

О РАСПАДЕ СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ $\mu^+\mu^-$ -ПАРЫ В e^+e^- -ДАЛИТЦ-ПАРУ И γ -КВАНТ

Козлов Г. А., Кулешов С. П., Саврин В. И.,
Санадзе В. В., Скачков Н. Б.

Исследуется поведение формфактора распада связанной системы $\mu^+\mu^-$, находящейся в состоянии с полным спином, равным нулю, на e^+e^- -пару и γ -квант. Вычислена вероятность распада связанного состояния $\mu^+\mu^-$ на два фотона. Замена в полученном выражении массы μ -мезона на массу электрона приводит к величине вероятности распада пара-позитрония на два γ -кванта, согласующейся с экспериментальными данными.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в литературе, посвященной спектроскопии как новых (η_c , J/Ψ , Υ)-, так и старых (π , ρ , ϕ , ...) -мезонов, широко изучаются процессы распада кварк-антикварковых систем на реальные и виртуальные фотоны [1—3]. В целом ряде работ [4—6] для расчета таких процессов используются волновые функции, описывающие связанные состояния кварк-антикварковой системы. Как уже отмечалось в [6], волновые функции легких мезонов еще недостаточно хорошо изучены, поскольку, во-первых, в этой области необходимо использование существенно-релятивистского аппарата, менее разработанного, чем аппарат нерелятивистской квантовой механики, во-вторых, уровни радиальных и орбитальных возбужденных состояний легких мезонов известны экспериментально намного хуже, чем уровни возбужденных состояний Ψ -частиц. Тем самым в случае легких мезонов затруднено изучение поведения на больших расстояниях волновой функции, которая определяется путем решения уравнения с феноменологическим запирающим потенциалом, описывающим спектр масс известных на эксперименте возбуждений мезона.

Поэтому было бы весьма интересно изучить в рамках того же аппарата, который используется для описания составных мезонов, основные черты поведения сечений распадов составных электродинамических систем, т. к. в этом случае мы были бы свободны от проблемы учета влияния запирающего потенциала на больших расстояниях.

Целью нашей работы является изучение зависимости сечения процесса распада $(\mu^+\mu^-) \rightarrow \gamma e^+e^-$ связанного состояния мюон-антимюонной пары $\mu^+\mu^-$ на свободные электрон e^- , позитрон e^+ и реальный γ -квант (см. рис. 1) от квадрата инвариантной массы $q_2^2 = (p_+ + p_-)^2$ лептонной пары. Для этой цели нами будет использован тот же самый метод ковариантного одновременного описания составных систем в рамках квазипотенциаль-

ного подхода в квантовой теории поля, предложенного Логуновым и Тавхелидзе [7], который ранее использовался в работах [4–6] для описания аналогичной зависимости от $q_2^2 = (p_+ + p_-)^2$ сечения распада π^0 -мезона как связанного состояния кварка (q) и антикварка (\bar{q}) на далитц-пару $\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$. Заметим, что проблема описания $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma e^+ e^-$ -распада уже изучалась в работе [2], причем, по сути дела, там также использовалась одновременная бете-солпитеровская волновая функция.

Полученная в [2] формула зависимости ширины распада $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma e^+ e^-$ от $q_2^2 = (p_+ + p_-)^2$ была найдена лишь для случая, когда $4m^2 \simeq M^2$ (m — масса мю-мезона, M — масса связанного состояния $\mu^+ \mu^-$), т. е. в пределе энергии связи, стремящейся к нулю ($\epsilon_{св} \rightarrow 0$). Как указывалось авторами [2], найденная ими формула для фиктивной ширины $\Gamma(q_2^2)$ распада $\mu^+ \mu^-$ на виртуальный фотон с 4-импульсом q_2 и реальный γ -квант ¹⁾

$$(1) \quad \Gamma(q_2^2) \approx \frac{32\alpha^2 |\varphi_1'(0)|^2}{m^2 (4m^2 - q_2^2)}$$

(где α — постоянная тонкой структуры, $\varphi_1(0)$ — волновая функция P -состояния в начале координат) справедлива в области максимальных значений квадрата инвариантной массы $e^+ e^-$ -пары $q_2^2 = (p_+ + p_-)^2 \rightarrow 4m^2 \simeq M^2$ и содержит в этой области полюсную особенность, обуславливающую, в свою очередь, логарифмическую особенность формулы для ширины распада $\Gamma((\mu^+ \mu^-)_{i^+} \rightarrow \gamma e^+ e^-)$. Аналогичный результат был затем получен тем же способом авторами [2] для распада P -волновых 1^+ -состояний кваркonia на три глюона и получил широкую известность (см., например, [8]).

В настоящей работе мы при описании распада мюон-антимюонного связанного состояния $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma e^+ e^-$ предпримем попытку выхода за рамки статического предела, получим формулу для формфактора распада, справедливую во всей кинематически разрешенной области изменения q_2^2 : $4m_e^2 \leq q_2^2 < M^2$ (m_e — масса электрона), и вычислим вероятность распада $\mu^+ \mu^- \rightarrow 2\gamma$.

2. РАСЧЕТ АМПЛИТУДЫ РАСПАДА $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma e^+ e^-$ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЕТЕ-СОЛПИТЕРОВСКОЙ И КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Согласно формализму квантовой теории поля [9] амплитуде процесса распада, изображенного на рис. 1, соответствует следующее выражение:

$$(2) \quad T_{\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma e^+ e^-}^{\mu\nu} = [(2\pi)^4 i]^2 (4\pi\alpha) \int d^4 k_1 \times \\ \times \Gamma_{\alpha\beta}^{(\mu^+ \mu^-)}(k_1, q_1 + q_2 - k_1 | P) S_{\beta\rho}(k_1, m_\mu) \gamma_{\rho\kappa} \times \\ \times S_{\kappa\eta}(k_1 - q_1, m_\mu) \gamma_{\eta\xi} S_{\xi\alpha}(q_1 + q_2 - k_1, m_\mu),$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^{(\mu^+ \mu^-)}(k_1, q_1 + q_2 - k_1 | P)$ — вершинная функция, описывающая переход составной частицы связанного состояния $(\mu^+ \mu^-)$ с 4-импульсом P в мюон-антимюонную пару, а

$$(3) \quad S_{\beta\rho}(k_1, m_\mu) = \frac{1}{i(2\pi)^4} \frac{(\hat{k}_1 + m_\mu)_{\beta\rho}}{m_\mu^2 - k_1^2 - i\epsilon}$$

¹⁾ $q_2^2 = a$ в обозначениях работы [2].

есть пропагатор μ -мезона, имеющего импульс k_1 и массу m_μ .

Поскольку нас интересует распад синглетного состояния $(\mu^+\mu^-)$, обладающего нулевым полным спином и являющегося псевдоскаляром, то представим вершинную функцию $\Gamma_{\alpha\beta}^{(\mu^+\mu^-)}(k_1, k_2|P)$ в виде [10, 11]

$$(4) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{(\mu^+\mu^-)}(k_1, k_2|P) = \gamma_5 \Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2|P),$$

где функция $\Gamma(k_1, k_2|P)$ является скаляром.

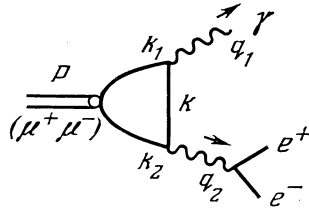


Рис. 1

Волновая функция $\Psi(k_1, k_2|P)$ определяется через вершинную функцию $\Gamma^{(\mu^+\mu^-)}(k_1, k_2|P)$ как

$$(5) \quad \Psi_{\alpha\beta}(k_1, k_2|P) = \frac{\Gamma_{\alpha\beta}^{(\mu^+\mu^-)}(k_1, k_2|P)}{(m_\mu^2 - k_1^2 - i\varepsilon)(m_\mu^2 - k_2^2 - i\varepsilon)}$$

Отсюда получаем, что амплитуда (2) выражается через волновую функцию (5) следующим образом:

$$(6) \quad T_{\mu^+\mu^- \rightarrow e^+e^-}^{\mu\nu} = [(2\pi)^4 i]^{-1} 4\pi\alpha \int d^4k_1 \times \\ \times \text{Sp} \{ \Psi_{\alpha\beta}(k_1, k_2|P) M_{\beta\alpha}^{\mu\nu}(k_1, k_2|q_1, q_2) \},$$

где

$$(7) \quad M_{\beta\alpha}^{\mu\nu}(k_1, k_2|q_1, q_2) = (\hat{k}_1 + m_\mu)_{\beta\rho} \gamma_{\rho\kappa}^\mu \times \\ \times S_{\kappa\sigma}(k_1 - q_1; m_\mu) \gamma_{\sigma\tau}^\nu (\hat{k}_2 - m_\mu)_{\tau\alpha}.$$

Перейдем теперь к волновой функции, заданной в пространстве поляризационных индексов σ_1 - и σ_2 -проекций спинов фермиона и антифермиона с 4-импульсами k_1 и k_2 , соответственно, на ось Z:

$$(8) \quad \Psi^{\sigma_1\sigma_2}(k_1, k_2|P) = \bar{u}_{\alpha\sigma_1}(k_1) \Psi_{\alpha\beta}(k_1, k_2|P) v_{\beta\sigma_2}(k_2),$$

где $u(k_1)$ и $v(k_2)$ — биспиноры фермиона и антифермиона, нормированные инвариантными условиями: $\bar{u}(k_1)u(k_1) = 2m_\mu$, $\bar{v}(k_2)v(k_2) = -2m_\mu$. Согласно (4) и (5) функцию (8) можно представить в следующем виде:

$$(9) \quad \Psi^{\sigma_1\sigma_2}(k_1, k_2|P) = \bar{u}^{\sigma_1}(k_1) \gamma_5 \Psi(k_1, k_2|P) v^{\sigma_2}(k_2),$$

где скалярная часть волновой функции $\Psi(k_1, k_2|P)$ связана со скалярной частью вершинной функции $\Gamma(k_1, k_2|P)$ соотношением

$$(10) \quad \Psi(k_1, k_2|P) = (m_\mu^2 - k_1^2 - i\varepsilon)^{-1} (m_\mu^2 - k_2^2 - i\varepsilon)^{-1} \Gamma(k_1, k_2|P).$$

С учетом (7) мы перепишем выражение (6) в виде

$$(11) \quad T_{\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma^* e^-}^{\mu\nu} = \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{4\pi\alpha}{i} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \Psi^{\sigma_1 \sigma_2}(k_1, k_2 | P) T_{\sigma_1 \sigma_2}(k_1, k_2 | q_1, q_2),$$

где

$$(12) \quad T_{\sigma_1 \sigma_2}^{\mu\nu} = \bar{u}_{\sigma_1}(k_1) \gamma^\mu S(k_1 - q_1; m_\mu) \gamma^\nu v_{\sigma_2}(k_2)$$

или же, принимая во внимание (9),

$$(13) \quad T_{\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma^* e^-}^{\mu\nu} = \frac{4\pi\alpha}{i} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \Psi(k_1, k_2 | P) \frac{\text{Sp}\{A^{\mu\nu}(k_1, k_2 | q_1, q_2)\}}{(k_1 - q_1)^2 - m_\mu^2},$$

где

$$(14) \quad \begin{aligned} \text{Sp}\{A^{\mu\nu}(k_1, k_2 | q_1, q_2)\} &= \\ &= \text{Sp}\{\gamma_5 (\hat{k}_1 + m_\mu) \gamma^\mu (\hat{k}_1 - \hat{q}_1 + m_\mu) \gamma^\nu (\hat{k}_2 - m_\mu)\} = \\ &= 4m_\mu i \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} q_{1\beta} (k_1 + k_2)_\alpha. \end{aligned}$$

Если мы теперь представим амплитуду процесса распада $\mu^+ \mu^- \Rightarrow \gamma e^+ e^-$ в стандартном виде

$$(15) \quad T_{\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma^* e^-}^{\mu\nu} = F_{\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma^*} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_{1\alpha} q_{2\beta},$$

где $F_{\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma^*}$ — формфактор распада связанного состояния $\mu^+ \mu^-$ на виртуальный (γ^*) и реальный (γ) фотоны, то с учетом в (15) характерного для фейнмановской диаграммной техники закона сохранения

$$(16) \quad P = k_1 + k_2 = q_1 + q_2$$

получаем для $F_{\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma^* e^-}$ следующее выражение:

$$(17) \quad F_{\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma^* e^-} = 16\pi m_\mu \alpha \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \Psi(k_1, k_2 | P) \frac{1}{(k_1 - q_1)^2 - m_\mu^2}.$$

В полученную формулу (17) входит скалярная часть волновой функции (5), являющейся решением уравнения Бете — Солпитера с ядром, построенным из фейнмановских матричных элементов, описывающих электромагнитное взаимодействие в системе ($\mu^+ \mu^-$).

Как известно, уравнение Бете — Солпитера представляется весьма сложным для изучения и нахождения его решений. Более удобным является трехмерное уравнение для бете-солпитеровской волновой функции, зависящей от одного временного параметра, впервые полученное Логуновым и Тавхелидзе [7].

Одновременная волновая функция (в дальнейшем отмечается знаком \sim) была введена ранее в работе [12]. В работах [13, 14] она определялась через волновую функцию Бете — Солпитера

$$(18) \quad \Psi(x_1, x_2) = \langle 0 | T(\bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_2)) | M, K \rangle$$

следующим образом:

$$(19) \quad \tilde{\Psi}_{MK}(p_1, p_2) = \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \delta(\lambda_p x_1 - \tau) \delta(\lambda_p x_2 - \tau) \Psi_{MK}(x_1, x_2)$$

где $\lambda_P = P/(P^2)^{1/2}$, $P = p_1 + p_2$, $P^2 > 0$, а инвариантное собственное время τ задает ту пространственно-подобную плоскость в пространстве-времени Минковского, которой принадлежат собственные времена частиц $\tau_1 = \lambda_P x_1$, $\tau_2 = \lambda_P x_2$ и собственное время системы как целого $\tau_c = \lambda_P X$. В формуле (18) $|M, K\rangle$ — вектор состояния, описывающий связанное состояние как одну частицу с массой M и импульсом K . В силу трансляционной инвариантности $\Psi_{MK}(x_1, x_2) = e^{iKx} \Psi(X/2; -X/2)$ ($X = x_1 + x_2$), что позволяет выделить из $\tilde{\Psi}_{MK}(p_1, p_2)$ волновую функцию, описывающую относительное движение двух частиц,

$$(20) \quad \tilde{\Psi}_{MK}(p_1, p_2) = (2\pi)^3 \frac{K^0}{\sqrt{K^2}} \delta^{(3)} \left[\frac{\sqrt{K^2}}{\sqrt{P^2}} \mathbf{P} - \mathbf{K} \right] \times$$

$$\times \exp[-i\tau(\sqrt{K^2} - \sqrt{P^2})] \tilde{\Psi}_{MK}(q),$$

$$P = p_1 + p_2, \quad q = (p_1 - p_2)/2, \quad K^2 = K_0^2 - \mathbf{K}^2, \quad K_0 = \sqrt{M^2 + \mathbf{K}^2},$$

$$(21) \quad \tilde{\Psi}_{MK}(q) = \int e^{iqx} \delta(\lambda_P x) \Psi(x/2; -x/2) d^4x,$$

а $x = x_1 - x_2$. Используя закон преобразования фермионных полей, легко показать, что благодаря наличию в (21) δ -функции волновая функция относительного движения является функцией лишь трехмерного ковариантно определенного импульса относительного движения в с.ц.и. [15]

$$(22) \quad \overset{0}{\mathbf{p}} \equiv 1/2 (\overrightarrow{\Lambda_K^{-1} q}) = (\overrightarrow{\Lambda_K^{-1} p_1}), \quad \Lambda_K^{-1} K = (M, \mathbf{0}),$$

т. е. [14]

$$(23) \quad \tilde{\Psi}_{MK}(q) = S_1(\Lambda_K) S_2(\Lambda_K) \tilde{\Psi}_{M, \mathbf{k}=\mathbf{0}}(\overset{0}{\mathbf{p}}),$$

где

$$(24) \quad \tilde{\Psi}_{M, \mathbf{k}=\mathbf{0}}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \Psi_{M, \mathbf{k}=\mathbf{0}}(\overset{0}{\mathbf{x}}),$$

$S_{1,2}(\Lambda_K)$ — матрицы преобразования биспиноров в с.ц.и.; $\overset{0}{\mathbf{x}} = \overset{0}{\mathbf{x}}_1 - \overset{0}{\mathbf{x}}_2$, $\overset{0}{\mathbf{p}}_1 = -\overset{0}{\mathbf{p}}_2 = \overset{0}{\mathbf{p}}$ и соответственно $\overset{0}{p}_1 = \overset{0}{p}_2 = \overset{0}{p}_0$.

В импульсном представлении связь одновременной и бете-солпитеровской волновых функций задается соотношением

$$(25) \quad \tilde{\Psi}_{M, \mathbf{k}=\mathbf{0}}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \int dq'_0 \Psi_{M, \mathbf{k}=\mathbf{0}}(q'_0, \mathbf{q});$$

$$\overset{0}{\mathbf{p}} \equiv 1/2 (\overrightarrow{\Lambda_K^{-1} q}) = (\overrightarrow{\Lambda_K p}),$$

где $q'_0 = Kq/M$. Поскольку в с.ц.и. $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, т. е. $q'_0 = q_0$, то соотношение (25) очевидным образом переходит в определение одновременной волновой функции, данное в работе [12].

В работах [16] для волновой функции двух спинорных частиц (25) было получено квазипотенциальное уравнение, спроектированное на спиновые состояния связанной системы

$$(26) \quad 2\overset{0}{p}_0 (2\overset{0}{p}_0 - M) \tilde{\Psi}_M^{\sigma_1 \sigma_2}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2k_0} V_{\sigma_1' \sigma_2'}^{\sigma_1 \sigma_2}(\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{k}}) \tilde{\Psi}_M^{\sigma_1' \sigma_2'}(\overset{0}{\mathbf{k}}),$$

где ядро $V(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ — квазипотенциал, строящийся по разработанному в [7, 17] рецепту из матричных элементов релятивистской амплитуды рассеяния, описывающих взаимодействие в $\mu^+\mu^-$ -системе.

Вывод формулы для амплитуды распада связанного состояния ($\mu^+\mu^-$) на два виртуальных γ -кванта в рамках одновременного формализма описания связанных состояний двух частиц ничем не отличается от вывода формулы для амплитуды, например, распада $\pi^0 \rightarrow \gamma^*\gamma^*$, приведенного в работах [4] и [5, 6]. В результате в одновременном подходе вместо (11) имеем

$$(27) \quad T_{\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma e^+ e^-}^{\lambda_1 \lambda_2} = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2k_0} \tilde{\Psi}^{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{k}) T_{\sigma_1 \sigma_2}^{\lambda_1 \lambda_2}(k_1, k_2 | q_1, q_2),$$

где $T_{\sigma_1 \sigma_2}^{\lambda_1 \lambda_2}(k_1, k_2 | q_1, q_2)$ — фейнмановская амплитуда аннигиляции μ^+ -мезона с поляризацией σ_1 и μ^- -мезона с поляризацией σ_2 в два виртуальных γ -кванта с поляризациями λ_1 и λ_2 , соответственно.

В дальнейшем мы будем использовать одновременную волновую функцию со спиновой структурой, выбранной в виде [5]

$$(28) \quad \tilde{\Psi}^{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{k}) = \bar{u}^{\sigma_1}(k_1) \gamma_5 v^{\sigma_2}(k_2) \frac{\tilde{\varphi}_{BM}(\mathbf{k})}{2k_0},$$

где $\tilde{\varphi}_{BM}(\mathbf{k})$ — скалярная функция от ковариантно определенного вектора импульса частицы в с. ц. и. (22). Условие нормировки для волновой функции $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$, имеющее в случае не зависящего от энергии квазипотенциала вид

$$(29) \quad \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0} \tilde{\Psi}^{\dagger \sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{p}) 2p_0 \tilde{\Psi}^{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{p}) = 2M,$$

для скалярной функции $\tilde{\varphi}_{BM}(\mathbf{p})$ выглядит следующим образом:

$$(30) \quad \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} |\tilde{\varphi}_{BM}(\mathbf{p})|^2 = M,$$

где M — масса связанного состояния.

Заметим, что в [2] для описания ширины распада $\mu^+\mu^-$ -системы, находящейся в состоянии с полным моментом J , его проекцией M , орбитальным моментом L и суммарным спином S , волновая функция $\Psi_{JMLS}(k)$ выбиралась в случае состояния с полным спином $S=0$ в виде (обозначения соответствуют рис. 1)

$$(31) \quad \tilde{\Psi}_{JML0}(k) = (\hat{k}_2 - m)^{1/2} (1 + \gamma_4) \times \\ \times \gamma_5 (\hat{k}_1 + m) \tilde{\varphi}_{JML0}(k),$$

$$(32) \quad \tilde{\varphi}_{JML0}(k) = C_1 \delta(k_0) \delta_{LJ} \tilde{\varphi}_{LM}(\mathbf{k}),$$

где $\tilde{\varphi}_{LM}(\mathbf{k})$ — волновая функция, являющаяся решением нерелятивистского уравнения Шредингера с орбитальным моментом L . При этом выраже-

ние для амплитуды $T^{\lambda_1 \lambda_2}$ выбиралось в виде

$$(33) \quad T^{\lambda_1 \lambda_2} = \varepsilon_{\mu}^{\lambda_1} \varepsilon_{\nu}^{\lambda_2} A^{\mu\nu},$$

где

$$(34) \quad A_{\mu\nu} = C_2 e^2 \int d^4 k \operatorname{Sp} [\Psi_{JML0}(k) N_{\mu\nu}(k)],$$

$$(35) \quad N_{\mu\nu} = \gamma_{\mu} S(k_1 - q_1; m) \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} S(k_2 - q_2; m) \gamma_{\mu},$$

C_1 и C_2 — константы, определяемые нормировкой волновых функций и амплитуд. Множитель $1/2(1+\gamma_4)$ был введен в (31) авторами [2] вследствие того, что они использовали приближение (32); и в этом случае релятивистские волновые функции выражались через нерелятивистские функции, имеющие лишь большие компоненты (см. подробнее в [1]).

Очевидно, что с точностью до переобозначений, сводящихся к перенесению под знаком шпура проектирующих операторов $(\hat{k}_1 + m)$ и $(\hat{k}_2 - m)$ из определения волновой функции (31) в амплитуду (7), а также фактора $1/2(1+\gamma_4)$, который мы не используем, поскольку будем работать с релятивистскими волновыми функциями, выражение (6) совпадает с используемым в работе [2] выражением (34). Таким образом, мы видим, что подстановка (31) в формулу (34) приводит к той же формуле (27), что и вычисления, выполненные в рамках одновременного формализма²⁾. Однако мы в дальнейшем намереваемся использовать в качестве волновой функции не шредингеровскую нерелятивистскую волновую функцию, как в [1, 2], а приближенное решение релятивистского одновременного уравнения (26) с квазипотенциалом, отвечающим однофотонному обмену [18].

3. РАСЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ФОРМФАКТОРА $F_{\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma e^+ e^-}$ ОТ КВАДРАТА ИНВАРИАНТНОЙ МАССЫ $e^+ e^-$ -ПАРЫ

Как было показано в [6], после подстановки в (27) выражений (12) и (28), вычисления шпура, а также интегрирования в (27) по угловым переменным мы приходим к следующему выражению для формфактора распада $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma e^+ e^-$:

$$(36) \quad F_{\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma^*}(x) = (1-x)^{-1} [1 + (4J_N)^{-1} J(x)].$$

В (36) формфактор $F_{\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma^*}(x)$ нормирован, так что

$$(37) \quad F_{\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma^*}(x) = F_{\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma^* e^+ e^-}(q_1^2, 0) f_{\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma}^{-1},$$

где $f_{\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma}$ — константа распада $(\mu^+\mu^-)$ -системы в два γ -кванта ($F_{\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma^*}(x) \equiv \bar{F}(x)$),

$$(38) \quad J(x) = \int_0^{\infty} d\chi_k \ln |X(x, \chi_k)| \Phi_{BM}(\chi_k),$$

$$(39) \quad X(x, \chi_k) = [1 - x e^{-\chi_k} (M_{\mu^+\mu^-} / m_{\mu} - e^{-\chi_k})] \times \\ \times [1 - x e^{\chi_k} (M_{\mu^+\mu^-} / m_{\mu} - e^{\chi_k})]^{-1}, \\ 4\pi \Phi_{BM}(\chi_k) = k_1 \bar{\Phi}_{BM}(k_1),$$

²⁾ Фактор $(2k_0)^{-1}$, появляющийся в (27), обусловлен различием нормировок нерелятивистской и релятивистской волновых функций.

$$k_1 = |k_1|, \quad x = (p_+ + p_-)^2 / M_{\mu^+\mu^-},$$

$$k_1^0 = m_\mu \operatorname{ch} \chi_k, \quad k_1 = m_\mu \operatorname{sh} \chi_k,$$

$$\chi_k = \ln [(k_1^0 + k_1) / m_\mu],$$

χ_k — быстрота, сопряженная относительно импульсу μ -мезона.

Интеграл J_N в (36) определяет константу распада

$$(40) \quad f_{\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma} = 32m_\mu M_{\mu^+\mu^-}^{-2} \alpha J_N$$

и имеет вид

$$(41) \quad J_N = \int_0^\infty d\chi_k \Phi_{BM}(\chi_k) \chi_k.$$

Для лучшего понимания физического смысла константы распада $f_{\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma}$ (40) представим волновую функцию $\Phi_{BM}(\chi_k)$ в виде [19]

$$(42) \quad \Phi_{BM}(\chi_k) = \int_0^\infty dr r \varphi_{BM}(r) \sin(m_\mu r \chi_k),$$

где волновая функция $\varphi_{BM}(r)$ вместо обычного преобразования Фурье определяется посредством разложения по унитарным бесконечномерным представлениям группы Лоренца — группы движений в пространстве Лобачевского [19] —

$$(43) \quad \varphi_{BM}(r) = \frac{2m_\mu}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}^0}{2k_0} \xi^0(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \tilde{\varphi}_{BM}^0(\mathbf{k}),$$

где функции

$$(44) \quad \xi^0(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (kn/m_\mu)^{-1-ir^m_\mu} \quad (0 \leq r < \infty, n = (1, \mathbf{n}), \mathbf{n}^2 = 1)$$

реализуют унитарное представление группы Лоренца [20]. В нерелятивистском пределе ($m \rightarrow \infty$), как отмечалось в [19], $\xi^0(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \rightarrow e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, и преобразование (43) обращается в трехмерное преобразование Фурье, связывающее импульсное пространство с обычным трехмерным координатным пространством. Путем подстановки (42) в (41) вычисляем в явном виде интеграл J_N :

$$(45) \quad J_N = \frac{\pi}{2m_\mu^2} \varphi_{BM}(0),$$

где $\varphi_{BM}(0)$ — волновая функция в релятивистском конфигурационном представлении при $r=0$. Тогда для константы распада $\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma$ (40) получаем следующее выражение [5]:

$$(46) \quad f_{\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma} = \frac{16\pi\alpha}{m_\mu M_{\mu^+\mu^-}^2} \varphi_{BM}(0).$$

В статическом приближении, когда относительным внутренним движением μ -мезонов можно пренебречь ($\chi_k \rightarrow 0$), из (36) следует формула

$$(47) \quad (1-x)F^{\text{stat}}(x) = 1 + (M_{\mu^+\mu^-}/2m_\mu - 1)x \left(1 - \frac{M_{\mu^+\mu^-} - m_\mu}{m_\mu} x\right)^{-1},$$

которая в работе [4] использовалась для описания данных по распадам псевдоскалярных мезонов. Из (47) видно, что в статическом пределе наклон формфактора, характеризуемый производной $F'^{\text{stat}}(x)$, в области малых значений квадрата инвариантной массы e^+e^- -пары x положительный. Для больших значений x формфактор (36) в основном определяется полюсным множителем $(1-x)^{-1}$.

Простыми вычислениями можно убедиться [6], что для произвольных значений быстрот χ_k второе слагаемое в квадратных скобках в (36), связанное с волновой функцией $(\mu^+\mu^-)$ -системы $\Phi_{\text{ВМ}}(\chi_k)$, всегда меньше нуля в случае отрицательной энергии связи ($M_{\mu^+\mu^-} < 2m_\mu$)³⁾:

$$(48) \quad \eta(x) = (4J_N)^{-1} J(x) < 0,$$

и абсолютная величина $\eta(x)$, обуславливающая отклонение от статического приближения, в принципе может изменить знак производной формфактора на противоположный. Так, например, в предельном случае ультрарелятивистского движения фермионов внутри связанной системы (в интеграл $J(x)$ в (38) основной вклад вносят большие значения χ_k) получим следующую формулу, характеризующую наклон формфактора:

$$(49) \quad (1-x)F'(x)/F(x) \simeq 1 - (xF(x)J_N)^{-1} \int_0^\infty d\chi_k \Phi_{\text{ВМ}}(\chi_k),$$

и, следовательно, при достаточно малых x производная формфактора будет отрицательна. Это означает, что абсолютная величина формфактора распада $P \rightarrow \gamma e^+ e^-$ в области малых x становится меньше значения $F(0) = 1$. Необходимо отметить, что наличие этого эффекта и его абсолютную величину можно определить, лишь зная конкретный вид волновой функции $\Phi_{\text{ВМ}}(\chi_k)$.

В пределе слабой связи в $(\mu^+\mu^-)$ -системе ($4m_\mu^2 \simeq M_{\mu^+\mu^-}^2$) наклон формфактора в области малых значений x определяется выражением

$$(50) \quad F'(x) \simeq 1 + J_N^{-1} \int_0^\infty d\chi_k \Phi_{\text{ВМ}}(\chi_k) \text{sh } \chi_k (M_{\mu^+\mu^-}/2m_\mu - \text{ch } \chi_k).$$

Легко заметить, что в статическом пределе ($\chi_k \rightarrow 0$) производная формфактора (50) положительна и равна

$$(51) \quad F'^{\text{stat}}(x) \simeq M_{\mu^+\mu^-}/2m_\mu.$$

4. РАСПАД ПАРАМЮОНИЯ НА ДВА γ -КВАНТА

Вероятность распада парамюония на два фотона определяется с помощью следующего выражения:

$$(52) \quad \Gamma(\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma) = \frac{M_{\mu^+\mu^-}^3}{64\pi} |f_{\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma}|^2,$$

³⁾ Для системы, например с положительной энергией связи ($M > 2m$) [6], знак функции $\eta(x) = (4J_N)^{-1} J(x)$ в (36) может быть либо положительным, либо отрицательным в зависимости от конкретного вида волновой функции.

где $f_{\mu^+\mu^-\rightarrow 2\gamma}$ — константа распада $\mu^+\mu^-\rightarrow 2\gamma$ (40). В пределе слабой связи ($4m_\mu^2 \simeq M_{\mu^+\mu^-}^2$) выражение (52) преобразуется в следующее:

$$(53) \quad \Gamma(\mu^+\mu^-\rightarrow 2\gamma) \simeq \frac{8}{\pi} \alpha^2 m_\mu \left| \int_0^\infty d\chi_k \chi_k \Phi_{BM}(\chi_k) \right|^2,$$

или учитывая (41) и (45):

$$(54) \quad \Gamma(\mu^+\mu^-\rightarrow 2\gamma) \simeq \frac{2\pi\alpha^2}{m_\mu^3} |\Phi_{BM}(0)|^2,$$

где $\Phi_{BM}(0)$ — волновая функция (43) при $r=0$. Заметим для сравнения, что в рассматриваемом приближении слабосвязанной системы выражение для вероятности распада парапозитрония (полный спин $S=0$) на два γ -кванта будет отличаться от (53) или (54) заменой $m_\mu \rightarrow m_e$ (m_e — масса электрона):

$$(55) \quad \Gamma(e^+e^-\rightarrow 2\gamma) = \Gamma(\mu^+\mu^-\rightarrow 2\gamma) (m_e/m_\mu).$$

Ширины распадов связанных состояний двух заряженных частиц в квазипотенциальном подходе вычислялись в ряде работ [21–23]. Так, например, в работе [23] для ширины распада парапозитрония на два γ -кванта с учетом радиационных поправок получено значение

$$(56) \quad \Gamma(e^+e^-\rightarrow 2\gamma) = (0,7984 \pm 0,0004) \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}.$$

Если мы при вычислении $\Gamma(\mu^+\mu^-\rightarrow 2\gamma)$ в (54) вместо $\Phi_{BM}(0)$ введем новую волновую функцию

$$(57) \quad \chi_{BM}^{(\mu^+\mu^-)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{M_{\mu^+\mu^-}}} \Phi_{BM}(\mathbf{r}),$$

которая в нерелятивистском пределе нормирована следующим образом:

$$(58) \quad \int d^3\mathbf{r} |\chi_{BM}^{(\mu^+\mu^-)}(\mathbf{r})|^2 = 2,$$

то с учетом (54) формула (55) преобразуется в

$$(59) \quad \Gamma(e^+e^-\rightarrow 2\gamma) = \frac{4\pi\alpha^2}{m_\mu^2} |\chi_{BM}^{(\mu^+\mu^-)}(0)|^2 \frac{m_e}{m_\mu},$$

где m_e — масса электрона.

Воспользовавшись волновой функцией $\chi_{BM}^{(e^+e^-)}(0)$, описывающей ширину распада связанного (e^+e^-) -состояния на два γ -кванта, (59) представим в виде

$$(60) \quad \Gamma(e^+e^-\rightarrow 2\gamma) = \frac{4\pi\alpha^2}{m_e^2} |\chi_{BM}^{(e^+e^-)}(0)|^2.$$

Волновая функция $\chi_{BM}^{(e^+e^-)}(\mathbf{r})$, являющаяся фурье-образом решения нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом в импульсном пространстве, имеет для S -состояния при $r=0$ следующий

вид [22]:

$$(61) \quad \chi_{\text{ВМ}}^{(e^+e^-)}(0) = \sqrt{(m_e \alpha)^2 / 8\pi}.$$

Подставляя (61) в (60), мы получим известное выражение для ширины распада парапозитрония в два фотона (см., например, [22]):

$$(62) \quad \Gamma(e^+e^- \rightarrow 2\gamma) = \frac{1}{2} m_e \alpha^5.$$

5. МОДЕЛЬНАЯ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ

Для практического вычисления формфактора распада $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma e^+e^-$ (36) и вероятности распада $\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma$ (53) воспользуемся следующим выражением для релятивистской волновой функции [18]:

$$(63) \quad \varphi_{\text{ВМ}}(\chi_k) = \frac{C_0 \text{sh } \chi_k}{(\text{ch } \chi_k - M_{\mu^+\mu^-} / 2m_\mu)^2},$$

являющейся приближенным решением квазипотенциального уравнения [18]

$$(64) \quad \text{ch } \chi_p (M_{\mu^+\mu^-} / 2m_\mu - \text{ch } \chi_p) \varphi_{\text{ВМ}}(\chi_p) = \frac{m_\mu^2}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty d\chi_k \times \\ \times \left\{ \text{ch}(\chi_p - \chi_k) + \text{ch}(\chi_p + \chi_k) - 1 \right\} \int_{|\chi_p - \chi_k|}^{\chi_p + \chi_k} dy \text{sh } y V_0(2m_\mu \text{sh}(y/2)) \varphi_{\text{ВМ}}(\chi_k)$$

и обладающей правильным нерелятивистским пределом и асимптотикой при $\chi_k \rightarrow \infty$ [18]. В выражении (63) C_0 — константа нормировки, определяемая из условия (см. формулу (30))

$$(65) \quad \int_0^\infty |\varphi_{\text{ВМ}}(\chi_k)|^2 \text{ch } \chi_k d\chi_k = \frac{1}{8} \frac{M_{\mu^+\mu^-}}{m_\mu}.$$

В уравнении (64) применяется следующая параметризация передачи импульса в квазипотенциале [18]:

$$(66) \quad q^2 = (p - k)^2 = (2m \text{sh}(y/2))^2,$$

$$(67) \quad \text{ch } y = \text{ch } \chi_p \text{ch } \chi_k - (\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_k) \text{sh } \chi_p \text{sh } \chi_k.$$

В качестве квазипотенциала $V_0(2m \text{sh}(y/2))$ в (64) использовалось следующее выражение, соответствующее однофотонному обмену в электродинамике [18]:

$$(68) \quad V_0(2m_\mu \text{sh}(y/2)) = -\frac{4\pi\alpha}{q^2} = -\frac{\pi\alpha}{m_\mu^2 \text{sh}^2(y/2)}.$$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА

Аналитическое вычисление формфактора распада $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma e^+e^-$ (36) с волновой функцией (63) является весьма затруднительным из-за сложности подынтегрального выражения в (38), поэтому расчет $F(x)$ производился численно. Перед тем как обсудить результаты вычисления

$F_{\mu^+\mu^-\rightarrow\gamma e^+e^-}(x)$, рассмотрим функцию

$$(69) \quad f(x, \chi_k) = \left(4 \int_0^\infty d\chi_k \Phi_{ВМ}(\chi_k) \chi_k \right)^{-1} \ln |X(x, \chi_k) | \Phi_{ВМ}(\chi_k),$$

входящую в выражение (36) следующим образом:

$$(70) \quad F_{\mu^+\mu^-\rightarrow\gamma e^+e^-}(x) = (1-x)^{-1} \left[1 + \int_0^\infty d\chi_k f(x, \chi_k) \right].$$

При вычислении $f(x, \chi_k)$ мы из-за слабой связи в $(\mu^+\mu^-)$ -системе использовали в качестве массы связанного $(\mu^+\mu^-)$ -состояния величину $M_{\mu^+\mu^-} \simeq \simeq 2m_\mu$.

На рис. 2 изображена графически зависимость $f(x, \chi_k)$ от быстроты μ -мезона χ_k для некоторых значений квадрата инвариантной массы лептонной пары x . Видно, что функция $f(x, \chi_k)$ является отрицательной, а ее значения по абсолютной величине в области $0 \leq \chi_k \leq 8$ меньше чем единица. Следовательно,

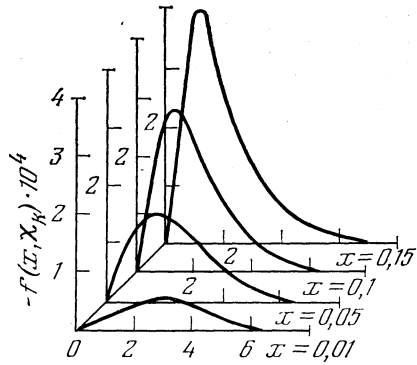


Рис. 2

значение интеграла $\int_0^\infty d\chi_k f(x, \chi_k) \simeq$

$\simeq -5 \cdot 10^{-3}$ при $0,01 \leq x \leq 0,15$ хотя и

является отрицательным добавочным слагаемым к единице в квадратных скобках (70), в силу малости своей величины не сказывается на поведении формфактора $F_{\mu^+\mu^-\rightarrow\gamma e^+e^-}(x)$, определяемого полюсным множителем $(1-x)^{-1}$.

Используя волновую функцию (63) при вычислении $\Gamma(\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma)$ по формуле (53), получим следующее значение вероятности распада пара-мюония на два γ -кванта:

$$(71) \quad \Gamma(\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma) = 1,648 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}.$$

Если теперь воспользоваться формулой (55), то подстановкой (71) в (55) получаем значение вероятности распада $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$:

$$(72) \quad \Gamma(e^+e^- \rightarrow 2\gamma) = 0,797 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1},$$

которое находится в хорошем согласии с экспериментально измеренной [24]:

$$(73) \quad \Gamma_{\text{экспер}}(e^+e^- \rightarrow 2\gamma) = (0,799 \pm 0,011) \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе нами показано, что формфактор распада связанного состояния $\mu^+\mu^-$ -пары на e^+e^- -далитц-пару и γ -квант имеет плавный рост с увеличением инвариантной массы e^+e^- -пары от минимального ки-

нематически разрешенного значения до максимальной величины, в чем и состоит отличие от теоретически возможного поведения формфактора распада $\rho^0 \rightarrow (e^+e^-) + \gamma$ [6]. Такое различие обусловлено тем, что кулоновское электромагнитное взаимодействие в системе $\mu^+\mu^-$ приводит к слабой связи в ней, в то время как для π -мезона, являющегося кварк-антикварковой системой, характерно наличие сильной связи. Вычислена полная ширина распада связанного состояния $\mu^+\mu^-$ -пары на два γ -кванта. Показано, что применение данного метода к парапозитронию дает значение вероятности распада $(e^+e^-) \rightarrow 2\gamma$, согласующееся с экспериментально известным.

Авторы считают приятным долгом выразить свою благодарность А. В. Сидорову, В. Н. Капшаю и М. А. Смондыреву за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

- [1] Barbieri R., Gatto R., Kögerler R. — Phys. Lett., 1976, 60B, № 2, 183–188.
- [2] Barbieri R., Gatto R., Remiddi E. — Phys. Lett., 1976, 61B, № 5, 465–468.
- [3] Savrin V. I., Skachkov N. B. — Lett. Nuovo Cim., 1980, 29, № 4, 363–368.
- [4] Bergström L., Snellman H. — Z. Phys., 1981, 8C, № 4, 363–366.
- [5] Саерин В. И., Скачков Н. Б. — ТМФ, 1983, 54, № 3, 372–380.
- [6] Kozlov G. A. et al. — Z. Phys., 1983, 21C, № 1/2, 63–68.
- [7] Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. — Nuovo Cim., 1963, 29, № 2, 380–400.
- [8] Клоуз Ф. Кварки и партоны. М.: Мир, 1982.
- [9] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
- [10] Okubo S., Feldman D. — Phys. Rev., 1960, 117, № 1, 279–306.
- [11] Lurié D., Macfarlane A. J., Takahashi Y. — Phys. Rev., 1965, 140, № 4B, B1091–B1099.
- [12] Salpeter E. E. — Phys. Rev., 1952, 87, № 2, 328–343.
- [13] Логунов А. А., Саерин В. И., Тюрин Н. Е., Хрусталев О. А. — ТМФ, 1971, 6, № 2, 157–165.
- [14] Faustov R. N. — Ann. Phys., 1973, 78, № 1, 176–189.
- [15] Широков Ю. М. — ЖЭТФ, 1958, 35, № 4, 1005–1013.
- [16] Skachkov N. B. On the Spin Structure of Electromagnetic Interaction of Two Relativistic Particles. Preprint E2-7333, Lubna: JINR, 1973. Skachkov N. B. Covariant Three-Dimensional Equation for Fermion – Antifermion System. Preprint E2-81-294, Dubna: JINR, 1981. Линкевич А. Д., Саерин В. И., Скачков Н. Б. — ТМФ, 1982, 53, № 1, 20–31.
- [17] Филиппов А. Т. В сб.: Международная зимняя школа теоретической физики при Объединенном институте ядерных исследований, том 2. Дубна: ОИЯИ, 1964, 80–107.
- [18] Капшай В. Н., Линкевич А. Д., Саерин В. И., Скачков Н. Б. — ТМФ, 1982, 53, № 3, 388–398.
- [19] Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. — Nuovo Cim., 1968, 55A, № 2, 233–257. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. — ЭЧАЯ, 1972, 2, № 3, 635–678.
- [20] Шапиро И. С. — ДАН СССР, 1956, 106, № 4, 647–649.
- [21] Nguyen Van Hieu, Faustov R. N. — Nucl. Phys., 1964, 53, № 2, 337–344.
- [22] Фаустов Р. Н. — ЭЧАЯ, 1972, 3, № 1, 238–268.
- [23] Caswell W. E., Lepage G. P. — Phys. Rev., 1979, 20A, № 1, 36–43.
- [24] Theriot E. D. et al. — Phys. Rev., 1970, 2A, № 3, 707–721.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию
15.IX.1983 г.

ON THE DECAY OF A BOUND STATE OF A $\mu^+\mu^-$ -PAIR INTO AN e^+e^- -DALITZ PAIR AND A γ -QUANTUM

Kozlov G. A., Kuleshov S. P., Savrin V. I.,

Sanadze V. V., Skachkov N. B.

The behaviour of the form factor is studied for a bound $\mu^+\mu^-$ -system in a state with zero total spin decaying into an e^+e^- -pair and a γ -quantum. The probability of the decay of the bound $\mu^+\mu^-$ -state into two photons is calculated. Changing the muon mass to the electron one in the expression obtained produces the value of the probability of the parapositronium decay into two γ -quanta and this value is in agreement with the experimental data.