Доказательство. Допустим, что в $B_{r_1}(z_0)$ существует другое решение $\tilde{z}$ системы (1). Введем обозначения $\xi_k=u_k-\tilde{u}$, $\tilde{\eta}_k=v_k-\tilde{v}$. Тогда, аналогично (3) и (4),

$$\tilde{\xi}_{k+1} = -F_u^{-1}(z_k)\int_0^1 \{[F_u(\tilde{x}(t)) - F_u(z_k)]\tilde{\xi}_k + F_v(\tilde{x}(t))\tilde{\eta}_k\}\,dt,$$

где $\tilde{x}(t)=\{u_k-(1-t)\xi_k,\ v_k-(1-t)\tilde{\eta}_k\}$,

$$\tilde{\eta}_{k+1} = -G_v^{-1}(z_k^+)\int_0^1 \{G_u(\tilde{y}(t))\tilde{\xi}_{k+1} + [G_v(\tilde{y}(t)) - G_v(z_k^+)]\tilde{\eta}_k\}\,dt,$$

где $\tilde{y}(t)=\{u_{k+1}-(1-t)\tilde{\xi}_{k+1},\ v_k-(1-t)\tilde{\eta}_k\}$.

Отсюда следует, что

$$\|z_k-\tilde{z}\|\leqslant r_1 q_1^k, \qquad k=0, 1, \ldots, \tag{13}$$

где

$$q_1 = \max[A(Lr_1+\varepsilon),\ A^2M(Lr_1+\varepsilon) + ALr_1] =$$
$$= \frac{1}{1-q}\max[ALr + A\varepsilon(1-q),\ (A^2ML+AL)r + A^2M\varepsilon(1-q)] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{q}{1-q}\max(1-A\varepsilon,\ 1-A^2M\varepsilon).$$

Если положить $p=\max(1-A\varepsilon,\ 1-A^2M\varepsilon)$, то, по условию, $q<1/(p+1)$. Значит, $q_1<1$.

На основании (13), $z_k\to\tilde{z}$, что противоречит соотношению $z_k\to z^*$. Теорема доказана.

Поступила в редакцию 11.07.1977

Цитированная литература

1. *В. Н. Малоземов.* О выравнивании максимумов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, 16, № 3, 781–784.
2. Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. Ред. *В. Ф. Демьянов, В. Н Малоземов.* Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.

УДК 518 : 519.2

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

В. А. ДМИТРОВСКИЙ, Е. И. ОСТРОВСКИЙ

(Обнинск)

Для вычисления методом Монте-Карло величин, зависящих от параметра, рассматривается задача оценки погрешности. Уточняются условия сходимости к гауссовскому полю, и выводятся оценки для величин, характеризующих точность вычислений.

1. Рассмотрим задачу вычисления интеграла

$$I(t)=\int_G f(t, x)\,\mu(dx)$$

по приближенной формуле

$$I(t)\approx I_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t, \eta_k),$$

где G – некоторое множество, на котором определена вероятностная мера μ, $\mu(G)=1$, η_k – последовательность независимых случайных величин с распределением μ: $\mathrm{P}(\eta_k \in A)=\mathrm{P}(\eta \in A)=\mu(A)$, $A \subset G$. Множество параметров t принадлежит единичному кубу D размерности r: $D=[0, 1]^r$. Функция f удовлетворяет условию

$$\int_G f^2(t, x)\mu(dx) < \infty \qquad \text{для всех } t \in D.$$

В работе [1] доказана сходимость по распределению величины $\xi_n(t)=n^{1/2}(I_n(t)-I(t))$ к гауссовскому полю при $n \to \infty$, откуда вытекает сходимость $I_n(t)$ к $I(t)$ равномерно по t со скоростью $n^{-1/2}$. Нашей целью является ослабление условий, приведенных в [1], и вывод количественных соотношений для оценки погрешности $(I_n(t)-I(t))$ в естественной равномерной норме:

$$\|I_n(t)-I(t)\| = \sup_{t \in D} |I_n(t)-I(t)|.$$

2. Теорема 1. *Величина $I_n(t)$ сходится равномерно с вероятностью 1 к $I(t)$ при $n \to \infty$:*

$$\mathrm{P}(\lim_{n \to \infty} \|I_n - I\| = 0) = 1.$$

Этот результат легко следует из компактности D (см. [2], стр. 174). Для построения конкретной оценки необходимо убедиться в том, что поле $\xi_n(t)$ является приближенно гауссовским, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n(t) = \xi(t) \sim N(0, R(t, s)),$$

где предел понимается в смысле Ю. В. Прохорова (см. [3]).

Теорема 2. *Пусть функция $f(t, \eta)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(t, \eta) - f(s, \eta)| \leqslant H(\eta)\,\omega(|t-s|),$$

где $\omega(\cdot)$ – некоторый модуль непрерывности. Тогда для слабой (в смысле Прохорова) сходимости $\xi_n(t)$ к центрированному гауссовскому полю $\xi(t)$, непрерывному с вероятностью 1 и обладающему ковариационной функцией

$$R(t, s) = \mathrm{cov}\,(f(t, \eta), f(s, \eta)), \tag{2.1}$$

достаточно одного из условий:

1) *существуют числа $\alpha \in (0, 1)$ и натуральное $m > r/2\alpha$, удовлетворяющие условиям $\omega(\delta) \leqslant \delta^\alpha$, $M(H(\eta))^{2m} < \infty$;*

2) *существуют числа $\alpha \in (0,1)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что*

$$\omega(\delta) \leqslant \delta^\alpha, \qquad M(H(\eta))^{r/2\alpha + 1/2 + \varepsilon} < \infty;$$

3) *для некоторого положительного $\varkappa$*

$$M \exp\{\varkappa H(\eta)\} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\omega(k^{-1}) < \infty;$$

4) *величина $H(\eta)$ субгауссовская, т. е.*

$$\sup_{\tau > 0} \{\tau^{-2} \ln M \exp[\tau H(\eta)]\} = T < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\omega(k^{-1})}{k(\ln \ln k)^{1/2}} < \infty;$$

5) *для некоторого числа* $C>0$

$$\mathbf{P}(H(\eta)\leqslant C)=1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=3}^{\infty}\frac{\omega(k^{-1})}{k\ln\ln k}<\infty.$$

Доказательство. Если $\{\zeta_k\}_{k=1}^{n}$ – независимые, одинаково распределенные, центрированные случайные величины, то для любого натурального m существует константа $C(m)$, не зависящая ни от ζ_k, ни от n, такая что

$$M\left(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\right)^m\leqslant C(m)M\zeta_1{}^m$$

(см. [4], стр. 38, где изложен частный случай $m=4$). Поэтому

$$M(\xi_n(t)-\xi_n(s))^{2m}\leqslant C(2m)M(H(\eta))^{2m}(\omega(|t-s|))^{2m}\leqslant C(\omega(|t-s|))^{2m}. \tag{2.2}$$

Из последнего неравенства вытекает слабая компактность семейства мер, порожденных полями $\xi_n(t)$ в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций с равномерной нормой, если выполнено условие 1). Неравенство (2.2) справедливо и в предположениях 2), что следует из [5] (теорема 13, стр. 156).

Докажем достаточность условий 3)–5). С этой целью введем производящий функционал поля $\xi_n(t)$ формулой

$$F_{\xi_n}(\psi)=M\exp\left\{\int\limits_{[-\pi,\pi]^r}f(s,\eta)\psi(ds)\right\},\qquad \psi\in C^*([-\pi,\pi)^r],$$

полагая $f(t,x)$ продолженным по t на все пространство R^r с периодом 2π по каждой переменной с сохранением одного из условий 3)–5). Положим теперь

$$\psi_{k,t}(ds)=\prod_{i=1}^{r}\left[c_k\left(\frac{\sin k(t_i-s_i)/2}{\sin(t_i-s_i)/2}\right)^4-\delta(t_i-s_i)\right]ds_i,$$

где $c_k=3/2\pi k(2k^2+1)$. Первое слагаемое в скобке есть так называемое ядро Джексона, второе – дельта-функция Дирака. По теореме Джексона (см. [6], стр. 114),

$$\sup_t\left|\int\limits_{[-\pi,\pi]^r}f(s,\eta)\psi_{kt}(ds)\right|\leqslant C_{(r)}H(\eta)\omega(k^{-1}),$$

откуда следует неравенство

$$\left[\int\limits_{[-\pi,\pi]^r}(f(s,\eta)-I(s))\psi_{kt}(ds)\right]^l\leqslant\left[\left|\int\limits_{[-\pi,\pi]^r}f(s,\eta)\psi_{kt}(ds)\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\int\limits_{[-\pi,\pi]^r}I(s)\psi_{kt}(ds)\right|\right]^l\leqslant\left[C_{(r)}(H(\eta)+MH(\eta))\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right]^l.$$

Разлагая выражение для $F_{\xi_n}(\lambda\psi_{kt})$ в ряд Тейлора, получаем

$$|F_{\xi_n}(\lambda\psi_{kt})|\leqslant\left[1+M\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l!\,n^{l/2}}(\lambda C_{(r)}(H(\eta)+MH(\eta))\omega(k^{-1}))^l\right]^n\leqslant$$
$$\leqslant\left[1+\frac{1}{n}M\exp\{\lambda C_{(r)}(H(\eta)+MH(\eta))\omega(k^{-1})\}\right]^n\leqslant$$
$$\leqslant\exp\{M\exp[\lambda C_{(r)}(H(\eta)+MH(\eta))\omega(k^{-1})]\}.$$

Положив $\lambda=\lambda_k=\varkappa/C_{(r)}\omega(k^{-1})$, убедимся в том, что $|F_{\xi n}(\lambda_k\psi_{kt})|<k^2$ для достаточно больших $k\geqslant K$ (в случае условия 3)) и что ряд $\sum\limits_{k=K}^{\infty}(k\lambda_k)^{-1}$ сходится. По теореме 2 работы [7], отсюда вытекает слабая компактность семейства мер, порожденных полями $\xi_n(t)$. Если же выполнено условие 4), то выберем λ_k по формуле

$$\lambda_k=[C_{(r)}T^{1/2}\omega(k^{-1})]^{-1}(\ln\ln k)^{1/2}.$$

В этом случае

$$|F_{\xi n}(\lambda_k\psi_{kt})|\leqslant k^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=3}^{\infty}(k\lambda_k)^{-1}<\infty,$$

что также достаточно для слабой компактности. Условие 5) обосновывается аналогично. Сходимость конечномерных распределений $\xi_n(t)$ к конечномерным распределениям центрированного гауссовского поля с ковариационной функцией (2.1) вытекает из центральной предельной теоремы. Непрерывность гауссовского поля также следует из теоремы 2 работы [7].

Из доказанной теоремы следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\|I_n-I\|>\varepsilon)=\mathbf{P}(\|\xi(t)\|>\varepsilon n^{1/2}).$$

Поэтому для оценки погрешности $\|I_n-I\|$ можно написать

$$\mathbf{P}(\|I_n-I\|>\varepsilon)\approx\mathbf{P}(\|\xi(t)\|>\varepsilon n^{1/2}).$$

Вероятность, стоящую в правой части, можно оценить, воспользовавшись результатом работы [8]:

$$\mathbf{P}(\|\xi(t)\|>x)\leqslant 5\cdot 2^{-(2r+1)}\int\limits_{xA^{-1}}^{\infty}e^{-u^2/2}\,du, \qquad x\geqslant(1+4r\ln 2)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Здесь

$$A=[\sup_{t\in D}R(t,t)]^{1/2}+(2+2^{1/2})\int\limits_1^{\infty}\varphi(2^{-u^2})\,du,$$

$$\varphi(\delta)=\sup_{|t-s|<\delta}[R(t,t)-2R(t,s)+R(s,s)]^{1/2}, \qquad |t-s|=\max_{i=1,2,\ldots,r}|t_i-s_i|.$$

В наших условиях интеграл $\int\limits_1^{\infty}\varphi(2^{-u^2})\,du$ всегда сходится, следовательно, формула (2.3) всегда применима. Интеграл, стоящий в правой части этой формулы, легко выражается через табулированную функцию распределения стандартного нормального закона.

3. В заключение рассмотрим несложный пример. Пусть интеграл

$$I(t)=2\pi^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+t^5)^{-1/5}e^{-x^2/2}\,dx$$

вычисляется по приближенной формуле

$$I(t) \approx I_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\eta_k + t^5)^{-1/5}, \qquad \eta_k \sim N(0, 1).$$

Поскольку $|f(t, \eta) - f(s, \eta)| \leqslant |\eta|^{-2/5}|t-s|$ и $M[H(\eta)]^2 = M|\eta|^{-4/5} < \infty$, то пример удовлетворяет условию 1) теоремы 2. Выбирая уровень доверия равным 0.95 и радиус доверительного интервала 0.1, находим оценку числа необходимых испытаний $n \approx \approx 12\,100$. Заметим, что в этом примере результаты работы [1] неприменимы.

Поступила в редакцию 28.07.1977
Переработанный вариант 28.12.1977

Цитированная литература

1. *А. С. Фролов, Н. Н. Ченцов.* О вычислении методом Монте-Карло определенных интегралов, зависящих от параметра. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 714–717.
2. *E. Mourier.* Éléments aléatoires dans un espace de Banach. Ann. Inst. Henri Poincare, 1953, 13, № 3.
3. *Ю. В. Прохоров.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, 177–238.
4. *Дж. Ламперти.* Вероятность. М., «Наука», 1973.
5. *В. В. Петров.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1972.
6. *И. П. Натансон.* Конструктивная теория функций. М.– Л., Гостехиздат, 1949.
7. *Е. И. Островский.* Производящие функционалы, индуцирующие меры в пространстве непрерывных функций. В сб. «Теория вероятностей и матем. статистика». Вып. 16. Киев, «Наукова думка», 88–95.
8. *X. Fernique.* Continuité en probabilité des fonctions aléatoires Gaussiene. École d'éte de Probabilités de Saint-Flour IV-1974. Berlin, Springer Verl., 1975, 1–94.

УДК 518 : 519.2

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА СВОЙСТВАХ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

А. И. ПАВЛОВ, Б. Б. ПОХОДЗЕЙ, И. А. РАВКИН

(Ленинград)

Излагается метод моделирования случайной величины со стандартным экспоненциальным распределением. Дается теоретико-вероятностное обоснование метода, и приводятся результаты его реализации на ЭВМ.

В настоящей работе излагается метод моделирования экспоненциального распределения, основанный на известных свойствах стационарного пуассоновского процесса (см., например, [1], стр. 273).

Обозначим через t_n время наступления n-го события в стационарном пуассоновском процессе с интенсивностью λ, наблюдаемого на $R^+ = [0, +\infty)$. Тогда времена между наступлениями последовательных событий независимы и подчиняются экспоненциальному распределению с параметром λ:

$$\mathbf{P}\{t_n - t_{n-1} < t\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$