin{cases} D_{m-1}(t) f(x), & \text{если } B(x,t) \subset E, \\ 0, & \text{если } B(x,t) \not\subset E. \end{cases}$$

Замечание 2. Локальные приближения $\| f - \pi_{x,t} f \mid L(B(x,t)) \|$ функции f проекционным многочленом из $\mathbb{P}_{m-1}$ эквивалентны ее наилучшему приближению в пространстве $L(B(x,t))$ с помощью многочленов из $\mathbb{P}_{m-1}$.

Определение 6. Пусть $\sigma \geqslant 1$, $\kappa > 0$, μ удовлетворяет условию (3), $\Re$ – оператор поворота, $(G, G^0) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, \mu)$. Пусть $\{\gamma_x\}_{x \in G^0}$ – множество путей, удовлетворяющих определению 2.

При $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < s < m$ символом $L^{s(m)}_{p,\theta}(G_0, G, \sigma, \kappa)$ обозначим нормированное пространство определенных на G функций с конечной нормой

$$\| f \mid L^{s(m)}_{p,\theta}(G, G_0), \sigma, \kappa) \| = \| f \mid L_p(G_\delta) \| + \| f \mid l^{s(m)}_{p,\theta}(G, G^0, \sigma, \kappa) \|, \tag{4}$$

при достаточно малом $\delta > 0$, где при $\gamma = \gamma_x$ в случае $p, \theta < \infty$

$$\| f \mid l^{s(m)}_{p,\theta}(G, G^0, \sigma, \kappa) \| = \left\{ \int_G \left(\int_0^T [D_{m-1}(t, G) f(x)]^\theta t^{-s\theta} \, \frac{dt}{t} \right)^{p/\theta} dx \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{G^0} \left(\int_0^T [t^{m-s-\sigma m} D_{m-1}(\kappa t^\sigma) f(\gamma(t))]^\theta \, \frac{dt}{t} \right)^{p/\theta} dx \right\}^{1/p} \tag{5}$$

с обычной модификацией (4), (5) при $p = \infty$ или $\theta = \infty$.

Определение 7. Пусть $\sigma \geqslant 1$, $0 < \kappa$, $M \in [n, \sigma(n-1)+1]$, $(G, \{G_j\}) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, M)$.

При $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < s < m$ символом $L_{p,\theta}^{s(m)}(G, \{G_j\}, \sigma, \kappa)$ будем обозначать нормированное пространство определенных на G функций с конечной нормой

$$\|f \mid L_{p,\theta}^{s(m)}(G, \{G_j\}, \sigma, \kappa)\| = \sum_{j=1}^{J} \|f \mid L_{p,\theta}^{s(m)}(G, G_j, \sigma, \kappa)\|.$$

2. Теоремы вложения. В следующих теоремах $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, G – область в $\mathbb{R}^n$ с условием гибкого σ-конуса, $\sigma \geqslant 1$, $\kappa \in (0, 1]$, $M \in [n, \sigma(n-1)+1]$, $0 \leqslant l < s < \infty$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$.

Теорема 1. *Пусть* $(G, \{G_j\}) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, M)$, $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$ *и выполняется условие*

$$s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{M}{q} \geqslant 0.$$

Тогда

$$W_p^s(G) \subset L_q(G).$$

Теорема 2. *Пусть* $(G, \{G_j, G_j^*\}) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, M)$, $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *и выполняется условие*

$$s - \frac{\sigma-1}{\theta} - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{M}{q} \geqslant 0.$$

Тогда

$$L_{p,\theta}^{s(m)}(G, \{G_j, G_j^*\}, \sigma, \kappa) \subset L_q(G),$$

Теорема 3. *Пусть* $(G, \{G_j, G_j^*\}) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, M)$, $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *и выполняется условие*

$$s - l - l^+(\sigma-1) - \frac{\sigma-1}{\tau'} - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{M}{q} \geqslant 0. \tag{6}$$

Тогда

$$W_p^s(G) \subset L_{q,\tau}^{l(l^+)}(G, \{G_j\}).$$

Теорема 4. *Пусть* $(G, \{G_j, G_j^*\}) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, M)$, $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *и выполняется условие*

$$s - l - l^+(\sigma-1) - (\sigma-1)\max\left\{\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\tau'}\right\} - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{M}{q} \geqslant 0. \tag{7}$$

Тогда

$$L_{p,\theta}^{s(m)}(G, \{G_j\}, \sigma, \kappa) \subset L_{q,\tau}^{l(l^+)}(G, \{G_l^*\}).$$

Теорема 5. *Пусть* $(G,\{G_j\},\{G_j^*\}) \in \mathscr{G}(\sigma,\kappa,M)$, $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $0 \leqslant l < l^+ = s$ *и выполняется условие*

$$s - l - \frac{\sigma-1}{\tau'} - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{M}{q} \geqslant 0.$$

Тогда

$$W_p^s(G) \subset L_{q,\tau}^{l(s)}(G). \tag{8}$$

Теорема 1 при $\sigma > 1$ в случае $s = 1$, $M = n$ установлена в работе [5] и в общем случае в работе [1]. Теорема 2 установлена в [8], теорема 5 в случае $\tau = 1$, $0 < l < s$ установлена в [3].

Теоремы 3, 4 новые. Они будут доказаны на основе выведенных здесь интегральных представлений в п. 4.

3. Интегральное представление функции. Построим интегральное представление функции на σ-регулярной области через ее локальные приближения многочленами, влекущее соответствующие интегральные оценки. Пусть $\sigma \geqslant 1$, область $G \subset \mathbb{R}^n$ является σ-регулярной, открытое множество $G_0 \subset G$, $(G,G_0) \in \mathscr{G}(\sigma,\kappa,\mu)$, $x \in G_0$ и путь $\gamma = \gamma_x = x + \gamma_x^{(0)}$ удовлетворяет условиям (2), (3). Пусть

$$r(t) = \kappa_0 t^\sigma, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для функции f из какого-либо из рассматриваемых функциональных пространств (следовательно, локально суммируемой) ниже будет построено ее усреднение $f_{(t)}$ такое, что $f_{(t)}(x)$ при $t \to 0$ стремится к $f(x)$ почти всюду, а производная $(\partial/\partial t)f_{(t)}$ обладает специальными свойствами (ортогональности и др.). Тогда интегральное представление функции $f(x)$ выводится из формулы Ньютона–Лейбница

$$f(x) = -\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} f_{(t)}(x)\,dt + f_{(T)}(x)$$

с помощью преобразований подынтегрального выражения.

Перейдем к построению усреднения $f_{(t)}$. Приведем сначала вспомогательное усреднение из [9; п. 7.3]. Пусть $\widetilde{\Theta}$ – сглаженная функция Хевисайда:

$$\widetilde{\Theta} \in C^\infty(\mathbb{R}),$$
$$\widetilde{\Theta}(u) = 0 \quad \text{при} \quad u \leqslant 0, \qquad \widetilde{\Theta}(u) = 1 \quad \text{при} \quad u \geqslant 1, \qquad \operatorname{supp}\widetilde{\Theta}' \in (-\delta,\delta), \quad 0 < \delta \leqslant 1.$$

При $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$\omega(u) = \frac{d^m}{du^m}\left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\,\widetilde{\Theta}(u)\right), \qquad \operatorname{supp}\omega(\,\cdot\,) \subset (-\delta,\delta), \quad 0 < \delta \leqslant \frac{1}{2},$$
$$\int \omega(u)\,du = \widetilde{\Theta}(1) = 1, \qquad \int \omega(u)u^k\,du = 0 \quad \text{при} \quad k = 1,2,\dots,m-1.$$

Пусть r – непрерывная и кусочно гладкая на $[0,T]$ функция,

$$r\colon [0,T] \to [0,\infty),$$
$$0 < r(t) \quad \text{при} \quad t > 0, \qquad r(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0, \qquad |r'(t)| \leqslant c_0.$$

Рассмотрим усреднение f_t функции $f \in L(\mathbb{R}, \mathrm{loc})$ в точке x:

$$f_t(x) = \int \frac{1}{r(t)}\,\omega\left(\frac{y}{r(t)}\right) f(x+y)\,dy.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r(t)}\,\omega\left(\frac{y}{r(t)}\right) &= \frac{\partial^m}{\partial y^m}\left[\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}\,\widetilde{\Theta}\left(\frac{y}{r(t)}\right)\right],\\
\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r(t)}\,\omega\left(\frac{y}{r(t)}\right)\right] &= \frac{\partial^m}{\partial y^m}\left\{\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}\,\widetilde{\Theta}'\left(\frac{y}{r(t)}\right)\frac{-r'(t)y}{r(t)^2}\right\},\\
\left|\frac{1}{r(t)}\,\omega\left(\frac{y}{r(t)}\right)\right| &\leqslant \frac{C}{r(t)},\\
\left|\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r(t)}\,\omega\left(\frac{y}{r(t)}\right)\right]\right| &\leqslant \frac{C}{r(t)^2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Пусть теперь функция $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathrm{loc})$. Рассмотрим усреднение

$$f_t(x) = \frac{1}{r(t)^n}\int \Omega\left(\frac{y}{r(t)}\right) f(x+y)\,dy,$$

где $\Omega(x) = \prod_{i=1}^n \omega(x_i)$, $\operatorname{supp}\Omega \subset [-\delta, \delta]^n$.

Из (9) вытекает, что усреднение f_t сохраняет произвольный многочлен $P_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}$:

$$(P_{m-1})_t(x) = P_{m-1}(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}(P_{m-1})_{[t]}(x) = 0 \quad \text{при всех} \quad t > 0. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь следующую линейную комбинацию значений функции φ от n переменных:

$$\varphi_{[t]}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k(t)\varphi(x + h(1+kt)), \tag{11}$$

где $h \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, а коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\sum_0^{m-1} c_k(t) = 1, \qquad \sum_0^{m-1} c_k(t)(1+kt)^l = 0, \quad l = 1, \dots, m-1. \tag{12}$$

Установлено (см. [10], [11]), что

$$c_k(t) = Q_{m-1,k}(t)t^{-m+1},$$

где $Q_{m-1,k}$ – некоторый многочлен степени $m-1$.

Из условий (12) вытекает (см. [10], [11]), что линейная комбинация вида (11) сохраняет произвольный многочлен P_{m-1} n переменных степени $m-1$:

$$(P_{m-1})_{[t]}(x) = P_{m-1}(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}(P_{m-1})_{[t]}(x) = 0 \quad \text{при всех} \quad t > 0. \tag{13}$$

Пусть$(G, G_0, G_0^*) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, \mu)$ и $\{\gamma_x\}_{x \in G_0^*}$ – множество путей, которым наделено G_0^* в соответствии с определением 2, $r(t) = \kappa_0 t^\sigma$, $0 < \kappa_0 \leqslant \kappa$. Для оценки $L_{q,\tau}^{l(m)}(G_0)$-

нормы функции f оценим сначала $D_{m-1}(r(t_0))f(\gamma_x(t_0))$ при фиксированных $x \in G_0$, $t_0 \in (0,T]$. Введем для этого следующие обозначения:

$$X := \gamma_x(t_0), \qquad y \in \mathbb{R}^n, \quad |y| < r(t), \qquad Y = X + y,$$

$$\Gamma_Y(t) = \begin{cases} Y - y\dfrac{t}{t_0} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \gamma_x(t) & \text{при } t_0 \leqslant t_0 \leqslant T, \end{cases} \qquad R_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t_0}\, r(t_0) & \text{при } 0 < t \leqslant t_0, \\ r(t) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Нужное интегральное представление строится на основе представления ($m = s^+$)

$$f_{(t)}(Y) = \int \frac{1}{R_Y(t)^n}\,\Omega\biggl(\frac{z}{R_Y(t)}\biggr) \int \frac{1}{r(t)^n}\,\Omega\biggl(\frac{v}{r(t)}\biggr) \sum_0^{m-1} c_k\biggl(\frac{r(t)}{4mt}\biggr)$$
$$\times f\biggl(\gamma_{\Gamma_{Y(t)+z}}(t) + v + k(\Gamma_Y^{(0)}(t) + z + \gamma^{(0)}_{\Gamma_Y(t)+z}(t) + v)\frac{r(t)}{4mt}\biggr)\, dz\, dv.$$

Его можно записать в виде

$$f_{(t)}(Y) = \int \frac{1}{R_Y(t)^n}\,\Omega\biggl(\frac{z}{R_Y(t)}\biggr) \int \frac{1}{r(t)^n} \sum_0^{m-1} c_k\biggl(\frac{r(t)}{4mt}\biggr)$$
$$\times\, \Omega\biggl(\frac{v - \gamma_{\Gamma_{Y(t)+z}}(t) - k(\Gamma_Y^{(0)}(t) + z + \gamma^{(0)}_{\Gamma_Y(t)+z}(t))(r(t)/(4mt))}{r(t)(1 + kr(t)/4mt)}\biggr)$$
$$\times\, f(v)\, dz\, \frac{dv}{(1 + kr(t)/4mt)^n}\,. \tag{14}$$

Заметим, что в силу (10), (13) производная $(\partial/\partial t)f_{(t)}(x)$ аннулирует любой многочлен $P_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}$, так что

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{(t)}(x) = \frac{\partial}{\partial t}(f - P_{m-1})_{(t)}(x) \qquad \forall\, P_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}.$$

При $t > t_0$ $\Gamma_Y(t) = f_x(t)$. Поэтому зависимость от Y в (14) под знаком Ω линейная. То же относится к интегралу, выражающему $(\partial/\partial t)(f - P_{m-1})_{(t)}$. Дифференцируя последний по Y и выбирая в качестве P_{m-1} проекционный многочлен на соответствующем шаре, получаем оценку

$$\biggl|D_Y^\alpha \frac{\partial}{\partial t} f_{(t)}(Y)\biggr| \leqslant Ct^{m-1} r(t)^{-m-|\alpha|} \int \frac{1}{R_Y(t)^n}\,\chi\biggl(\frac{z}{R_Y(t)}\biggr)$$
$$\times\, D_{m-1}(2r(t)) f(\Gamma_Y(t) + z + \gamma^{(0)}_{\Gamma_Y(t)+z}(t))\, dz$$
$$\leqslant Ct^{m-1} r(t)^{-m-|\alpha|} \int \frac{1}{R_Y(t)^n}\,\chi\biggl(\frac{z - \Gamma_Y(t)}{R_Y(t)}\biggr) D_{m-1}(2r(t) f(\gamma_z(t)))\, dz. \tag{15}$$

По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(Y) = -\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} f_{(t)}(Y)\, dt + f_{(T)}(Y). \tag{16}$$

Покажем, что эта формула для функции $f \in L^{s(m)}_{p,\theta}(G_0, G, \sigma, \kappa)$ справедлива для почти всех $Y \in B(X, r((t_0))$. В самом деле, функция f и оба слагаемых правой части (16) суммируемы на некоторой ε-окрестности $B(X, r(t_0))$. Для первого слагаемого правой части (16) это следует из оценки (15) и принадлежности $f \in L^{s(m)}_{p,\theta}(G_0, G, \sigma, \kappa)$ (детальнее это будет видно из оценок $f_{(0,t_0)}$ при доказательстве теоремы 4). Рассмотрим усреднение функции f

$$f_h(Y) := \frac{1}{h^n} \int \Omega\left(\frac{w}{h}\right) f(Y + w)\, dw, \qquad h > 0.$$

При замене в (16) f на f_h все члены формулы (16) являются гладкими функциями, и само равенство справедливо. Его можно переписать в виде

$$f_h(Y) = \left(-\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} f_t(\,\cdot\,)\, dt\right)_h (Y) + (f_{(T)})_h(Y).$$

Если Y – точка Лебега каждого из членов формулы (16), то предельный переход в последнем равенстве при $h \to 0 + 0$ дает формулу (16).

4. Доказательство теоремы 4.

Лемма 1. *Пусть γ_x – кривая, удовлетворяющая определению 2, и пусть $s \geqslant 0$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1/\theta' + 1/\theta = 1$. Тогда*

$$\left\{\int_0^T t^{s\theta'} \frac{1}{r(t)^{n\theta'}} \chi\left(\frac{y - \gamma_x(t)}{r(t)}\right) \frac{dt}{t}\right\}^{1/\theta'} \leqslant C \int_0^T t^s \frac{1}{r(t)^n} \left(\frac{r(t)}{t}\right)^{-1/\theta} \chi\left(\frac{y - \gamma_x(t)}{r(t)}\right) \frac{dt}{t} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Доказательство. В силу определения 2 для каждого $y \in B(\gamma \mid x(t_0), r(t_0))$ левая часть (17) оценивается через

$$C_1 t_y^s \frac{1}{r(t_y)^n} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta'} \leqslant C_2 \int_{t_1}^{t_2} t^s \frac{1}{r(t)^n} \left(\frac{r(t)}{t}\right)^{-1/\theta} \frac{dt}{t},$$

что оценивается правой частью (17). Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 4 достаточно получить нужные оценки на G_0, где $(G, G_0, G_0^*) \in \mathscr{G}(\sigma, \kappa, \mu)$ при $|\mu| \geqslant M$, $\Re = \mathrm{Id}$. Установим только оценку

$$\left\{\int_{G_0} \left\{\int_0^T [t^{l^+ - l} t^{-\sigma l^+} D_{l^+ - 1}(\kappa t^\sigma) f(\gamma(t))] \frac{dt}{t}\right\}^{q/\tau} dx\right\}^{1/q} \leqslant C \| f \mid L^{s(s^+)}_{p,\theta}(G, G_0^*, \sigma, \kappa)\|,$$

поскольку другие оценки для доказательства (1) проще и имеются в литературе.

Разбив интеграл в правой части (16) на два интеграла $\left(\int_0^T = \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^T\right)$, запишем (16) в виде

$$f(Y) = f_{(0,t_0)}(Y) + f_{(t_0,T)}(Y) + f_{(T)}(Y), \qquad 0 < t_0 \leqslant T.$$

Положим $m = s^+$,

$$g(z,t) := \begin{cases} t^{m-s} r(t)^{-m} D_{m-1}(2r(t)) f(\gamma_z(t)) & \text{при } z \in G_0^*,\ 0 < t \leqslant T, \\ 0 & \text{при } z \notin G_0^* \text{ или при } t > T, \end{cases}$$

$$g_\theta(z) := \left\{ \int_0^T g(z,t)^\theta \, \frac{dt}{t} \right\}^{1/\theta}, \qquad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty.$$

Тогда с помощью неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} |f_{(0,t_0)}(Y)| &\leqslant \int \int_0^{t_0} t^s R_Y(t)^{-n} \chi\left(\frac{z - \Gamma_Y(t)}{R_Y(t)} \right) g(z,t) \, \frac{dt}{t} \, dz \\ &\leqslant \int \left\{ \int_0^{t_0} t^{s\theta'} R_Y(t)^{-n\theta'} \chi\left(\frac{z - \Gamma_Y(t)}{R_Y(t)} \right) \frac{dt}{t} \right\}^{1/\theta'} g_\theta(z) \, dz \\ &\leqslant C \int \left\{ \int_0^{t_0} t^{(s-n)\theta'} \left(\frac{r(t_0)}{t_0} \right)^{-n\theta'} \chi\left(\frac{z - \Gamma_Y(t)}{t(r(t_0)/t_0)} \right) \frac{dt}{t} \right\}^{1/\theta'} g_\theta(z) \, dz. \end{aligned}$$

Поскольку в области интегрирования последнего интеграла

$$\left| z - \left(\gamma_x(t_0) + y - y \frac{t}{t_0} \right) \right| < t \frac{r(t_0)}{t_0} \leqslant r(t_0),$$

то $|z - \gamma_x(t_0) - y| < 2r(t_0)(t/t_0)$. Поэтому

$$|f_{(0,t_0)}(Y)| \leqslant C \int \left\{ \int_0^{t_0} t^{(s-n)\theta'} \left(\frac{r(t_0)}{t_0} \right)^{-n\theta'} \chi\left(\frac{z - \gamma_x(t_0) - y}{2r(t_0)(t/t_0)} \right) \frac{dt}{t} \right\}^{1/\theta'} g_\theta(z) \, dz.$$

Рассмотрим лишь случай $s - n < 0$. В противном случае оценим сначала t^{s-n} через $t_0^\delta t^{s-\delta-n}$ при $0 < \delta < s$. Тогда показатель степени при t равен $s - \delta - n < 0$ и дальнейшие выкладки аналогичны приводимым ниже для случая $s - n < 0$.

Оценивая в последнем интеграле внутренний интеграл, имеем

$$|f_{(0,t_0)}(Y)| \leqslant C_1 \int \chi\left(\frac{z - \gamma_x(t_0) - y}{2r(t_0)} \right) |z - \gamma_x(t_0) - y|^{s-n} \left(\frac{t_0}{2r(t_0)} \right)^s g_\theta(z) \, dz.$$

При фиксированном $x \in G_0$

$$\begin{aligned} D_{l^+-1}(r(t_0)) f_{(0,t_0)}(\gamma_x(t_0)) &\leqslant C r(t_0)^{-n} \int_{|y| < r(t_0)} |f_{(0,t_0)}(\gamma_x(t_0) + y)| \, dy \\ &\leqslant C_1 r(t_0)^{-n} \int \chi\left(\frac{y}{r(t_0)} \right) \int \chi\left(\frac{z-y}{2r(t_0)} \right) |z-y|^{s-n} \left(\frac{t_0}{2r(t_0)} \right)^s dy g_\theta(z + \gamma_x(t_0)) \, dz. \end{aligned}$$

В области интегрирования последнего интеграла $|y| < r(t_0)$, $|z - y| < 2r(t_0)$, откуда $|z| < 3r(t_0)$. Поэтому внутренний интеграл оценивается через $C_2 \chi(z/(3r(t_0)))|z|^s$. Следовательно,

$$\begin{aligned} A g_\theta(x) &:= \left\{ \int_0^T [t_0^{l^+ - l - \sigma l^+} D_{l^+-1}(r(t_0)) f_{(0,t_0)}(\gamma_x(t_0))]^\tau \, \frac{dt_0}{t_0} \right\}^{1/\tau} \\ &\leqslant C \left\{ \int_0^T \left[t_0^{l^+ - l - \sigma l^+ - \sigma n} \left(\frac{t_0}{r(t_0)} \right)^s \chi\left(\frac{z}{3r(t_0)} \right) |z|^s g_\theta(z + \gamma_x(t_0)) \, dz \right]^\tau \frac{dt_0}{t_0} \right\}^{1/\tau}. \end{aligned}$$

С помощью неравенства Минковского для интегралов получаем, что

$$Ag_\theta(x) \leqslant C \int \left\{ \int_0^T \left[t_0^{l^+-l-\sigma l^+-n} \left(\frac{t_0}{r(t_0)} \right)^s \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t_0)}{3r(t_0)} \right) |z-\gamma_x(t_0)|^s \right]^\tau \frac{dt_0}{t_0} \right\}^{1/\tau} g_\theta(z)\,dz.$$

В силу леммы 1

$$Ag_\theta(x) \leqslant C_1 \int \int_0^T t_0^{l^+-l-\sigma l^+-n+s} \left(\frac{r(t_0)}{t_0} \right)^{-1/\tau'} \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t_0)}{3r(t_0)} \right) \frac{dt_0}{t_0}\, g_\theta(z)\,dz.$$

Остается воспользоваться оценкой нормы оператора

$$A\colon L_p(G_0^*) \to L_q(G_0),$$

имеющейся, например, в [8] и основанной на результате Кокилашвили–Габидзашвили [12] о слабой ограниченности интегрального оператора и интерполяционной теореме Марцинкевича. Получаем, что оператор A ограничен при

$$s - l - l^+(\sigma-1) - \frac{\sigma-1}{\tau'} \geqslant \frac{\sigma(n-1)+1}{p} - \frac{|\mu|}{q}. \tag{18}$$

Оценим теперь $D_{l^+-1}(r(t_0))f_{(t_0,T)}(\gamma_x(t_0))$. Легко видеть, что при $|\alpha| = l^+$, $m = s^+$

$$|D^\alpha f_{(t_0,T)}(X+y)|$$
$$\leqslant C \int_{t_0}^T t^{m-1} r(t)^{-m-l^+} \int r(t)^{-n} \chi\left(\frac{z}{r(t)} \right) D_{m-1}(2r(t)) f(z+\gamma_x(t))\,dz\,dt.$$

В принятых выше обозначениях с помощью неравенства Гёльдера и затем леммы 1 получаем

$$|D^\alpha f_{(t_0,T)}(X+y)| \leqslant C \int \int_{t_0}^T t^{s-l^+\sigma-n\sigma} \left(\frac{r(t)}{t} \right)^{-1/\theta} \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t)}{2r(t)} \right) \frac{dt}{t}\, g_\theta(z)\,dz.$$

Следовательно,

$$D_{l^+-1}(r(t_0))f_{(t_0,T)}(\gamma_x(t_0))$$
$$\leqslant C r(t_0)^{-n+l^+} \int_{|y|<r(t_0)} \sum_{|\alpha|=l^+} |D^\alpha f_{(t_0,T)}(X+y)|\,dy$$
$$\leqslant C_1 r(t_0)^{l^+} \int \int_{t_0}^T t^{s-l^+\sigma-n\sigma-(\sigma-1)/\theta} \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t)}{2r(t)} \right) \frac{dt}{t}\, g_\theta(z)\,dz.$$

Оценим теперь $L_q(G_0)$-норму

$$Bg_\theta(x) := \left\{ \int_0^T [t_0^{l^+-l-l^+\sigma} D_{l^+-1}(r(t_0)) f(\gamma_x(t_0))]^\tau \frac{dt}{t} \right\}^{1/\tau}$$
$$\leqslant C \left\{ \int_0^T \left[t_0^{l^+-l} \int \int_{t_0}^T t^{s-l^+\sigma-n\sigma-(\sigma-1)/\theta} \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t)}{2r(t)} \right) \frac{dt}{t}\, g_\theta(z)\,dz \right]^\tau \frac{dt_0}{t_0} \right\}^{1/\tau}.$$

Применяя неравенство Минковского для интегралов, получаем, что

$$Bg_\theta(x) \leqslant C_1 \int \int_0^T \left\{ \int_0^t [t_0^{l^+-l+s-l^+\sigma-(\sigma-1)/\theta-n\sigma}]^\tau \frac{dt_0}{t_0} \right\}^{1/\tau} \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t)}{2r(t)}\right) \frac{dt}{t}\, g_\theta(z)\, dz$$
$$\leqslant C_2 \int \int_0^T t^{s+l^+-l-l^+\sigma-(\sigma-1)/\theta-n\sigma} \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t)}{2r(t)}\right) \frac{dt}{t}\, g_\theta(z)\, dz.$$

Оператор $B\colon L_p(G_0^*) \to L_q(G_0)$ ограничен при

$$s - l - l^+(\sigma-1) - \frac{\sigma-1}{\theta} \geqslant \frac{\sigma(n-1)+1}{p} - \frac{|\mu|}{q}. \tag{19}$$

При выполнении оценки (7) выполняются также и оценки (18), (19).

Для завершения доказательства теоремы 4 получим оценку $L_{q,\tau}^{l(l^+)}(G_0)$-полунормы функции $f_{(T)}$. Зафиксировав $x \in G_0$, $t_0 \in (0,T]$, воспользуемся оценкой (7.4) из [13]:

$$D_{l^+-1}(r(t_0))f(\gamma_x(t_0)) \leqslant C \sum_{|\alpha|=l^+} r(t_0)^{l^+} \int_{|Y-\gamma_x(t_0)|<r(t_0)} |D^\alpha f(Y)|\, dY.$$

Полагая $\overline{f} = \chi_{(G_0^*)_\delta}$, имеем ($\varepsilon = l^+ - l > 0$)

$$\left\{ \int_0^T [t^{l^+-l-\sigma l^+} D_{l^+-1}(r(t_0)) f_{(T)}(\gamma_x(t_0))]^\tau \frac{dt_0}{t_0} \right\}^{1/\tau}$$
$$\leqslant C_2 \int \overline{f}(z) \chi\left(\frac{z-x}{4T}\right) dz \left\{ \int_0^T [t_0^\varepsilon r(t_0)]^\tau \frac{dt_0}{t_0} \right\}^{1/\tau}.$$

Применяя неравенство Юнга, приходим к оценке

$$\left\| \left\{ \int_0^T [t^{l^+-l-\sigma l^+} D_{l^+-1}(r(t_0)) f_{(T)}(\gamma_x(t_0))]^\tau \frac{dt_0}{t_0} \right\}^{1/\tau} \mid L_q(G_0) \right\|$$
$$\leqslant C_4 \|f \mid L_p((G_0^*)_\delta)\|,$$

чем и завершается доказательство теоремы 4.

5. Доказательство теоремы 3. Будем следовать плану доказательства теоремы 4 и придерживаться обозначений $r(t)$, X, Y, Γ_Y, R_Y, принятых при доказательстве теоремы 4. Установим лишь оценку

$$\left\{ \int_{G_0} \left\{ \int_0^T [t^{l^+-l-\sigma l^+} D_{l^+-1}(r(t)) f_{(T)}(\gamma_x(t_0))]^\tau \frac{dt}{t} \right\}^{q/\tau} dx \right\}^{1/q}$$
$$\leqslant C \|f \mid W_p^s(G)\|,$$

поскольку другие необходимые оценки выводятся проще. Зафиксировав $x \in G_0$, $t_0 \in (0,T]$, оценим $D_{l^+-1}(r(t_0))f(\gamma_x(t))$.

Будем пользоваться интегральным представлением функций, основанном на более простом усреднении функции f ($m = l^+$):

$$f_{\{t\}}(Y) = \int R_Y(t)^{-n} \Omega\left(\frac{z}{R_Y(t)}\right) \int R_Y(t)^{-n} \Omega\left(\frac{v}{R_Y(t)}\right)$$
$$\times \sum_{k=0}^{s-1} c_k \left(\frac{r(t)}{4mt}\right) f\left(\Gamma_Y(t) + z + v + k(\Gamma_Y^{(0)}(t) + z)\frac{r(t)}{4mt}\right) dz\, dv.$$

В силу второго равенства в (10)

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \frac{\partial}{\partial t}(f - P_{m-1})_t(x).$$

Беря в качестве P_{m-1} многочлен Тейлора и записывая остаточный член $f - P_{m-1}$ в интегральной форме, получаем выражение $(\partial/\partial t)f_t$ через интегралы, содержащие производные $D^\alpha f$ ($|\alpha| = s$). Аналогично поступаем с $(\partial/\partial t)\varphi_{[t]}$. Поэтому $(\partial/\partial t)f_{\{t\}}(Y)$ можно оценить через интегралы, содержащие $D^\alpha f$ ($|\alpha| = s$). Именно,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f_{\{t\}}(Y)\right| \leqslant Ct^{s-1}R_Y(t)^{-n} \int \chi\left(\frac{z}{2R_Y(t)}\right) \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z + \Gamma_Y(t))|\, dz.$$

По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(Y) = -\left(\int_0^{t_0} + \int_{t_0}^T\right) \frac{\partial}{\partial t} f_{\{t\}}(Y)\, dt + f_{\{T\}}(Y) = f_{\{0,t_0\}}(Y) + f_{\{t_0,T\}}(Y) + f_{\{T\}}(Y).$$

Эта формула справедлива для п.в. $Y \in B(\gamma_x(t_0), 2r(t_0))$, что доказывается аналогично тому, как это сделано для $f_{(t)}$ вместо $f_{\{t\}}$.

Оценим $D_{l^+-1}(r(t_0))0))$ для каждого из слагаемых правой части равенства. Начнем со второго. При $|\alpha| = l^+$

$$|D^\alpha f_{\{t_0,T\}}(Y)| \leqslant C \int_{t_0}^T t^{s-1}R_Y(t)^{-n-l^+} \int \chi\left(\frac{z}{2R_Y(t)}\right) g(z + \Gamma_Y(t))\, dz\, dt,$$

где $g(z) = \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha f|$,

$$\begin{aligned} D_{l^+-1}(r(t_0)) f_{\{t_0,T\}}(\gamma_x(t_0)) &\leqslant C_1 r(t_0)^{l^+-n} \int_{|Y-\gamma_x(t_0)|<r(t_0)} \sum_{\alpha=l^+} |D^\alpha f_{\{t_0,T\}}(Y)|\, dY \\ &\leqslant C_2 r(t_0)^{l^+-n} \int_{|Y-\gamma_x(t_0)|<r(t_0)} \int_{t_0}^t t^{s-1} r(t)^{-n-l^+} \int \chi\left(\frac{z}{2r(t)}\right) g(z + \Gamma_Y(t))\, dz\, dt\, dY. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Минковского для интегралов имеем

$$\begin{aligned} &\left\{\int_0^T [t_0^{l^+-l-\sigma l^+} D_{l^+-1}(r(t_0)) f_{\{t_0,T\}}(\gamma_x(t_0))]^\tau \frac{dt_0}{t_0}\right\}^{1/\tau} \\ &\quad \leqslant C_2 \int_0^T \int \left\{\int_0^t [t_0^{l^+-l}]^\tau \frac{dt_0}{t_0}\right\}^{1/\tau} t^{(s-1)} r(t)^{-n-l^+} \int \chi\left(\frac{z}{2r(t)}\right) g(z + \gamma_x(t))\, dz\, dt \\ &\quad \leqslant C_3 \int_0^T \int t^{s-l-l^+(\sigma-1)-l} r(t)^{-n} \int \chi\left(\frac{z}{2r(t)}\right) g(z + \gamma_x(t))\, dz\, dt =: Bg(z). \end{aligned}$$

Оператор $B\colon L_p(G) \to L_q(G_0)$ ограничен при условии (6).

Оценим $D_{l^+-1}(r(t_0)) f_{\{o,t_0\}}(\gamma_x(t_0))$. Имеем

$$|f_{\{0,t_0\}}(Y)| \leqslant C \int_0^{t_0} t(s-1)R_Y(t)^{-n} \int \chi\left(\frac{z}{2R_Y(t)}\right) g(z + \Gamma_Y(t)\, dz\, dt.$$

Как и при доказательстве теоремы 4, получаем, что

$$|f_{\{0,t_0\}}(Y)| \leqslant C \int \int_0^{t_0} t^{s-n} \left(\frac{r(t_0)}{t_0}\right)^{-n} \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t_0)-y}{2r(t_0)t/t_0}\right) \frac{dt}{t}\, g(z)\, dz.$$

Рассмотрим лишь случай $s-n<0$; другие сводятся к этому, как и при доказательстве теоремы 4. Оценивая внутренний интеграл, имеем

$$|f_{\{0,t_0\}}(Y)| \leqslant C_1 \int \chi\left(\frac{z-\gamma_x(t_0)-y}{2r(t_0)}\right) |z-\gamma_x(t_0)-y|^{s-n} \left(\frac{t_0}{r(t_0)}\right)^{s} g(z)\, dz.$$

Продолжение этой оценки и другие оценки, необходимые для завершения доказательства теоремы 3, проводятся аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 4. Этим доказательство теоремы 3 завершено.

6. Доказательство теоремы 5. Оценим лишь $l_{q,\tau}^{s(m)}$-полунорму функции f. Имеем

$$F(x) =: \left\{ \int_0^T \left[t^{m-s-\sigma n} \int \chi\left(\frac{y-\gamma_x(t)}{r(t)}\right) g(y)\, dy \right]^{\tau} \frac{dt}{t} \right\}^{1/\tau}.$$

Применяя неравенство Минковского для интегралов и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} F(x) &\leqslant \int \left\{ \int_0^T t^{[m-s-\sigma n]\tau} \chi\left(\frac{y-\gamma_x(t)}{r(t)}\right) \frac{dt}{t} \right\}^{1/\tau} g(y)\, dy \\ &\leqslant C \int \int_0^T t^{m-s-(\sigma-1)/\tau'-\sigma n} \chi\left(\frac{y-\gamma_x(t)}{r(t)}\right) \frac{dt}{t}\, g(y)\, dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|F \mid L_q(G_0)\| \leqslant C \|g \mid L_p(G)\|.$$

Этим нужная оценка полунормы получена.

Другие необходимые оценки выводятся так же, как это сделано при доказательстве теоремы 4.

Замечание 3. Теорема о вложении (8), приведенная в [3], справедлива лишь при $\sigma = 1$. При внесении почти очевидной поправки в неравенства из ее доказательства ее формулировка при всех $\sigma \geqslant 1$ совпадет с формулировкой теоремы 5 данной работы.

Замечание 4. Отметим, что доказательство теоремы 1 основано в [1] на более простом (чем в данной работе) интегральном представлении функции через производные. В [1] не приведено обоснования сходимости усредненной функции к самой функции, но оно проводится аналогично (и проще) обоснованию формулы (16) из данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О. В. Бесов, “Вложение пространства Соболева и свойства области”, *Матем. заметки*, **96**:3 (2014), 343–349.

[2] О. В. Бесов, “Пространства функций положительной гладкости на нерегулярных областях”, *Докл. АН*, **466**:2 (2016), 133–136.

[3] О. В. Бесов, “Пространства функций положительной гладкости на нерегулярных областях”, *Функциональные пространства, теория приближений, смежные разделы математического анализа*, Тр. МИАН, **293**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2016, 62–72.

[4] Д. А. Лабутин, “Вложение пространств Соболева на гёльдеровых областях”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть* 18, Тр. МИАН, **227**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 1999, 170–179.

[5] T. Kilpeläinen, J. Malý, “Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries”, *Z. Anal. Anwendungen*, **19**:2 (2000), 369–380.

[6] О. В. Бесов, “Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей”, *Матем. сб.*, **192**:3 (2001), 3–26.

[7] О. В. Бесов, “Вложения пространств функций положительной гладкости на нерегулярных областях в пространства Лебега”, *Матем. заметки*, **103**:3 (2018), 336–345.

[8] О. В. Бесов, “Вложения весовых пространств функций положительной гладкости на нерегулярных областях в пространства Лебега”, *Матем. заметки*, **104**:6 (2018), 823–834.

[9] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996.

[10] О. В. Бесов, “Пространства функций дробной гладкости на нерегулярной области”, *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 163–183.

[11] О. В. Бесов, “Пространства функций типа Лизоркина–Трибеля на нерегулярной области”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Тр. МИАН, **260**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2008, 32–43.

[12] I. Genebashvili, A. Gogatishvili, V. Kokilashvili, M. Krbec, *Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneuos Type*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **92**, Longnan, Harlow, 1998.

[13] О. В. Бесов, “Пространства функций дробной гладкости на нерегулярной области”, *Теория функций и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **269**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 31–51.

О. В. Бесов
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: besov@mi-ras.ru

Поступило
24.09.2018
После доработки
07.12.2018
Принята к публикации
16.01.2019