А. И. Некрицухин, Об одном матричном представлении свободной группы, *Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 3, 88–91

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.543

ОБ ОДНОМ МАТРИЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

А. И. Некрицухин (г. Тула)

Аннотация

Улучшается оценка на параметр, при которой группа, порожденная тремя 3×3 матрицами с элементами, зависящими от этого параметра, является свободной. Прежняя оценка была получена в предыдущей работе автора [1].

Ключевые слова: свободная группа, представление, матрица.

ON ONE THE REPRESENTATION OF A FREE GROUP

А. И. Некрицухин (г. Тула)

Abstract

Improved the estimation of the parameter in which the group generated by three 3×3 matrices with elements depending on this parameter is free.

Keywords: free group, representation, matrix.

В статье автора [1] было доказано, что группа, порожденная матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где k — комплексное число такое, что $|k| \geqslant 4,45$ является свободной ранга три. Работа была инициирована статьей [2], где ставится вопрос об улучшении границ для параметра k.

В данной заметке ограничения на параметр снижаются до любого $M > 4$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\alpha < \beta$ и y — комплексные числа, удовлетворяющие неравенству*

$$|y| > \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

a, b, c — комплексные числа такие, что

$$|a| \geqslant \alpha|b| \geqslant \beta|c| \text{ или } |a| \geqslant \alpha|c| \geqslant \beta|b|,$$

и $b' = b + ay + cy$. Тогда $|b'| \geqslant \alpha|a|$.

Доказательство. Предположим сначала, что

$$|a| \geqslant \alpha|b| \geqslant \beta|c|.$$

Тогда

$$|b'| = |b + ay + cy| \geqslant |y||a| - |b| - |y||c| \geqslant |y||a| - \frac{1}{\alpha}|a| - \frac{1}{\beta}|a||y| =$$
$$= \left(|y|\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{\alpha}\right)|a| \geqslant \alpha|a|.$$

Последнее неравенство указано в заключении леммы и оно будет выполняться при

$$|y|\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{\alpha} \geqslant \alpha \text{ или } |y| \geqslant \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\beta}{\beta - 1}.$$

Аналогично, если $|a| \geqslant \alpha|c| \geqslant \beta|b|$, то

$$|b'| = |b + ay + cy| \geqslant |y||a| - |b| - |y||c| \geqslant |y||a| - \frac{1}{\beta}|a| - \frac{1}{\alpha}|a||y| =$$
$$= \left(|y|\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\beta}\right)|a| \geqslant \alpha|a|.$$

Как и ранее, последнее неравенство, выполняется, если

$$|y|\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\beta} \geqslant \alpha \text{ или } |y| \geqslant \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Из двух ограничений на y выберем большее. Для этого надо получить неравенство

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\beta}{\beta - 1} < \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

После элементарных преобразований, учитывающих неравенства $\alpha > 1, \beta > 1$, получаем

$$(\alpha - \beta)(\alpha^2\beta - \alpha\beta + \alpha + \beta) < 0$$

По условию $\alpha < \beta$ и первый множитель в левой части неравенства меньше нуля, второй, очевидно, положителен для $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Значит, неравенство имеет место, а поэтому и исходное справедливо. Лемма доказана.

Для дальнейшего требуется выбрать нижнюю границу для

$$M = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

возможно меньшей. Для этой величины выполняется неравенство

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\alpha}{\alpha - 1} > 4$$

при $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Это следует из того, что после несложных преобразований неравенство приводится к очевидному

$$\beta(\alpha - 2)^2 + \alpha > 0.$$

Значит, $M > 4$. При этом

$$\lim_{\alpha\to 2, \beta\to\infty} M = \lim_{\alpha\to 2, \beta\to\infty} \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\frac{\alpha}{\alpha - 1} = 4.$$

Поэтому величина M может быть сколь угодно близкой к 4, но не принимать значение 4.

Теорема 1. *Пусть*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & 0 \\ z_1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где x_1, y_1, z_1 — комплексные числа такие, что $|x_1|, |y_1|, |z_1| \geqslant M, M > 4$. Тогда группа, порожденная матрицами A_1, B_1, C_1 является свободной группой ранга три.

Доказательство. Пусть

$$V_A = \{(a, b, c)|\ \ |a| \geqslant \alpha|b| \geqslant \beta|c| \text{ или } |a| \geqslant \alpha|c| \geqslant \beta|b|\},$$

$$V_B = \{(a, b, c)|\ \ |b| \geqslant \alpha|a| \geqslant \beta|c| \text{ или } |b| \geqslant \alpha|c| \geqslant \beta|a|\},$$

подмножества пространства $\mathbb{C}^3$. V_C определяется аналогично.

Тогда для ненулевого целого m : $V_A B_1^m \subseteq V_B$ и $V_C B_1^m \subseteq V_B$. первое включение следует из леммы при $y = my_1$, m — целое число (ненулевое). Второе получается из первого по симметрии. Такие же включения получаются при замене B_1^m на A_1^m и C_1^m.

Пусть $W = X_1^{m_1} \dots X_s^{m_s}$, $s \geqslant 1$, где $X_i \in \{A_1, B_1, C_1\}$, $X_i \neq X_{i+1}$ и все $m_i \neq 0$. Выберем $X \neq X_1, X_n$. Тогда

$$V_X X_1^{m_1} \subseteq V_{X_1}, V_X X_1^{m_1} X_2^{m_2} \subseteq V_{X_1} X_2^{m_2} \subseteq V_{X_2},$$

и т.д. Окончательно $V_X W \subseteq V_{X_s}$. Так как $V_X \bigcap V_{X_s} = \emptyset$, то $W \neq 1$.

Значит, рассматриваемая группа свободна и теорема полностью доказана. При $x_1, y_1, z_1 = k$ получается утверждение о свободе группы порожденной матрицами A, B, C.

Отметим, что в статье [2] ограничение на параметр: $|k| \geqslant 5$, но для матрицы любой размерности $n \geqslant 3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрицухин А. И. Трехмерные матричные представления свободной группы // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 3 С. 111-113

2. Зубков А. Н. Об одном матричном представлении свободной группы // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 6 С. 863-870

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 10.09.2013