В. Протасов, Теорема Хелли и вокруг нее, *Квант*, 2009, номер 3, 8–14

Теорема Хелли и вокруг нее

В.ПРОТАСОВ

Трудно с тремя... Потом число уже не имеет значения.

В.Черных. Москва слезам не верит

Некоторые математические объекты имеют собственные имена. Теорема Виета, прямая Эйлера... Любой студент-математик к моменту окончания университета знает их столько, что вполне мог бы сдавать специальный экзамен: какое имя что означает. Если Йенсен – то неравенство, если Фредгольм – то альтернатива, а если Грёбнер – то базис. Австрийский математик Хелли оставил после себя три великие теоремы. Одна из них является теперь неотъемлемой частью выпуклой геометрии, две другие прочно легли в фундамент теории функций. Все три одинаково важны и полезны. Поэтому математики, не вдаваясь в подробности, так и называют их по номерам: первая, вторая и третья теоремы Хелли. Случай, насколько нам известно, уникальный. Об удивительной судьбе автора трех теорем мы еще поговорим, а пока – о математическом содержании. Статья посвящена первой теореме Хелли. Эта теорема относится к красивейшей области математики – выпуклой геометрии.

Неужели выпуклые множества так интересны, что для них создано отдельное направление математики? Да, хотя поняли это люди не сразу. Один из первых результатов выпуклой геометрии – теорема Коши о жесткости выпуклых многогранников, открытая в 1813 году (о ней можно прочитать, например, в статье Н.Долбилина в «Кванте» № 5–6 за 2001 г.). К середине XX века было установлено множество интересных геометрических свойств, присущих только выпуклым фигурам. Свойства эти касаются объемов, сечений, особых точек, общей структуры выпуклых тел. Так усилиями Минковского, Радона, Фенхеля, Александрова, Крейна, Шнирельмана, Болтянского, Рокафеллара, Грюнбаума и многих других математиков выпуклая геометрия оформилась в отдельную дисциплину (см. об этом статью В.Тихомирова в «Кванте» № 4 за 2003 г.). И первая теорема Хелли заняла в ней достойное место.

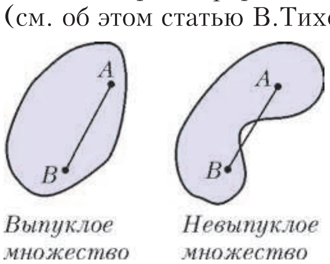

Рис. 1

Множество называется *выпуклым*, если для любой пары его точек оно целиком содержит отрезок между этими точками (рис.1). Выпуклые множества мы также будем называть выпуклыми фигурами или выпуклыми телами. Одна точка, круг, треугольник, полуплоскость, вся плоскость – выпуклые фигуры. Четырехугольник – выпуклый, если все его внутренние углы меньше 180° (это, впрочем, верно и для любого многоугольника; рис.2). Докажите (это совсем легкое упражнение), что пересечение любого, даже бесконечного, числа выпуклых множеств – выпукло. Для множеств в пространстве определение выпуклости остается таким же. Шар, тетраэдр, полупространство – выпуклы. Надеемся, это не очень усложнит восприятие статьи, если мы будем формулировать все результаты в общем случае, для пространства $\mathbb{R}^d$, где d = 1, 2 или 3 – его размерность. Так, $\mathbb{R}^1$ – прямая, $\mathbb{R}^2$ – плоскость, а $\mathbb{R}^3$ – пространство. Мы ограничимся только этими случаями, хотя читатель, знакомый с понятием d-мерного евклидова пространства (это – материал первого курса института), легко перенесет все доказательства и на общий случай.

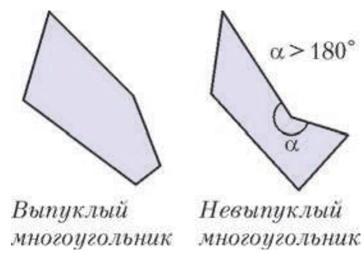

Рис. 2

Первая теорема Хелли

Теорема 1 (Хелли, 1913). *В пространстве $\mathbb{R}^d$ дано конечное семейство выпуклых множеств. Известно, что любые $d + 1$ множеств пересекаются. Тогда все они пересекаются.*

Итак, если любые, какие ни взять, $d + 1$ множеств нашего семейства имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку. Если $d = 1$, то $\mathbb{R}^1$ – прямая линия. Любое выпуклое множество на прямой – это числовой промежуток, либо конечный (отрезок $[a;b]$, интервал $(a;b)$ или полуинтервал: $[a;b)$ или $(a;b]$), либо бесконечный: луч или вся прямая. Теорема Хелли в этом случае утверждает, что если на прямой дано конечное семейство промежутков, причем любые два пересекаются, то и все они пересекаются. Доказать это несложно. Пусть, для простоты, все наши промежутки – отрезки $[a_i; b_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Среди всех левых концов a_i этих отрезков возьмем наибольший, пусть это будет a_k. Среди всех правых концов возьмем наименьший, пусть это будет b_m. Если $a_k \le b_m$, то каждый из данных отрезков $[a_i; b_i]$ содержит отрезок $[a_k; b_m]$, и все доказано. Ну а случай $a_k > b_m$ невозможен: тогда отрезки $[a_k; b_k]$ и $[a_m; b_m]$ не пересекаются.

Московский государственный университет, механико-математический факультет, e-mail: v-protassov@yandex.ru

Упражнение 1. Докажите теорему Хелли в случае $d = 1$ для любых промежутков.

Сложности начинаются с размерности $d = 2$. В этом случае теорема Хелли утверждает, что если на плоскости дано конечное семейство выпуклых множеств, причем любые три пересекаются, тогда и все они пересекаются.

Доказательство теоремы Хелли мы проведем для случая $d = 2$, а случай $d = 3$ оставим в качестве упражнения. Итак, на плоскости даны выпуклые множества $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, любые три из них пересекаются. Надо доказать, что все они пересекаются. Применим метод математической индукции по числу множеств n. Если $n = 3$, то доказывать нечего. Пусть $n \geq 4$, и дано, что любые $n - 1$ множеств пересекаются (это – предположение индукции, примененное к любым $n - 1$ множествам нашего семейства). Докажем, что пересекаются все n. Предположим обратное: они не пересекаются. Тогда для любого i найдется точка M_i, принадлежащая всем множествам $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, кроме $\mathbf{A}_i$. Нам понадобятся только первые четыре из этих точек: M_1, M_2, M_3 и M_4. Если эти точки являются вершинами выпуклого четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$, то возьмем точку пересечения его диагоналей M_1M_3 и M_2M_4 и обозначим ее через M (рис.3). Для каждого k, отличного от 1 и 3, точки M_1 и M_3 принадлежат множеству $\mathbf{A}_k$, значит (в силу выпуклости!), и весь отрезок M_1M_3 лежит в $\mathbf{A}_k$, поэтому $M \in \mathbf{A}_k$. Итак, $M \in \mathbf{A}_k$ для всех k, отличных от 1 и 3. Так же рассматриваем и вторую диагональ M_2M_4, и получаем, что $M \in \mathbf{A}_k$ для всех k, отличных от 2 и 4. Итак, точка M принадлежит всем $\mathbf{A}_k$. Если же точки не являются вершинами выпуклого четырехугольника, то одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в трех других (почему?). Пусть точка M_4 принадлежит треугольнику $M_1M_2M_3$ (рис.4). Множество $\mathbf{A}_4$ содержит все три вершины $M_1M_2M_3$, а значит, содержит весь треугольник (вновь пользуемся выпуклостью). Следовательно, $M_4 \in \mathbf{A}_4$. Но, с другой стороны, по определению $M_4 \in \mathbf{A}_k$ при всех $k \neq 4$. Потому M_4 – общая точка всех множеств $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. Это завершает доказательство индуктивного перехода от $n - 1$ к n, а значит, и всей теоремы при $d = 2$.

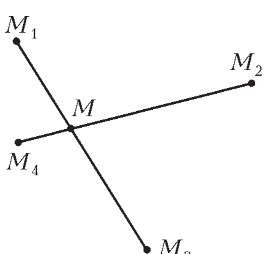

Рис. 3

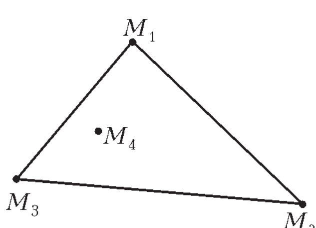

Рис. 4

Упражнения

2. Примените то же рассуждение для доказательства теоремы Хелли в $\mathbb{R}^3$.

3. Приведите пример, показывающий, что теорема Хелли не выполняется для невыпуклых множеств.

Эта теорема верна и для бесконечного семейства выпуклых множеств. Правда, с одним дополнительным условием: все множества должны быть не только выпуклы, но еще и ограничены и замкнуты. С ограниченностью все понятно: множество ограничено, если оно содержится в некотором шаре. А что значит замкнутость? Множество $\mathbf{A}$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Это означает, что если последовательность точек x_k, $k \in \mathbb{N}$, каждая из которых принадлежит $\mathbf{A}$, стремится (т.е. неограниченно приближается) к некоторой точке x, то предельная точка x также принадлежит $\mathbf{A}$. Например, одна точка – замкнутое множество. Круг без границы (открытый круг) не замкнут, а с границей – замкнут. Но если выколоть из круга любую точку, он перестает быть замкнутым. Для выпуклых множеств можно сказать проще: замкнутые – это множества, взятые со своей границей. Итак,

Теорема Хелли верна и для бесконечных семейств выпуклых множеств, если все множества ограничены и замкнуты.

Доказывать мы этого не будем, отметим только, что и ограниченность и замкнутость существенны. Например, в семействе лучей $\mathbf{A}_k = [k; +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, на прямой $\mathbb{R}^1$ все множества выпуклы и замкнуты, и любые два пересекаются, но все они не имеют общей точки. Здесь не выполнено условие ограниченности. А если не выполнено условие замкнутости, контрпример дает семейство интервалов $\mathbf{A}_k = \left(0; \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Кто вы, мистер Хелли?

Жизнь Эдварда Хелли – столь же яркая и необычная, как и его теоремы. Казалось бы, злая судьба делала все, чтобы не дать ему заниматься наукой. Хотя начало жизни обещало блистательную карьеру. Защитив в 1907 году диссертацию в Венском университете, 23-летний ученый был направлен на годовую стажировку в Германию, в Геттингенский университет – центр мировой математики того времени. Его учителями стали Гильберт, Минковский, Клейн. Вернувшись в Вену, он занялся новым передовым направлением – теорией функций. В 1912 году Хелли публикует работу «Über lineare Funktionaloperationen» (О линейных функциональных операторах), где доказывает две фундаментальные теоремы, которые стали потом называться второй и третьей теоремами Хелли, а кроме того, доказывает один из основополагающих результатов теории функций – теорему Хана–Банаха (за 15 лет до Хана и за 20 – до Банаха!). Хелли осознает исключительную важность выпуклой геометрии и через год доказывает «первую теорему Хелли». Да, да, первая теорема Хелли появилась на год позже второй и третьей! Но опубликовать он ее не успел. В 1914 году грянула первая мировая война, и подданный Австро-Венгерской империи Эдвард Хелли был призван на восточный фронт – воевать с Россией. После года тяжелых боев лейтенант Хелли получил смертельное ранение: пуля прошла через легкое. Он чудом выжил, попал в русский плен, несколько лет провел в русских госпиталях, а затем в лагерях для военнопленных в Сибири. В 1918 году война закончилась. Для всех, но не для пленных на территории России. Поскольку, как писали западные историки, «русские армии, вместо того чтобы сложить оружие, начали воевать друг с другом». В России началась гражданская война, голод, неразбериха. Хелли добрался до Владивостока, оттуда – в Японию, через всю Азию – домой. Лишь в 1920 году ему удалось вернуться в Вену, где он (после шестилетнего перерыва!) возвращается к научным занятиям и получает ряд сильных результатов. Несмотря на это, устроиться на преподавательскую работу он не смог: все места в университетах были заняты молодыми, и тридцатисемилетний инвалид войны оказался никому не нужным. Но Хелли не сдается: зарабатывает репетиторством, пишет «решебники», даже работает в банке, а после – в страховой компании. Постепенно его жизнь устраивается, служба в страховой компании приносит хороший доход, оставляя время для научных исследований, которые он не прекращает ни на день. Казалось бы – черная полоса в жизни прошла. Но в 1938 году в Вену входят нацисты (печально известный «аншлюс Австрии»), и еврея Хелли увольняют, подвергают преследованиям. Он принимает решение эмигрировать с семьей в США. Если бы он этого не сделал, то, вероятно, оказался бы в газовой камере. Жизнь в Америке поначалу была нелегкой: страна переполнена учеными из Европы, бежавшими от фашизма. Лишь поддержка и помощь Альберта Эйнштейна позволили Хелли получить работу в университете, где он наконец-то смог полностью сконцентрироваться на научной работе.

Приложения теоремы Хелли

Мы начнем с применений теоремы Хелли к задачам элементарной геометрии.

Задача 1. *На плоскости дано произвольное множество точек. Любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Тогда*[1] *и все множество можно накрыть кругом радиуса 1.*

Решение. Применим теорему Хелли к семейству замкнутых кругов единичного радиуса с центрами в точках данного множества. Любые три круга пересекаются (их общая точка – центр единичного круга, который покрывает три соответствующие точки). Значит, все круги имеют некоторую общую точку O. Тогда единичный круг с центром O содержит все точки нашего множества.

Решение задачи 1 с применением теоремы Хелли появилось впервые в 1941 году в работе Блюменталя и Валина. Однако в том же году его независимо получил ученик 182 московской школы Миша Бонгард. Случилось это так. Задача 1 была предложена на седьмой Московской математической олимпиаде школьников весной 1941 года. Ее авторы предполагали другое решение. Однако М.Бонгард свел задачу к теореме Хелли, которую, конечно же, не знал, но достаточно быстро доказал для случая, когда все выпуклые фигуры – одинаковые круги. В том же году талантливый школьник поступил в университет, но начавшаяся война прервала все жизненные планы. Он ушел на фронт, был ранен. После войны Михаил Моисеевич Бонгард стал крупнейшим математиком, одним из основоположников математического моделирования и теории распознавания образов.

Вот еще одно применение теоремы Хелли к геометрической задаче. Дан произвольный выпуклый семиугольник. Рассмотрим всевозможные выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника. Сколько всего таких пятиугольников? Ровно 21. В самом деле, каждому пятиугольнику соответствует пара вершин (семиугольника), которые он не содержит. Поэтому пятиугольников столько, сколько пар вершин у семиугольника, что равно числу сочетаний из 7 по 2, а это $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$. Оказывается, все эти пятиугольники имеют общую точку!

Задача 2. *Для произвольного выпуклого семиугольника все выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника имеют общую точку.*

Решение. Каждый пятиугольник *не содержит* ровно две вершины семиугольника, поэтому любые три пятиугольника имеют общую вершину, а значит – пересекаются. Остается применить теорему Хелли.

Следующий пример – из алгебры. Напомним, что линейным неравенством с двумя переменными называется неравенство вида $ax + by + c < 0$ (строгое неравенство) или $ax + by + c \le 0$ (нестрогое).

Задача 3. *Дана система из 100 линейных неравенств. Если любые три из них имеют общее решение, то и вся система имеет решение.*

Решение. Множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих линейному неравенству, является полуплоскостью, либо, в исключительном случае, когда $a = b = 0$, $c < 0$ (или $c \le 0$), плоскостью. В любом случае это множество выпукло. Теперь применяем теорему Хелли.

Задача 4. *На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Известно, что для любых трех отрезков найдется прямая, их пересекающая. Тогда существует прямая, пересекающая все эти отрезки.*

Формулировка этой задачи вполне элементарна, а вот решение – нет. Нужно будет рассмотреть выпуклые множества, состоящие не из точек, а из прямых. С этим приемом мы встретимся и в дальнейшем.

Решение. Введем систему координат так, что ось Oy параллельна данным отрезкам. Любой из отрезков состоит из точек $(x;y)$, для которых $x = x_0$, $y_1 \le y \le y_2$, где x_0, y_1, y_2 – некоторые числа. Прямая $y = kx + b$ пересекает этот отрезок, если $y_1 \le kx_0 + b \le y_2$. Поставим этой прямой в соответствие точку $(k;b) \in \mathbb{R}^2$. Множество точек-прямых $(k;b)$, пересекающих данный отрезок, удовлетворяет двум линейным неравенствам, а значит – выпукло. Любые три таких множества пересекаются, поскольку существует прямая, пересекающая три отрезка. Поэтому все множества имеют общую точку, т.е. существует прямая, пересекающая все отрезки.

---

[1] *В формулировках задач и упражнений мы будем опускать слова «Докажите, что...»*

Упражнения

4. Сформулируйте и докажите аналог задачи 1 в пространстве $\mathbb{R}^3$.

5. На координатной плоскости дано несколько вертикальных отрезков. Если для любых трех отрезков существует парабола $y = x^2 + px + q$, которая их пересекает, то найдется такая парабола, пересекающая сразу все отрезки.

Теорема Минковского–Радона

Теперь перейдем к более значимым приложениям теоремы Хелли, составляющим вполне самостоятельные и важные теоремы. Первая из них была доказана в 1911 году великим немецким математиком Германом Минковским (1864–1909), одним из основателей выпуклой геометрии и выпуклого анализа, а затем усилена его учеником Иоганесом Радоном (1887–1956). Эта теорема устанавливает одно общее геометрическое свойство всех выпуклых множеств.

Теорема 2 (Минковский, 1911; Радон,1916). *Внутри произвольного ограниченного выпуклого множества в пространстве $\mathbb{R}^d$ найдется точка M, обладающая следующим свойством: для любой хорды AB, проходящей через M, имеем* $\frac{AM}{BM} \le d$.

Для данного ограниченного выпуклого множества $\mathbf{G}$ наименьшее число γ, для которого найдется точка M такая, что $\frac{AM}{BM} \le \gamma$ для любой хорды AB, проходящей через M, называется константой Минковского–Радона. Мы будем обозначать эту константу $\gamma(\mathbf{G})$. Ясно, что всегда $\gamma(\mathbf{G}) \ge 1$. В самом деле, для произвольной хорды можем считать, что $\frac{AM}{BM} \ge 1$, иначе поменяем местами точки A и B. С другой стороны, например, для круга на плоскости $\gamma(\mathbf{G}) = 1$, то же – для шара в пространстве $\mathbb{R}^3$. Это же верно для любой центрально-симметричной выпуклой фигуры, поскольку, поместив точку M в центр симметрии, получим $\frac{AM}{BM} = 1$ для любой хорды. Поэтому для прямоугольника или для куба константа Минковского–Радона равна 1. Верно и обратное: если $\gamma(\mathbf{G}) = 1$, то фигура G имеет центр симметрии (упражнение 6). Таким образом, константа Минковского–Радона – это своего рода мера несимметричности фигуры. Теорема 2 утверждает, что «слишком несимметричных» выпуклых фигур не бывает, для каждой из них $\gamma \le d$. Так, у любой плоской фигуры $\gamma \le 2$, а у любой пространственной $\gamma \le 3$.

Доказательство проведем для плоскости (d = 2). Для каждой точки $A \in \mathbf{G}$ обозначим через $\mathbf{G}_A$ фигуру, гомотетичную $\mathbf{G}$ с коэффициентом $\frac{2}{3}$ относительно точки A. Иными словами, $\mathbf{G}_A$ получается из фигуры $\mathbf{G}$ сжатием относительно точки A с коэффициентом $\frac{2}{3}$. Для любых трех точек $A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{G}$ фигуры $\mathbf{G}_{A_1}, \mathbf{G}_{A_2}$ и $\mathbf{G}_{A_3}$ имеют общую точку K – точку пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$ (рис.5). В самом деле, если P – середина отрезка A_2A_3, то по свойству медиан $\frac{A_1K}{A_1P} = \frac{2}{3}$, а так как $P \in \mathbf{G}$ (выпуклость!), то $K \in \mathbf{G}_{A_1}$.

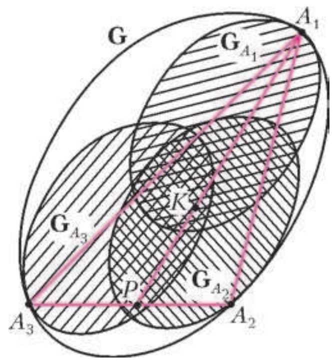

Рис. 5

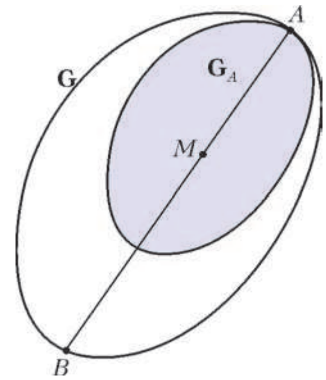

Рис. 6

Аналогично, $K \in \mathbf{G}_{A_2}$ и $K \in \mathbf{G}_{A_3}$. Применив теорему Хелли, получаем, что все фигуры $\mathbf{G}_A$, $A \in \mathbf{G}$, пересекаются в некоторой точке M (рис.6). Если провести через M произвольную хорду AB, то $\frac{AM}{AB} \le \frac{2}{3}$, поскольку $M \in \mathbf{G}_A$, а значит, $\frac{AM}{BM} \le 2$.

Какая же фигура является самой несимметричной, т.е. у какой фигуры $\gamma = d$? Ответ вполне ожидаем: на плоскости – это треугольник, причем любой, а в пространстве – тетраэдр (упражнение 8). Удивительно другое. Оказывается, это – единственные фигуры (в размерностях 2 и 3), для которых константа Минковского–Радона равна d, у всех остальных фигур она меньше!

Упражнения

6. Если константа Минковского–Радона замкнутого выпуклого множества равна 1, то множество имеет центр симметрии.

7. Докажите теорему Минковского–Радона в $\mathbb{R}^3$.

8. Для любого треугольника $\gamma = 2$, а для любого тетраэдра $\gamma = 3$.

9. Вычислите константу Минковского–Радона

а) для трапеции со сторонами 1,1,1 и 2;

б) для прямого кругового конуса;

в) для правильной треугольной призмы.

10. Приведите пример плоской фигуры, у которой $\gamma = \frac{3}{2}$.

11*. Если для плоской фигуры $\gamma = 2$, то это треугольник. Если для выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$ $\gamma = 3$, то это тетраэдр. (Фигуру и тело считаем замкнутыми.)

Неравенство Юнга

Возьмем произвольное множество на плоскости, конечное или бесконечное, выпуклое или нет. Известно, что расстояние между любыми двумя его точками не превосходит 1. Интересно, кругом какого радиуса можно накрыть это множество? Чтобы строго поставить задачу, мы ограничимся замкнутыми множествами (это сделано для удобства и, вообще говоря, несущественно) и введем два обозначения.

Диаметром ограниченного замкнутого множества называется наибольшее расстояние между двумя его точками. Диаметр множества мы будем обозначать буквой D, а наименьший радиус круга (в $\mathbb{R}^3$ – шара), в котором помещается это множество, – через R. Ясно, что всегда $R \le D$. В самом деле, круг (шар) радиуса

D с центром в любой из точек данного множества содержит все множество. Можно ли обойтись меньшим радиусом – вот вопрос. Для некоторых множеств – да. Например, прямоугольник диаметра D можно накрыть кругом радиуса $D/2$. Действительно, диаметр прямоугольника равен его диагонали, а радиус описанного круга равен ее половине. Так что для прямоугольника $R = D/2$. На самом деле это верно для любого множества, имеющего центр симметрии (упражнение 12). А вот для равностороннего треугольника радиус накрывающего круга чуть больше: $R = \frac{\sqrt{3}}{3}D$. Оказывается, что такого радиуса хватит не только для треугольника, но и для любого плоского множества. Эта теорема была доказана в 1901 г. немецким математиком Генрихом Юнгом.

Теорема 3 (Юнг, 1901). *Любое ограниченное замкнутое множество* $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^d$ *диаметра D можно поместить в шар радиуса* $\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}D$.

Итак, $R \le \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}D$. Это – *неравенство Юнга* между диаметром множества и радиусом накрывающего шара. Так, для любого плоского множества $R \le D\sqrt{\frac{2}{2(2+1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}D$. Как мы видели, равенство достигается для правильного треугольника. А для любого множества в $\mathbb{R}^3$ получаем $R \le D\sqrt{\frac{3}{2(3+1)}} = \sqrt{\frac{3}{8}}D$, что в точности соответствует правильному тетраэдру.

Неравенство Юнга доказано за 12 лет до появления теоремы Хелли. Но математика не всегда подчиняется хронологии. И неравенство Юнга – естественное следствие теоремы Хелли. А увидеть это нам поможет задача 1 (см. выше). Мы докажем теорему 3 пока только для плоских множеств, т.е. при $d = 2$.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $R_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}D$ и докажем, что любые три точки множества **A** можно накрыть кругом радиуса R_2. Воспользовавшись задачей 1, получим, что множество **A** целиком накрывается кругом радиуса R_2, что и нужно. Возьмем любые три точки множества **A**. Они являются вершинами треугольника Δ, все стороны которого не превосходят D. Если Δ – прямоугольный или тупоугольный (включая вырожденный случай, когда вершины лежат на одной прямой), то круг, построенный на его наибольшей стороне как на диаметре, содержит Δ. Радиус этого круга не превосходит $D/2$, что даже меньше, чем нужно. Если же Δ – остроугольный, то наибольший из его углов $\ge 60°$, и по теореме синусов радиус его описанного круга не превосходит $\frac{D}{2\sin 60°} = \frac{\sqrt{3}}{3}D$.

Теперь вполне ожидаемо было бы упражнение для читателя «докажите теорему 3 в пространстве $\mathbb{R}^3$». Однако, в отличие от предыдущих примеров, сделать это не так просто, трехмерный случай здесь сильно отличается от плоского. Причем начало доказательства совпадает почти дословно: с помощью теоремы Хелли теорема 3 сводится к четырем точкам (упражнение 4), т.е. к следующему утверждению:

Тетраэдр, все ребра которого не превосходят D, содержится в круге радиуса $R_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}D$.

Осталось «всего лишь» это доказать. Здесь, однако, нас подстерегают трудности. Наше рассуждение с треугольником нельзя прямо перенести на тетраэдр. Неясно, что значит «тупоугольный тетраэдр», и нет теоремы синусов, с помощью которой можно было бы найти радиус описанной сферы через длину ребра. Придется идти другим, более длинным путем.

Читатель может пропустить это рассуждение и сразу перейти к упражнениям или к следующему разделу. А для тех, кто все же хочет разобраться с трехмерным неравенством Юнга, мы наметим контуры доказательства.

1) Возьмем шар наименьшего радиуса, содержащий данный тетраэдр Δ. Это, невинное на первый взгляд, предположение вызовет протест у всякого математика. А почему такой шар существует, почему наименьший радиус достигается? Этот факт требует объяснения! В данном случае наименьший шар действительно существует, и математик скажет, что «это следует из соображений компактности». Мы не будем приводить строгого доказательства, это завело бы нас слишком далеко в область математического анализа. Поверим, что наименьший шар существует.

2) Итак, у каждого тетраэдра Δ есть шар наименьшего радиуса, его содержащий. Обозначим радиус этого шара как $R(\Delta)$. Среди всех тетраэдров, у которых длины ребер не превосходят D, найдется тетраэдр с наибольшим значением $R(\Delta)$. Мы вновь опустим доказательство того, что этот тетраэдр существует, скажем только, что это опять «следует из соображений компактности». Назовем этот тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Нам нужно доказать, что $R(\Delta) \le R_3$.

3) Если ни одна из вершин тетраэдра не лежит на поверхности наименьшего шара, то радиус шара можно уменьшить так, чтобы он по-прежнему содержал тетраэдр. Значит, шар – не наименьший. То же, если только одна вершина лежит на поверхности шара. Если ровно две вершины, например A_1 и A_2, лежат на поверхности шара, то A_1A_2 – его диаметр, иначе радиус шара вновь можно уменьшить. Следовательно, в этом случае $R(\Delta) = \frac{1}{2}A_1A_2 \le \frac{1}{2}D < R_3$. Наконец, если ровно три вершины, например, A_1, A_2 и A_3, лежат на поверхности шара, то его центр лежит в плоскости $A_1A_2A_3$, а сечение шара этой плоскостью есть круг наименьшего радиуса, содержащий треугольник $A_1A_2A_3$, в противном случае опять радиус шара можно уменьшить. Согласно доказанному нами неравенству Юнга для плоскости, радиус круга, а значит и равный ему радиус шара, не превосходит R_2, что меньше R_3. Итак, остался последний случай: все четыре вершины тетраэдра лежат на поверхности шара, т.е. он является описанным шаром тетраэдра.

4) Если тетраэдр Δ – правильный с длиной ребра D, то радиус его описанного шара как раз равен R_3. Если же тетраэдр не правильный, то одно из его ребер, например A_3A_4, меньше D. Зафиксируем грань $A_1A_2A_3$, а грань $A_1A_2A_4$ будем поворачивать относительно ребра A_1A_2. Таким образом, мы меняем двугранный угол между гранями, а

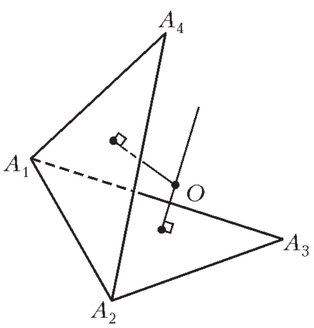

Рис. 7

сами грани не изменяем. По какой линии будет двигаться при этом центр O описанного шара тетраэдра? По перпендикуляру, восставленному к грани $A_1A_2A_3$ в центре ее описанной окружности (рис.7). Чем ближе точка O к плоскости грани, тем меньше радиус описанного шара, а чем дальше – тем больше. Значит, немного изменив двугранный угол – либо увеличив, либо уменьшив его, можно переместить точку O дальше от грани, а значит, увеличить радиус описанного шара. Причем, так как двугранный угол изменился мало, ребро A_3A_4 как было, так и останется меньше D, а длины остальных ребер не поменялись вовсе. Значит, тетраэдру Δ не соответствовал наибольший радиус шара. Получили противоречие, чем и завершается доказательство.

Упражнения

12. Для любого центрально-симметричного множества $R = D/2$.

13. Верно ли, что если $R = D/2$, то множество имеет центр симметрии?

14. Верно ли, что если для выпуклого плоского множества $R = \frac{\sqrt{3}}{3}D$, то это – правильный треугольник?

Звездные множества и теорема Красносельского

Представим себе, что мы попали в комнату весьма причудливой формы, не прямоугольную и даже не выпуклую. Из каждого места в комнате мы можем разглядеть лишь некоторую ее часть. Если же нам удалось найти точку, из которой видна вся комната, то комната называется *звездной* относительно этой точки. Итак, ограниченное замкнутое множество **G** называется звездным, если оно содержит некоторую точку K, из которой видно все множество (рис.8). Это означает, что для любой точки $X \in$ **G** отрезок KX лежит в **G**. Говорят еще, что **G** звездно относительно точки K. Например, множество, состоящее из нескольких отрезков, выходящих из одной точки, звездно (относительно этой точки), хотя оно не выпукло. А выпуклые множества – это те, которые звездны относительно каждой своей точки.

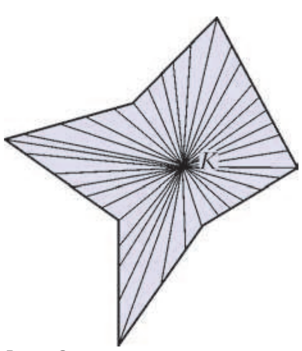

Рис. 8

Зачем нужны звездные множества? Во многих задачах математики интересующее нас множество не является выпуклым, но часто обладает каким-то другим, более слабым свойством. Звездность – одно из таких свойств. Как определить, является ли множество звездным? Для этого есть следующий замечательный критерий, доказанный Марком Александровичем Красносельским (1920–1997), выдающимся советским математиком. Получил он этот результат будучи еще совсем молодым человеком, когда, призванный в Красную Армию, преподавал в артиллерийском училище в городе Талгар, близ Алма-Аты. Эта теорема – один из первых результатов Красносельского, принесших ему всемирную известность. Мы сформулируем ее только для плоскости, хотя точно так же она доказывается и для множеств в пространстве (надо только в формулировке заменить «три точки» на «четыре»).

Теорема 4 (Красносельский, 1946). *Если любые три точки плоского множества* **G** *видны из некоторой его точки, то найдется точка, из которой видно все множество (т.е.* **G** *– звездно).*

Вернувшись к аналогии с комнатой, представим, что на ее стенах везде висят картины. Тогда если любые три картины можно одновременно увидеть из подходящего места в комнате, то найдется точка, из которой видны сразу все картины.

Родство с теоремой Хелли видно сразу: «если каждые три – то и все...» Но до доказательства еще далеко, сначала нужна предварительная работа. Первое – нам понадобится понятие выпуклой оболочки.

Выпуклой оболочкой множества **A** называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих **A**. Для получения выпуклой оболочки нужно взять все выпуклые множества, содержащие **A**, и пересечь. Получим выпуклое множество (как пересечение выпуклых множеств). Любое выпуклое множество, содержащее **A**, содержит и его выпуклую оболочку (докажите это). Итак, выпуклая оболочка – это наименьшее выпуклое множество, содержащее **A**. Несколько примеров показано на рисунке 9.


Рис. 9 *Примеры выпуклых оболочек*

И еще один факт, который мы используем в доказательстве. Для любых ограниченных замкнутых множеств **A** и **B** среди всех отрезков, соединяющих точку из **A** с точкой из **B**, существует самый короткий. Иными словами, расстояние между двумя ограниченными замкнутыми множествами всегда достигается.

Доказательство теоремы 4. Для каждой точки $X \in$ **G** обозначим через $\mathbf{V}_X$ геометрическое место точек множества **G**, из которых видна точка X. По условию, любые три множества $\mathbf{V}_{X_1}, \mathbf{V}_{X_2}$ и $\mathbf{V}_{X_3}$ пересекаются. На этом месте можно вспомнить гоголевскую Агафью Тихоновну: «Ах, если бы губы Никанора Ивановича да приставить к носу Ивана Кузьмича...» Ах, если бы эти множества были выпуклы! Тогда из теоремы Хелли немедленно получилось бы, что все они имеют общую точку, из которой было бы видно все множество **G**. Но, увы! Они могут быть невыпуклы (рис. 10).

Попробуем обойти эту трудность. Рассмотрим не сами множества $\mathbf{V}_X$, а их выпуклые оболочки. К ним мы можем применить теорему Хелли. Получаем, что существует точка C, принадлежащая выпуклым обо-

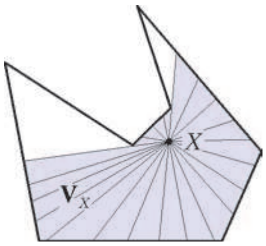

Рис. 10

лочкам всех множеств $\mathbf{V}_X$, $X \in \mathbf{G}$. Но будет ли все множество $\mathbf{G}$ видно из точки C? Оказывается, да. Хотя пока не очевидно даже, что точка C принадлежит множеству $\mathbf{G}$, ведь это множество не выпукло! Итак, докажем от противного, что множество $\mathbf{G}$ звездно относительно точки C. Пусть это не так, и некоторая точка $N \in \mathbf{G}$ *не видна* из C. Это значит, что некоторая точка A отрезка CN не принадлежит $\mathbf{G}$. Пусть $\rho > 0$ – расстояние от A до множества $\mathbf{G}$, т.е., расстояние от точки A до ближайшей к ней точки $\mathbf{G}$. Пусть также B – ближайшая к A точка отрезка NA, принадлежащая $\mathbf{G}$. Отложим на отрезке BA отрезок $BP = \frac{1}{2}\rho$. Поскольку $\rho \le BA$, точка P лежит на отрезке BA. Наконец, пусть V – ближайшая к множеству G точка отрезка PA, а $U \in \mathbf{G}$ – ближайшая к V точка множества $\mathbf{G}$. Заметим, что V отлична от A (это важно!). Кроме того, угол UVA – не острый. В противном случае, если $\angle UVA < 90^\circ$, на отрезке VA можно взять близкую к V точку V', для которой угол $\angle UV'A$ также острый. Но тогда в треугольнике $UV'V$ сторона UV лежит напротив тупого угла, а значит – наибольшая. Получаем $V'U < VU$, что противоречит определению точки V, как ближайшей к множеству $\mathbf{G}$ точке отрезка PA.

Проведем теперь через точку U прямую, перпендикулярную VU, и назовем $\mathbf{H}$ полуплоскость, ограниченную этой прямой, не содержащую точку V (рис. 11). Докажем, что множество $\mathbf{V}_U$ целиком лежит в $\mathbf{H}$. Если это не так, то найдется точка X, не лежащая в $\mathbf{H}$, для которой весь отрезок UX лежит в $\mathbf{G}$ (рис. 12). Так как угол VUX – острый, то на отрезке UX можно взять близкую к U точку U', для которой угол $VU'X$ также острый, и получаем $VU' < VU$, что противоречит определению точки U, как ближайшей к V точке множества $\mathbf{G}$. Итак, множество $\mathbf{V}_U$ лежит в полуплоскости $\mathbf{H}$. Но тогда и его выпуклая оболочка лежит в $\mathbf{H}$, ведь полуплоскость – выпуклое множество! Значит, и точка C лежит в $\mathbf{H}$, что невозможно, поскольку $\angle UVC \ge 90^\circ$. Итак, мы предположили, что существует точка, которая не видна из точки C, и пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теория приближений

Еще одна область применения теоремы Хелли – теория приближений. Она изучает, как имеющиеся «неудобные» функции или числовые данные (например, полученные в результате эксперимента) приближать более простыми и удобными. Допустим, некоторый физический процесс может быть описан функцией $F(x)$. Сама функция нам неизвестна, но мы можем узнать ее значение в любой точке. Мы хотим приблизить ее квадратичной функцией $f(x) = ax^2 + bx + c$, где коэффициенты a, b, c неизвестны. Для этого выбираем n чисел $x_1, \ldots, x_n$ и узнаем значения $F(x_1), \ldots, F(x_n)$. Необходимо определить, существует ли квадратичная функция $f(x)$ такая, что $|f(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon$ для всех $k = 1, \ldots, n$, где $\varepsilon > 0$ – нужная нам точность приближения.

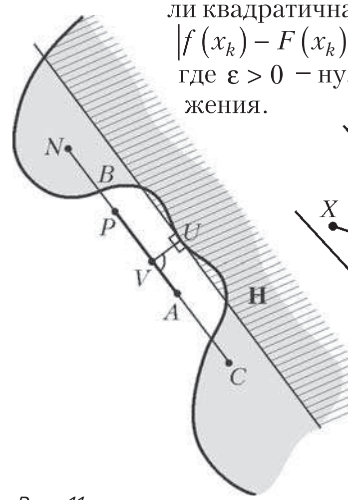

Рис. 11

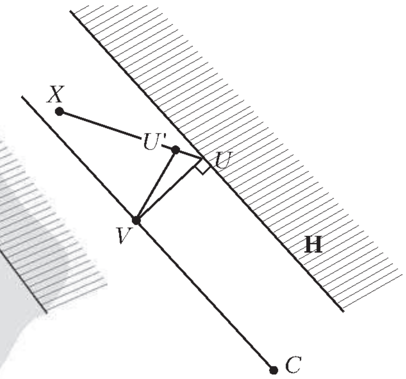

Рис. 12

Упражнения

15. Для данного набора точек $x_1, \ldots, x_n$ искомая квадратичная функция $f(x)$ существует тогда и только тогда, когда такая функция существует для любых четырех точек из этого набора.

Указание. Каждой квадратичной функции f поставим в соответствие точку $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ и для каждого k определим множество таких точек, для которых $|f(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon$. Докажите, что эти множества выпуклы, и примените теорему Хелли.

16. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение, если вместо квадратичных функций приближать функциями вида $f(x) = A\sin(x + \varphi)$.

Еще несколько задач

Мы заканчиваем знакомство с теоремой Хелли несколькими задачами для самостоятельного решения.

Упражнения

17. На плоскости дано конечное семейство прямых. Известно, что любые три прямые можно пересечь кругом радиуса r. Тогда все прямые семейства можно пересечь кругом радиуса r.

18. Сформулируйте и докажите аналоги утверждения из упражнения 17

а) для семейства прямых в пространстве;

б) для семейства плоскостей в пространстве.

19. Внутри ограниченной выпуклой фигуры всегда найдется точка, обладающая следующим свойством: любая прямая, проходящая через эту точку, делит площадь фигуры на части, отношение которых не превосходит 2.

20. На плоскости лежат несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (не обязательно одинаковых), каждые два из которых пересекаются. Тогда все прямоугольники имеют общую точку.

21. Если несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость, то из них всегда можно выбрать три, которые также покроют всю плоскость.

22. Сформулируйте и докажите аналоги утверждений из упражнений 19–21 для пространства $\mathbb{R}^3$.

Заключение

Сколько же, оказывается, интересного связано с одной лишь первой теоремой Хелли! А ведь есть еще вторая и третья ...