



Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Багдерина, Р. К. Газизов, Приближенно инвариантные решения дифференциальных уравнений с малым параметром,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 347–355

<https://www.mathnet.ru/de11242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

21 апреля 2025 г., 21:07:01



УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ПРИБЛИЖЕННО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2005 г. Ю. Ю. Багдерина, Р. К. Газизов

Основные методы интегрирования дифференциальных уравнений с использованием допускаемой группы G_r преобразований базируются на теореме об инвариантном представлении уравнений (см., например, [1, 2]). Согласно этой теореме, исследуемые уравнения могут быть записаны в эквивалентной форме, определяемой инвариантными функциями группы G_r .

В настоящей работе аналогичное утверждение доказывается для приближенных групп преобразований, введенных в [3] (обзор литературы и ссылки см. в [4]). В качестве его приложения показано, что построение регулярных приближенно инвариантных решений дифференциальных уравнений с малым параметром сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Изложение проводится с первым порядком точности по малому параметру. Обобщение результатов на произвольный порядок точности, приводя к громоздким формулам, не изменяет их сути.

В работе используются обозначения из [3, 4]. В частности, приближенное равенство $f \approx g$ означает, что $f = g + o(\varepsilon)$.

1. Инварианты приближенных групп преобразований. Рассматривается приближенная группа \tilde{G}_r преобразований, порождаемая r операторами вида

$$X_{\alpha_0} \approx X_{\alpha_0,(0)} + \varepsilon X_{\alpha_0,(1)}, \quad \alpha_0 = \overline{1, r_0}, \quad X_{\alpha_1} \approx \varepsilon X_{\alpha_1,(0)}, \quad \alpha_1 = \overline{r_0 + 1, r}, \quad (1.1)$$

образующими базис приближенной алгебры Ли. Здесь $X_{\alpha,(q)} = \xi_{\alpha,(q)}^i(z) \partial_{z^i}$, $z \in \mathbb{R}^N$, $q = 0, 1$. Рассмотрим матрицу $\|\xi_{\alpha_0,(0)}^i(z)\|$, составленную из координат операторов $X_{1,(0)}, \dots, X_{r_0,(0)}$. Будем считать, что ее ранг равен R_0 и базисный минор матрицы образуют первые R_0 строк. Тогда

$$X_{\beta,(0)} = \sum_{\gamma=1}^{R_0} \omega_{\beta}^{\gamma}(z) X_{\gamma,(0)}, \quad \beta = \overline{R_0 + 1, r_0}. \quad (1.2)$$

Инварианты $I(z, \varepsilon) \approx I_{(0)}(z) + \varepsilon I_{(1)}(z)$ группы \tilde{G}_r определяются как решения системы $X_{\alpha} I(z, \varepsilon) \approx 0$ приближенных уравнений, которая после расщепления по ε приводится к системе $\Omega_{(0)}$:

$$X_{\alpha,(0)} I_{(0)}(z) = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}, \quad (1.3)$$

однородных уравнений в частных производных первого порядка относительно функции $I_{(0)}(z)$ и к системе $\Omega_{(1)}$:

$$X_{\alpha_0,(0)} I_{(1)}(z) + X_{\alpha_0,(1)} I_{(0)}(z) = 0, \quad \alpha_0 = \overline{1, r_0}, \quad (1.4)$$

неоднородных уравнений относительно функции $I_{(1)}(z)$. В общем случае (см. [5]) из условия того, что операторы (1.1) образуют приближенную алгебру Ли, следует лишь условие полноты системы (1.4), а система (1.3) может оказаться не полной и система (1.4) не совместной. Выполнение условия совместности системы (1.4) достигается добавлением к системе $\Omega_{(0)}$ уравнений вида (1.3) относительно функции $I_{(0)}$ с операторами

$$X_{r+\beta-R_0,(0)} = X_{\beta,(1)} - \omega_{\beta}^{\gamma}(z) X_{\gamma,(1)}, \quad \beta = \overline{R_0 + 1, r_0}. \quad (1.5)$$

Пусть проверка полноты полученной системы $\Omega_{(0)}$ приводит к системе $\bar{\Omega}_{(0)}$, содержащей r_* уравнений, и ранг матрицы $\|\xi_{\alpha,(0)}^i(z)\|$, $\alpha = \overline{1, r_*}$, равен R . Тогда приближенная группа \tilde{G}_r имеет $N - R_0$ функционально независимых инвариантов, причем $N - R$ из них имеют “нулевой” порядок по ε :

$$I^{k_0}(z, \varepsilon) = I_{(0)}^{k_0}(z) + \varepsilon I_{(1)}^{k_0}(z) + o(\varepsilon), \quad k_0 = \overline{1, N - R},$$

а остальные – “первый” порядок по ε :

$$I^{k_1}(z, \varepsilon) = \varepsilon I_{(0)}^{k_1}(z) + o(\varepsilon), \quad k_1 = \overline{N - R + 1, N - R_0}.$$

Здесь $I_{(0)}^{k_0}(z)$ – независимые частные решения системы $\bar{\Omega}_{(0)}$; $I_{(1)}^{k_0}(z)$ – частное решение системы (1.4) с $I_{(0)}(z) = I_{(0)}^{k_0}(z)$; $I_{(0)}^{k_1}(z)$ – независимые решения однородной системы, соответствующей системе $\Omega_{(1)}$, не являющиеся решениями системы $\bar{\Omega}_{(0)}$. В соответствии с теоремой об общем инварианте приближенной группы преобразований [5] любой инвариант группы \tilde{G}_r представим в виде $I(z, \varepsilon) = \varphi_{(0)}(I^1, \dots, I^{N-R}) + \varepsilon \varphi_{(1)}(I_{(0)}^1, \dots, I_{(0)}^{N-R_0}) + o(\varepsilon)$ с некоторыми функциями $\varphi_{(0)}$, $\varphi_{(1)}$.

Далее будем рассматривать только такие группы \tilde{G}_r , для которых $R < N$, т.е. имеется хотя бы один инвариант нулевого порядка.

2. Инвариантное представление уравнений с малым параметром.

Теорема 1. Пусть приближенные (порядка $o(\varepsilon)$) уравнения

$$F^\nu(z, \varepsilon) \equiv F_{(0)}^\nu(z) + \varepsilon F_{(1)}^\nu(z) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (2.1)$$

инвариантны относительно r -параметрической приближенной группы преобразований, порождаемой операторами (1.1), а соответствующие невозмущенные уравнения

$$F_{(0)}^\nu(z) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (2.2)$$

определяют регулярно заданное многообразие, являющееся неособым для (точной) группы G_{r_0} , порождаемой операторами $X_{1,(0)}, \dots, X_{r_0,(0)}$, т.е. выполняются следующие условия:

$$\text{rank } \|\partial F_{(0)}^\nu(z) / \partial z^i\| |_{(2.2)} = m, \quad \text{rank } \|\xi_{\alpha_0,(0)}^i(z)\| |_{(2.2)} = R_0. \quad (2.3)$$

Тогда существует система уравнений

$$\Phi^\nu(I, \varepsilon) \equiv \Phi_{(0)}^\nu(I^1(z, \varepsilon), \dots, I^{N-R}(z, \varepsilon)) + \varepsilon \Phi_{(1)}^\nu(I_{(0)}^1(z), \dots, I_{(0)}^{N-R_0}(z)) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (2.4)$$

связывающая инварианты группы \tilde{G}_r , множество решений которой (с точностью $o(\varepsilon)$) совпадает со множеством решений уравнений (2.1).

Доказательство. Условие приближенной инвариантности уравнений (2.1) относительно группы \tilde{G}_r можно записать в виде [6]

$$X_\alpha F^\nu(z, \varepsilon) \approx \lambda_{\alpha\sigma}^\nu(z, \varepsilon) F^\sigma(z, \varepsilon), \quad \nu = \overline{1, m}, \quad \alpha = \overline{1, r}, \quad (2.5)$$

с $\lambda_{\alpha\sigma}^\nu(z, \varepsilon) = \lambda_{\alpha\sigma,(0)}^\nu(z) + \varepsilon \lambda_{\alpha\sigma,(1)}^\nu(z) + o(\varepsilon)$, где $\lambda_{\alpha\sigma,(q)}^\nu(z)$, $q = 0, 1$, – некоторые гладкие функции. Из первых r_0 уравнений системы (2.5), рассматриваемых в нулевом порядке по ε , и оставшихся $r - r_0$ уравнений следует инвариантность невозмущенных уравнений (2.2) относительно (точной) группы G_r , порождаемой операторами $X_{1,(0)}, \dots, X_{r,(0)}$. Тогда из теоремы об инвариантном представлении следует, что для системы (2.2) существует эквивалентная система, задаваемая инвариантными функциями группы G_r . Оказывается, условия приближенной инвариантности (2.5) накладывают дополнительные ограничения на вид соответствующих

инвариантных функций. А именно в общем случае эквивалентная система задается инвариантными функциями не группы G_r , а более широкой группы G_ρ , для которой G_r является подгруппой.

Для анализа дополнительных условий на инварианты G_r рассмотрим вначале уравнения

$$X_{\alpha_0,(0)}F_{(0)}^\nu(z) = \lambda_{\alpha_0\sigma,(0)}^\nu(z)F_{(0)}^\sigma(z), \quad \nu = \overline{1, m}, \quad \alpha_0 = \overline{1, r_0}, \quad (2.6)$$

получаемые из системы (2.5) при $\varepsilon = 0$ и являющиеся условием инвариантности невозмущенных уравнений (2.2) относительно группы G_{r_0} . В часть уравнений (2.6), содержащую операторы $X_{R_0+1,(0)}, \dots, X_{r_0,(0)}$, подставим их представление (1.2). Тогда эти уравнения с учетом остальных уравнений (2.6) переписываются в виде $(r_0 - R_0) \times m$ алгебраических уравнений

$$(\lambda_{\beta\sigma,(0)}^\nu(z) - \omega_\beta^\gamma(z)\lambda_{\gamma\sigma,(0)}^\nu(z))F_{(0)}^\sigma(z) = 0 \quad (2.7)$$

относительно функций $\lambda_{\beta\sigma,(0)}^\nu(z) - \omega_\beta^\gamma(z)\lambda_{\gamma\sigma,(0)}^\nu(z)$, $\nu = \overline{1, m}$, $\beta = \overline{R_0 + 1, r_0}$.

Предположив, что базисный минор матрицы $\|\partial F_{(0)}^\nu(z)/\partial z^i\|$ расположен в первых m столбцах, и продифференцировав уравнение (2.7) при каждом выборе значений ν, β по переменным z^1, \dots, z^m , получим

$$(\lambda_{\beta\sigma,(0)}^\nu(z) - \omega_\beta^\gamma(z)\lambda_{\gamma\sigma,(0)}^\nu(z))\frac{\partial F_{(0)}^\sigma}{\partial z^s} = -\frac{\partial}{\partial z^s}(\lambda_{\beta\sigma,(0)}^\nu(z) - \omega_\beta^\gamma(z)\lambda_{\gamma\sigma,(0)}^\nu(z))F_{(0)}^\sigma, \quad s = \overline{1, m}. \quad (2.8)$$

Поскольку $\lambda_{\beta\sigma,(0)}^\nu$ – гладкие функции, то правые части системы (2.8) ограничены в окрестности многообразия (2.2) и ее решение представимо в виде

$$\lambda_{\beta\sigma,(0)}^\nu(z) - \omega_\beta^\gamma(z)\lambda_{\gamma\sigma,(0)}^\nu(z) = L_{\beta\sigma\mu}^\nu(z)F_{(0)}^\mu(z) \quad (2.9)$$

с некоторыми гладкими функциями $L_{\beta\sigma\mu}^\nu(z)$.

В первом порядке по ε рассматриваемые r_0 уравнений системы (2.5) приводят к равенствам

$$X_{\alpha_0,(0)}F_{(1)}^\nu(z) + X_{\alpha_0,(1)}F_{(0)}^\nu(z) = \lambda_{\alpha_0\sigma,(0)}^\nu F_{(1)}^\sigma(z) + \lambda_{\alpha_0\sigma,(1)}^\nu F_{(0)}^\sigma(z), \quad (2.10)$$

$\nu = \overline{1, m}$, $\alpha_0 = \overline{1, r_0}$. Аналогично тому, как из (2.6) получены уравнения (2.7), из (2.10) получаем равенства

$$\begin{aligned} & (X_{\beta,(1)} - \omega_\beta^\gamma(z)X_{\gamma,(1)})F_{(0)}^\nu(z) = \\ & = (\lambda_{\beta\sigma,(1)}^\nu(z) - \omega_\beta^\gamma(z)\lambda_{\gamma\sigma,(1)}^\nu(z))F_{(0)}^\sigma(z) + (\lambda_{\beta\sigma,(0)}^\nu(z) - \omega_\beta^\gamma(z)\lambda_{\gamma\sigma,(0)}^\nu(z))F_{(1)}^\sigma(z), \end{aligned}$$

$\nu = \overline{1, m}$, $\beta = \overline{R_0 + 1, r_0}$. В силу (2.9) правые части этих равенств представляют собой линейные комбинации функций $F_{(0)}^\sigma(z)$ с некоторыми переменными коэффициентами и, значит, уравнения (2.2) инвариантны относительно операторов $X_{1,(0)}, \dots, X_{r,(0)}$ и (1.5). Замыкание такого множества операторов относительно операции коммутирования приводит к алгебре Ли L_ρ такой, что инварианты соответствующей группы G_ρ находятся как решение системы $\tilde{\Omega}_{(0)}$. Следовательно, группа G_ρ имеет $N - R$ функционально независимых инвариантов $I_{(0)}^{k_0}(z)$, $k_0 = \overline{1, N - R}$.

По теореме об инвариантном представлении [1] для невозмущенных уравнений (2.2) можно построить эквивалентную систему уравнений $\Phi_{(0)}^\nu(I_{(0)}^1(z), \dots, I_{(0)}^{N-R}(z)) = 0$, $\nu = \overline{1, m}$ (при этом $N - R \geq m$), решение которой совпадает с решением уравнений (2.2). Поэтому существуют такие гладкие функции $\mu_\sigma^\nu(z)$, что правые части уравнений (2.2) представимы в виде (см., например, [7])

$$F_{(0)}^\nu(z) = \mu_\sigma^\nu(z)\Phi_{(0)}^\sigma(I_{(0)}^1(z), \dots, I_{(0)}^{N-R}(z)), \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Пусть инварианты $I_{(0)}^1(z), \dots, I_{(0)}^{N-R}(z)$ выбраны так, что

$$\partial(\Phi_{(0)}^1, \dots, \Phi_{(0)}^m) / \partial(I_{(0)}^1, \dots, I_{(0)}^m) \neq 0.$$

Вместо переменных z^1, \dots, z^N введем новые переменные y^1, \dots, y^N , определяемые равенствами

$$\begin{aligned} y^\sigma &\approx \Phi_{(0)}^\sigma(I^1(z, \varepsilon), \dots, I^{N-R}(z, \varepsilon)), \quad \sigma = \overline{1, m}, \\ y^j &\approx I^j(z, \varepsilon), \quad j = \overline{m+1, N-R}, \quad y^k \approx I_{(0)}^k(z), \quad k = \overline{N-R+1, N-R_0}, \\ y^{N-R_0+1} &\approx H^1(z, \varepsilon), \quad \dots, \quad y^N \approx H^{R_0}(z, \varepsilon), \end{aligned}$$

где функции $H^1(z, \varepsilon), \dots, H^{R_0}(z, \varepsilon)$ выбираются так, что выполняется условие

$$\partial(y^1, \dots, y^N) / \partial(z^1, \dots, z^N)|_{\varepsilon=0} \neq 0$$

невырожденности замены переменных.

В новых переменных уравнения (2.1) и операторы (1.1) принимают соответственно вид

$$\tilde{F}^\nu(y, \varepsilon) \equiv \tilde{\mu}_\sigma^\nu(y) y^\sigma + \varepsilon \psi^\nu(y) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (2.11)$$

с некоторыми функциями $\psi^\nu(y)$ и

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\alpha_0} &\approx \varepsilon \tilde{\xi}_{\alpha_0, (1)}^{N-R+1}(y) \partial_{y^{N-R+1}} + \dots + \varepsilon \tilde{\xi}_{\alpha_0, (1)}^{N-R_0}(y) \partial_{y^{N-R_0}} + \\ &+ \tilde{\xi}_{\alpha_0}^{N-R_0+1}(y, \varepsilon) \partial_{y^{N-R_0+1}} + \dots + \tilde{\xi}_{\alpha_0}^N(y, \varepsilon) \partial_{y^N}, \quad \alpha_0 = \overline{1, r_0}, \\ \tilde{X}_{\alpha_1} &\approx \varepsilon \tilde{\xi}_{\alpha_1, (0)}^{N-R+1}(y) \partial_{y^{N-R+1}} + \dots + \varepsilon \tilde{\xi}_{\alpha_1, (0)}^N(y) \partial_{y^N}, \quad \alpha_1 = \overline{r_0+1, r}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Равенства

$$y^1 = 0, \quad \dots, \quad y^m = 0 \quad (2.13)$$

определяют решение невозмущенных уравнений $\tilde{F}_{(0)}^\nu(y) = 0$, $\nu = \overline{1, m}$, соответствующих (2.11). Введем обозначение $\bar{y} = (0, \dots, 0, y^{m+1}, \dots, y^N)$. Тогда условия (2.3) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\Delta = \det \|\tilde{\mu}_\sigma^\nu(\bar{y})\| \neq 0, \quad \text{rank} \|\xi_{\alpha_0, (0)}^i(\bar{y})\| = R_0, \quad i = \overline{N-R_0+1, N}. \quad (2.14)$$

С учетом (2.13) решение уравнений (2.11) можно искать в виде $y^\nu \approx \varepsilon h^\nu(\bar{y})$, где функции $h^\nu(\bar{y})$ находятся из системы линейных уравнений

$$\tilde{\mu}_\sigma^\nu(\bar{y}) h^\sigma(\bar{y}) + \psi^\nu(\bar{y}) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

В силу первого условия (2.14) имеем $h^\nu(\bar{y}) = -\Delta^\nu / \Delta$, где определитель Δ^ν получается из Δ заменой ν -го столбца столбцом $(\psi^1(\bar{y}), \dots, \psi^m(\bar{y}))^T$. Таким образом, получаем решение уравнений (2.11) в виде

$$y^1 \approx -\varepsilon \Delta^1 / \Delta, \quad \dots, \quad y^m \approx -\varepsilon \Delta^m / \Delta. \quad (2.15)$$

Из условия инвариантности уравнений (2.11) относительно операторов (2.12) получаем равенства

$$\begin{aligned} &\varepsilon \tilde{\xi}_{\alpha_0, (1)}^{N-R+1}(y) y^\sigma \frac{\partial \tilde{\mu}_\sigma^\nu(y)}{\partial y^{N-R+1}} + \dots + \varepsilon \tilde{\xi}_{\alpha_0, (1)}^{N-R_0}(y) y^\sigma \frac{\partial \tilde{\mu}_\sigma^\nu(y)}{\partial y^{N-R_0}} + \\ &+ \tilde{\xi}_{\alpha_0}^{N-R_0+1}(y, \varepsilon) \left(y^\sigma \frac{\partial \tilde{\mu}_\sigma^\nu(y)}{\partial y^{N-R_0+1}} + \varepsilon \frac{\partial \psi^\nu(y)}{\partial y^{N-R_0+1}} \right) + \dots + \tilde{\xi}_{\alpha_0}^N(y, \varepsilon) \left(y^\sigma \frac{\partial \tilde{\mu}_\sigma^\nu(y)}{\partial y^N} + \varepsilon \frac{\partial \psi^\nu(y)}{\partial y^N} \right) \Big|_{(2.15)} = o(\varepsilon), \end{aligned}$$

которые с учетом точности рассмотрения принимают вид

$$\tilde{\xi}_{\alpha_0, (0)}^{N-R_0+1}(\bar{y}) \left(\frac{\partial \psi^\nu(\bar{y})}{\partial y^{N-R_0+1}} - \frac{\Delta^\sigma}{\Delta} \frac{\partial \tilde{\mu}_\sigma^\nu(\bar{y})}{\partial y^{N-R_0+1}} \right) + \dots + \tilde{\xi}_{\alpha_0, (0)}^N(\bar{y}) \left(\frac{\partial \psi^\nu(\bar{y})}{\partial y^N} - \frac{\Delta^\sigma}{\Delta} \frac{\partial \tilde{\mu}_\sigma^\nu(\bar{y})}{\partial y^N} \right) = 0, \quad \alpha_0 = \overline{1, r_0},$$

$\nu = \overline{1, m}$. Для каждого ν эта система линейных однородных уравнений в силу второго условия (2.14) дает

$$\frac{\partial \psi^\nu(\bar{y})}{\partial y^i} - \frac{\Delta^\sigma}{\Delta} \frac{\partial \tilde{\mu}_\sigma^\nu(\bar{y})}{\partial y^i} = 0, \quad \nu = \overline{1, m}, \quad i = \overline{N - R_0 + 1, N},$$

откуда алгебраическими преобразованиями получается эквивалентная система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{\Delta^\sigma}{\Delta}(\bar{y}) \right) = 0, \quad \sigma = \overline{1, m}, \quad i = \overline{N - R_0 + 1, N},$$

с очевидным решением $\Delta^\nu/\Delta(\bar{y}) = \Phi_{(1)}^\nu(y^{m+1}, \dots, y^{N-R_0})$, $\nu = \overline{1, m}$. Возвращаясь к переменным z в решении $y^\nu + \varepsilon \Delta^\nu/\Delta \approx 0$, $\nu = \overline{1, m}$, системы (2.11), получаем уравнения (2.4), решение которых совпадает с решением уравнений (2.1). Теорема доказана.

3. Редукция приближенных уравнений относительно r -параметрической группы преобразований. Доказанная теорема 1 используется здесь для обоснования метода построения приближенно инвариантных решений дифференциальных уравнений с малым параметром. Показывается, что при этом происходит редукция размерности пространства независимых переменных задачи. Для простоты ограничимся рассмотрением системы приближенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$F^\nu(x, u, p, \varepsilon) \equiv F_{(0)}^\nu(x, u, p) + \varepsilon F_{(1)}^\nu(x, u, p) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1, m}. \tag{3.1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$; $p_i^\sigma = \partial u^\sigma / \partial x^i$; $N = n + m$. Будем говорить, что приближенные функции

$$u^\sigma = \varphi_{(0)}^\sigma(x) + \varepsilon \varphi_{(1)}^\sigma(x) + o(\varepsilon), \quad \sigma = \overline{1, m}, \tag{3.2}$$

определяют решение системы (3.1), если после их подстановки в систему с точностью $o(\varepsilon)$ получаются тождества.

Пусть система (3.1) допускает r -параметрическую приближенную группу \tilde{G}_r преобразований, порождаемую операторами

$$X_{\alpha_0} \approx (\xi_{\alpha_0, (0)}^i(x, u) + \varepsilon \xi_{\alpha_0, (1)}^i(x, u)) \partial_{x^i} + (\eta_{\alpha_0, (0)}^\sigma(x, u) + \varepsilon \eta_{\alpha_0, (1)}^\sigma(x, u)) \partial_{u^\sigma},$$

$$X_{\alpha_1} \approx \varepsilon \xi_{\alpha_1, (0)}^i(x, u) \partial_{x^i} + \varepsilon \eta_{\alpha_1, (0)}^\sigma(x, u) \partial_{u^\sigma}, \quad \alpha_0 = \overline{1, r_0}, \quad \alpha_1 = \overline{r_0 + 1, r},$$

образующими базис приближенной алгебры Ли, причем $\text{rank} \|\xi_{\alpha_0, (0)}^i \eta_{\alpha_0, (0)}^\sigma\| = R_0$. Тогда группа \tilde{G}_r имеет $N - R_0$ функционально независимых инвариантов вида

$$I^{k_0}(x, u, \varepsilon) = I_{(0)}^{k_0}(x, u) + \varepsilon I_{(1)}^{k_0}(x, u) + o(\varepsilon), \quad k_0 = \overline{1, N - R}, \tag{3.3}$$

$$I^{k_1}(x, u, \varepsilon) = \varepsilon I_{(0)}^{k_1}(x, u) + o(\varepsilon), \quad k_1 = \overline{N - R + 1, N - R_0}.$$

Будем считать, что равенства $u^\sigma = \varphi_{(0)}^\sigma(x)$, $\sigma = \overline{1, m}$, и $F_{(0)}^\nu(x, u, p) = 0$, $\nu = \overline{1, m}$, определяют неособые многообразия точной группы G_{r_0} и ее первого продолжения соответственно. Тогда в силу теоремы 1 для решения (3.2) существует эквивалентное инвариантное представление

$$\Phi^\nu(I, \varepsilon) \equiv \Phi_{(0)}^\nu(I^1(x, u, \varepsilon), \dots, I^{N-R}(x, u, \varepsilon)) + \varepsilon \Phi_{(1)}^\nu(I_{(0)}^1(x, u), \dots, I_{(0)}^{N-R_0}(x, u)) = o(\varepsilon), \tag{3.4}$$

$\nu = \overline{1, m}$, где $\text{rank} \|\partial\Phi_{(0)}^\nu/\partial I_{(0)}^{k_0}\| = m$. Из этой системы должны также определяться u^σ как функции от x^1, \dots, x^n , поэтому $\text{rank} \|\partial\Phi_{(0)}^\nu/\partial u^\sigma\| = m$. Так как $\|\partial\Phi_{(0)}^\nu/\partial u^\sigma\| = \|\partial\Phi_{(0)}^\nu/\partial I_{(0)}^{k_0}\| \times \|\partial I_{(0)}^{k_0}/\partial u^\sigma\|$ и $\|\partial I_{(0)}^{k_0}/\partial u^\sigma\|$ – матрица размера $(N - R) \times m$, то по свойству ранга произведения матриц для существования инвариантного решения необходимо выполнение условия

$$\text{rank} \|\partial I_{(0)}^{k_0}/\partial u^\sigma\| = m. \tag{3.5}$$

Следующая теорема дает алгоритм построения приближенно инвариантных решений. Мы говорим, что решение (3.2) называется приближенно инвариантным относительно группы \tilde{G}_r , если уравнения (3.2) приближенно инвариантны относительно этой группы [4].

Теорема 2. Пусть система (3.1) инвариантна относительно r -параметрической приближенной группы \tilde{G}_r преобразований, для инвариантов (3.3) которой выполнено условие (3.5). Тогда существует система вида

$$\begin{aligned} \Omega^\nu(I, \Phi, \partial\Phi/\partial I, \varepsilon) \equiv \Omega_{(0)}^\nu(I^{k_0}, \Phi^\sigma, \partial\Phi^\sigma/\partial I^{k_0}) + \\ + \varepsilon\Omega_{(1)}^\nu(I_{(0)}^k, \Phi_{(0)}^\sigma, \partial\Phi_{(0)}^\sigma/\partial I^{k_0}, \partial\Phi_{(1)}^\sigma/\partial I_{(0)}^{k_1}) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

связывающая инварианты $I^k(x, u, \varepsilon)$, $k = \overline{1, N - R_0}$, функции инвариантов $\Phi^\sigma(I, \varepsilon)$ и их производные по I (индекс k при переменной I означает зависимость от всех инвариантов (3.3), индекс k_0 указывает на инварианты нулевого, а k_1 – первого порядка). При этом если какое-либо ее решение (3.4) удовлетворяет условию $\text{rank} \|\partial\Phi_{(0)}^\nu/\partial u^\sigma\| = m$, то функции (3.2), получаемые решением (3.4) относительно u , являются решением системы (3.1), инвариантным относительно группы \tilde{G}_r .

Доказательство этого утверждения в основном повторяет доказательство аналогичной теоремы для точных групп преобразований [1]. Поэтому мы приводим здесь лишь его схему и указываем на некоторые особенности, связанные с введением малого параметра.

Первое продолжение группы \tilde{G}_r , действующее в пространстве $\tilde{N} = n + m + nm$ переменных $x^i, u^\sigma, p_i^\sigma$, имеет $\tilde{N} - R_0$ функционально независимых дифференциальных инвариантов $\tilde{I}^k(x, u, p, \varepsilon)$, включая, в частности, инварианты $I^1(x, u, \varepsilon), \dots, I^{N-R_0}(x, u, \varepsilon)$ самой группы \tilde{G}_r .

Уравнения (3.1) инвариантны относительно действия продолженной группы \tilde{G}_r . По теореме 1 существует эквивалентная (3.1) система вида

$$\Psi^\nu(I^1(x, u, \varepsilon), \dots, \tilde{I}^{\tilde{N}-R_0}(x, u, p, \varepsilon), \varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1, m}, \tag{3.7}$$

связывающая дифференциальные инварианты первого порядка группы \tilde{G}_r . Решение уравнений (3.1) ищется в виде равенств (3.4) с неопределенными функциями Φ^ν инвариантов (3.3). Продифференцируем эти равенства по всем переменным x^1, \dots, x^n . Если $\text{rank} \|\partial\Phi_{(0)}^\nu/\partial u^\sigma\| = m$, то систему уравнений

$$D_i\Phi^\nu \approx \sum_{k_0=1}^{N-R} \frac{\partial\Phi^\nu}{\partial I_{(0)}^{k_0}} \left(\frac{\partial I_{(0)}^{k_0}}{\partial x^i} + p_i^\sigma \frac{\partial I_{(0)}^{k_0}}{\partial u^\sigma} \right) + \varepsilon \sum_{k_1=N-R+1}^{N-R_0} \frac{\partial\Phi_{(1)}^\nu}{\partial I_{(0)}^{k_1}} \left(\frac{\partial I_{(0)}^{k_1}}{\partial x^i} + p_i^\sigma \frac{\partial I_{(0)}^{k_1}}{\partial u^\sigma} \right) = o(\varepsilon),$$

$i = \overline{1, n}$, $\nu = \overline{1, m}$, можно разрешить относительно всех производных p_i^σ . Как и в работе [1], можно показать, что подстановка найденных таким образом p_i^σ в дифференциальный инвариант группы \tilde{G}_r превращает его в некоторый инвариант группы \tilde{G}_r . Так как система $D_i\Phi^\nu \approx 0$ содержит частные производные Φ^ν по I , то подстановка p_i^σ в уравнения (3.7) превращает их в систему вида (3.6), связывающую инварианты I^1, \dots, I^{N-R_0} , функции инвариантов $\Phi^\nu(I, \varepsilon)$ и их производные. Кроме того, из способа построения p_i^σ ясно, что производные $\partial\Phi_{(1)}^\sigma/\partial I_{(0)}^{k_1}$

войдут и притом линейно только в функции $\Omega_{(1)}^\nu$. При этом уравнения (3.1) представимы в виде

$$F^\nu(x, u, p, \varepsilon) \approx \mu_\sigma^\nu(x, u, p, \varepsilon)\Omega^\sigma(I, \Phi, \partial\Phi/\partial I, \varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \nu = \overline{1, m},$$

с некоторыми гладкими функциями μ_σ^ν .

Теперь уравнение (3.6) может быть использовано для построения приближенно инвариантного решения (3.4). Для этого аргументы функций Ω^ν в соответствии с (3.3), (3.4) представляются в виде рядов по ε

$$I^{k_0} = I_{(0)}^{k_0} + \varepsilon I_{(1)}^{k_0} + o(\varepsilon), \quad k_0 = \overline{1, N-R}, \quad I^{k_1} = \varepsilon I_{(0)}^{k_1} + o(\varepsilon), \quad k_1 = \overline{N-R+1, N-R_0},$$

$$\Phi^\sigma(I, \varepsilon) = \Phi_{(0)}^\sigma(I_{(0)}^1, \dots, I_{(0)}^{N-R}) + \varepsilon \sum_{k_0=1}^{N-R} I_{(1)}^{k_0} \frac{\partial \Phi_{(0)}^\sigma}{\partial I_{(0)}^{k_0}} + \varepsilon \Phi_{(1)}^\sigma(I_{(0)}^1, \dots, I_{(0)}^{N-R_0}) + o(\varepsilon).$$

Разложив функции Ω^ν в ряд по ε и приравняв коэффициенты при нулевой и первой степенях малого параметра, получим уравнения

$$\Omega_{(0)}^\nu(I_{(0)}^1, \dots, I_{(0)}^{N-R}, \Phi_{(0)}^\sigma(I_{(0)}), \partial\Phi_{(0)}^\sigma/\partial I_{(0)}^{k_0}) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}, \tag{3.8}$$

относительно функций $\Phi_{(0)}^\sigma$ и систему линейных относительно $\Phi_{(1)}^\sigma$ уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^m \left(\Phi_{(1)}^\sigma \frac{\partial \Omega_{(0)}^\nu}{\partial \Phi_{(0)}^\sigma} + \sum_{k_0=1}^{N-R} \frac{\partial \Phi_{(1)}^\sigma}{\partial I_{(0)}^{k_0}} \frac{\partial \Omega_{(0)}^\nu}{\partial P_{k_0}^\sigma} \right) + \Omega_{(1)}^\nu(I_{(0)}^1, \dots, I_{(0)}^{N-R_0}, \Phi_{(0)}^\sigma(I_{(0)}), \partial\Phi_{(0)}^\sigma/\partial I_{(0)}^{k_0}, \partial\Phi_{(1)}^\sigma/\partial I_{(0)}^{k_1}) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}, \tag{3.9}$$

где $P_{k_0}^\sigma = \partial\Phi_{(0)}^\sigma/\partial I_{(0)}^{k_0}$.

Системы уравнений (3.8), (3.9) являются системами m уравнений относительно m искомым функций от $n + m - R$ и $n + m - R_0$ переменных соответственно ($R_0 \leq R$). Они принимают более простой вид, если функции Φ^ν в (3.4) записать в виде, разрешенном относительно m функций I^{k_0} . В этом случае искомые функции в системе (3.8) будут зависеть только от $n - R$ независимых переменных, а в системе (3.9) – от $n - R_0$ независимых переменных, т.е. происходит редукция числа независимых переменных.

4. Примеры приближенно инвариантных решений. Примеры построения решений уравнений с двумя независимыми переменными, инвариантных относительно однопараметрической приближенной группы преобразований, приведены в работе [4]. Здесь будем рассматривать уравнение с тремя независимыми переменными и будем строить решения, инвариантные относительно двухпараметрической приближенной группы.

4.1. Рассмотрим нелинейное диффузионное уравнение

$$u_t \approx (e^u)_{xx} + (e^u)_{yy} + \varepsilon e^u(u_x + u_y), \tag{4.1}$$

допускающее операторы

$$X_1 \approx t\partial_t - \partial_u, \quad X_2 \approx \left(y + \frac{\varepsilon}{8}(x^2 - y^2 - 2xy) \right) \partial_x + \left(-x + \frac{\varepsilon}{8}(x^2 - y^2 + 2xy) \right) \partial_y + \frac{\varepsilon}{2}(x - y)\partial_u,$$

которые порождают двумерную приближенную алгебру Ли. Используя инварианты

$$I^1 \approx (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}(x + y) \right), \quad I^2 \approx u + \ln t + \frac{\varepsilon}{2}(x + y)$$

соответствующей группы преобразований, будем искать решение уравнения (4.1) в виде $I_{(0)}^2 + \varepsilon I_{(1)}^2 \approx \Phi_{(0)}(I_{(0)}^1 + \varepsilon I_{(1)}^1) + \varepsilon \Phi_{(1)}(I_{(0)}^1)$, откуда с точностью $o(\varepsilon)$ имеем

$$u \approx -\ln t + \Phi_{(0)}(z) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4}(x+y)z\Phi'_{(0)}(z) + \Phi_{(1)}(z) \right),$$

$z = I_{(0)}^1 = x^2 + y^2$. Здесь $R = R_0 = 2$ и, значит, относительно функций $\Phi_{(0)}(z)$ и $\Phi_{(1)}(z)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$4(z(e^{\Phi_{(0)}})')' + 1 = 0, \quad (z(e^{\Phi_{(1)}})\Phi'_{(1)})' = 0,$$

решение которых имеет вид

$$\Phi_{(0)} = \ln \left(C_1 \ln z + C_2 - \frac{z}{4} \right), \quad \Phi_{(1)} = (C_3 \ln z + C_4) / \left(C_1 \ln z + C_2 - \frac{z}{4} \right),$$

где C_1, \dots, C_4 – постоянные интегрирования. Следовательно, решением уравнения (4.1) является функция

$$u \approx \ln \left(C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right) - \ln t - \frac{\varepsilon}{2}(x+y) + \\ + \varepsilon \left(C_3 \ln(x^2 + y^2) + C_4 + \frac{1}{4}(x+y) \left(C_1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right) \right) / \left(C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \right).$$

4.2. Нелинейное диффузионное уравнение

$$u_t \approx (e^u)_{xx} + (e^u)_{yy} + \varepsilon e^u u(u_x + u_y) \quad (4.2)$$

допускает операторы

$$X_1 \approx \varepsilon(y\partial_x - x\partial_y), \quad X_2 \approx t\partial_t + \frac{\varepsilon}{8}(x^2 + 2xy - y^2)\partial_x + \frac{\varepsilon}{8}(y^2 + 2xy - x^2)\partial_y + \left(\frac{\varepsilon}{2}(x+y) - 1 \right)\partial_u.$$

Выбирая в качестве инвариантов соответствующей приближенной группы преобразований приближенные функции

$$I^1 \approx u + \ln t \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(x+y) \right), \quad I^2 \approx \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}(x+y) \ln t \right), \quad I^3 \approx \varepsilon \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

получаем следующий вид:

$$u \approx -\ln t + \Phi_{(0)}(r) + \varepsilon \left(\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{8}(x+y)r \ln t \Phi'_{(0)}(r) + \Phi_{(1)}(r, \theta) \right)$$

приближенно инвариантного решения уравнения (4.2), где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$. Здесь $R_0 = 1$, $R = 2$ и, значит, относительно функции $\Phi_{(0)}(r)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$1 + e^{\Phi_{(0)}} \left(\frac{1}{r}\Phi'_{(0)} + \Phi''_{(0)} + \Phi_{(0)}'^2 \right) = 0$$

с решением $\Phi_{(0)} = \ln(C_1 \ln r + C_2 - r^2/4)$ и относительно функции $\Phi_{(1)}(r, \theta)$ – линейное уравнение

$$e^{\Phi_{(0)}} \left(\Phi_{(1)rr} + \frac{1}{r^2}\Phi_{(1)\theta\theta} + \frac{1}{r}\Phi_{(1)r} + 2\Phi'_{(0)}\Phi_{(1)r} + (\sin \theta + \cos \theta)\Phi_{(0)}\Phi'_{(0)} \right) -$$

$$-\Phi_{(1)} - \frac{r}{2}(\sin \theta + \cos \theta) + \frac{r^2}{8}(\sin \theta + \cos \theta)\Phi'_{(0)} = 0$$

в частных производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция" (проект У0011.735) и Международного фонда INTAS (проект 03-51-4286).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962.
2. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations, Applied Mathematical Sciences. V. 81. Berlin, 1989.
3. *Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* // *Мат. сб.* 1988. Т. 136. № 4. С. 435–450.
4. *Vaikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H.* // Chapter 2 in *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 3. New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods* / Ed. Ibragimov N.H. Boca Raton, Florida, 1996. P. 31–67.
5. *Gazizov R.K.* // *J. Math. Anal. and Appl.* 1997. V. 213. P. 202–228.
6. *Газизов Р.К.* // *Межвуз. науч. сб. "Акт. проблемы математики. Мат. методы в естествознании"*. Уфа, 1999. С. 66–75.
7. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН,
Уфимский государственный авиационный
технический университет

Поступила в редакцию
21.03.2002 г.