УДК 512.743

СУПЕРКЛЕТОЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ СУПЕРПРОСТРАНСТВ ФЛАГОВ

А. А. Воронов, Ю. И. Манин

Цель настоящей работы — продвинуться в понимании строения суперпространств флагов — важного и естественно возникающего класса супермногообразий. Мы начинаем (§§ 1—4) с конструкции разбиения суперпространства полных флагов на суперклетки Шуберта, потребовав, чтобы последние удовлетворяли некоторому свойству универсальности, тривиально выполненному в классическом случае. Возникающие при этом супергруппы Вейля, включающие отражения относительно нечетных корней, нумеруют суперклетки, и размерность каждой суперклетки равна супердлине соответствующего элемента супергруппы Вейля. Супердлина определяется комбинаторным образом, корректность ее определения — нетривиальный комбинаторный факт, доказываемый нами геометрически.

Прежде чем обобщить в § 6 результаты предыдущих параграфов на случай неполных флагов, являющихся суперанналогами пространств G/P, где P — параболическая подгруппа простой алгебраической группы G, мы описываем строение параболических подгрупп в супергруппах типа SL, OSp и Q в терминах систем корней — см. § 5. Это описание показывает, что пространства неполных G-флагов суть все G-эквивариантные факторы суперпространств полных флагов.

В § 7 вводится упорядочение в супергруппе Вейля. Мы доказываем, что это упорядочение отвечает отношению включения супермногообразий Шуберта, то есть замыканий суперклеток Шуберта.

Супермногообразия Шуберта доставляют естественные примеры супермногообразий с особенностями. В § 8 дается конструкция разрешения этих особенностей, обобщающая классическую конструкцию Ботта—Сэмелсона. Если в чисто четном случае конструкция Ботта—Сэмелсона позволяет доказать рациональность особенностей многообразий Шуберта, то в супергеометрии сам факт существования аналога этой конструкции выступает как некоторая характеристика особенностей супермногообразий Шуберта. Исследование вопроса рациональности особенностей супермногообразий Шуберта предстоит еще провести. На данный момент неясно даже, что та-

кое рациональная особая точка супермногообразия. (Напомним, что в классическом случае всякая рациональная особая точка нормальна, а это влечет отсутствие нильпотентов в локальном кольце этой точки.)

Эту статью можно рассматривать также как начальный этап в изучении алгебраической топологии суперпространств флагов. Довольно много вопросов еще остается открытыми. Например, для содержательного обобщения на суперслучай таких результатов работ И. Н. Бернштейна, И. М. Гельфанда, С. И. Гельфанда [1] и Демазюра [14], как комбинаторная интерпретация индекса пересечения многообразий Шуберта и сравнение классов многообразий Шуберта с характеристическими классами флаговых пучков, необходима, в первую очередь, правильная теория когомологий, в которой лежали бы классы суперклеток Шуберта. Возможно, роль такой теории могла бы сыграть теория бордизмов супермногообразий (см. Ф. Ф. Воронов, А. В. Зорич [5]) или теория когомологий М. А. Баранова, А. С. Шварца, Ф. Ф. Воронова, А. В. Зорича (см. [4]).

В изложении наших результатов мы предпочли чисто геометрические рассуждения, сведя к минимуму использование теоретико-групповых конструкций. Этим мы обошли трудности, связанные с вопросами факторизации по действию супергруппы. К тому же, теоретико-групповая точка зрения не всегда приводит к правильным понятиям в суперслучае. Так, теория представлений (см. В. Г. Кац [17]), теория Бореля—Вейля—Ботта (см. И. Б. Пенков, И. А. Скорняков [19] и И. Б. Пенков [11]) и результаты настоящей работы указывают на то, что аналогами подгрупп Бореля являются, вообще говоря, не максимальные разрешимые подгруппы, а стабилизаторы B полных флагов. В отличие от классического случая не все подгруппы B сопряжены между собой, и, следовательно, суперпространство полных флагов распадается на связные компоненты (с этим связано и отсутствие в G системы представителей супергруппы Вейля). Компонент, появляющихся в этой работе, несколько больше, чем классов сопряженности подгрупп B — нам удобнее считать разными некоторые компоненты, соответствующие одной и той же подгруппе B. Стоит также отметить, что интуиция систем корней не всегда в суперслучае отвечает реальности, поскольку система корней простой супералгебры Ли, вообще говоря, не является абстрактной системой корней.

Та роль, которую клетки Шуберта играют в классической геометрии и теории представлений, определяет применение результатов данной работы. В этой связи заметим, что суперклетки Шуберта оказались полезными в понимании геометрии супергравитации (см. [9]) и в конструкции отражения относительно нечетного корня (см. [11], [19]).

Основные результаты этой статьи анонсированы в [2], [3].

Мы благодарны И. Б. Пенкову и И. А. Скорнякову, в постоянном общении с которыми была сделана настоящая работа.

§ 1. КЛАССИЧЕСКИЕ СУПЕРГРУППЫ И СУПЕРПРОСТРАНСТВА ФЛАГОВ

1. Классические супергруппы. Пусть $T \simeq \mathbf{C}^{m|n}$ — пространство стандартного представления классической алгебраической супергруппы G типа SL, OSp, ПSp или Q. Группа типа OSp оставляет инвариантной невырожденную четную симметрическую форму $b: T \to T^*$, группа типа ПSp — невырожденную нечетную антисимметрическую форму $b: T \to T^*$, группа типа Q — нечетную инволюцию $p: T \to T$, $p^2 = id$. Соответствующий морфизм b или p мы далее считаем фиксированным. В случаях ПSp и Q задание этого формизма влечет $m = n$. Все рассматриваемые супергруппы G, кроме $\mathrm{OSp}(2r, 2s)$, связны. Группа $\mathrm{OSp}(2r, 2s)$ распадается на две связные компоненты.

2. Связные компоненты суперпространств флагов. Пусть ${}^{\mathrm{SL}}I$ — множество всех последовательностей вида $(\delta_1, \ldots, \delta_r)$ $\delta_i = p \mid q$, $\sum_{i=1}^{r} \delta_i = m \mid n$, $r \leqslant m + n$. Фиксируем $I \in {}^{\mathrm{SL}}I$.

Определение. Пусть S — суперсхема (над $\mathbf{C}$ — в дальнейшем мы не будем это специально оговаривать). Флаг $0 = \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{r-1} \subset \mathcal{P}_r = T_S = T \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S$ локально свободных локально прямых подпучков в T_S имеет тип I, если $\mathrm{rk}\, \mathcal{P}_i - \mathrm{rk}\, \mathcal{P}_{i-1} = \delta_i$ для всех i: $1 \leqslant i \leqslant r$.

Таким образом, ранг i-го полотнища флага равен $d_i = \sum_{k=1}^{i} \delta_k$.

Определение—лемма ([7]). Функтор ${}^{G}F_I$ на категории суперсхем над $\mathbf{C}$, ставящий в соответствие суперсхеме S множество флагов типа I в T_S с ограничениями (для $G \neq \mathrm{SL}$)

$$(b \otimes id_S)(\mathcal{P}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_r) = \mathcal{P}_r^{\perp} \subset \ldots \subset \mathcal{P}_0^{\perp} \text{ для OSp и ПSp,}$$

$$(p \otimes id_S)(\mathcal{P}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_r) = \mathcal{P}_0 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_r \text{ для Q,}$$

представим посредством суперпространства флагов ${}^{G}F_I$ типа I. □

3. Лемма. Если I — тип флага из ${}^{G}F_I$, то

$$\delta_i(I) = \begin{cases} \delta_{r+1-i}(I) & \text{для OSp,} \\ \delta^c_{r+1-i}(I) & \text{для ПSp,} \\ \delta^c_i(I) & \text{для Q,} \end{cases}$$

где $(a \mid b)^c = (b \mid a)$.

Доказательство сразу следует из определений. □

4. Полные флаги. Назовем G-флаг *полным*, если он имеет максимально возможную длину r. Множество типов полных G-флагов обозначим через ${}^{G}I_n$. Структура множества ${}^{G}I_n$ дается следующей простой леммой.

Лемма.

$$
\begin{gathered}
{}^{\mathrm{SL}}I_{\mathrm{n}}=\left\{(\delta_1,\ldots,\delta_{m+n})\mid \delta_i=1\mid 0 \text{ или } 0\mid 1,\ \sum_{i=1}^{m+n}\delta_i=m\mid n\right\},\\
{}^{\mathrm{OSp}}I_{\mathrm{n}}=\{(\delta_1,\ldots,\delta_{m+n})\in{}^{\mathrm{SL}}I_{\mathrm{n}}\mid \delta_i=\delta_{m+n+1-i}\},\\
{}^{\Pi\mathrm{Sp}}I_{\mathrm{n}}=\{(\delta_1,\ldots,\delta_{m+n})\in{}^{\mathrm{SL}}I_{\mathrm{n}}\mid \delta_i=\delta^c_{m+n+1-i}\},\\
{}^{\mathrm{Q}}I_{\mathrm{n}}=\{(\underbrace{1\mid 1,\ldots,1\mid 1}_{m})\}.\ \square
\end{gathered}
$$

Определение. Суперпространством полных G-флагов называется несвязное объединение

$$
{}^{G}F=\coprod_{I\in{}^{G}I_{\mathrm{n}}}{}^{G}F_I.
$$

Замечание. Все ${}^{G}F_I$ связны, за исключением случая $G=\mathrm{OSp}(2r,2s)$, когда ${}^{G}F_I$ распадается на две компоненты связности для каждого I. В случае $G=\mathrm{Q}(m)$ ${}^{G}F$ связно.

§ 2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПАРЫ ПОЛНЫХ ФЛАГОВ

1. Определение. Пусть $\mathcal{F}_{I,\cdot}$, $\mathcal{F}_{J,\cdot}$ — два G-флага типов I, $J\in{}^{G}I_{\mathrm{n}}$. Назовем их правильно взаимно расположенными, если для всех i, j $\mathcal{F}_{I,i}\cap\mathcal{F}_{J,j}$ — локально прямые локально свободные подпучки в T_S постоянного ранга. Тип взаимного расположения флагов $\mathcal{F}_{I,\cdot}$ и $\mathcal{F}_{J,\cdot}$ — эта матрица с компонентами

$$
d_{ij}=\mathrm{rk}\,(\mathcal{F}_{I,i}\cap\mathcal{F}_{J,j}),\quad 0\leqslant i,j\leqslant r,
$$

где $r=m+n$ для $G=\mathrm{SL}$, OSp, ПSp, $r=m$ для $G=\mathrm{Q}$.

2. Лемма. а) Матрица (d_{ij}) обладает следующими свойствами:

$$
\begin{gathered}
d_{0j}=0\mid 0,\quad d_{i0}=0\mid 0,\quad d_{rj}=d_j\,(J),\quad d_{ir}=d_i\,(I),\\
0\mid 0\leqslant d_{ij}-d_{i-1,j}\leqslant\delta_i\,(I),\quad 0\mid 0\leqslant d_{ij}-d_{i,j-1}\leqslant\delta_j\,(J),\\
d_{i,j_0}\neq d_{i-1,j_0}\Rightarrow d_{ij}\neq d_{i-1,j}\ \text{ при }\ j\geqslant j_0,\\
d_{i_0,j}\neq d_{i_0,j-1}\Rightarrow d_{ij}\neq d_{i,j-1}\ \text{ при }\ i\geqslant i_0,
\end{gathered}
$$

где $a\mid b\leqslant a'\mid b'$, если $a\leqslant a'$ и $b\leqslant b'$.

б) В случаях $G=\mathrm{OSp}$, ПSp матрица (d_{ij}) обладает дополнительными свойствами симметрии:

$$
\begin{gathered}
d_{ij}=d_{m+n-i,m+n-j}-m\mid n+d_{m+n-i}\,(I)+d_{m+n-j}\,(J)\ \text{ при } G=\mathrm{OSp},\\
d_{ij}=d^c_{2m-i,2m-j}-m\mid m+d^c_{2m-i}\,(I)+d^c_{2m-j}\,(J)\ \text{ при } G=\Pi\mathrm{Sp}.
\end{gathered}
$$

Доказательство — прямое вычисление. $\square$

3. Супергруппы Вейля. Определим действие S_{m+n} на ${}^{SL}I_n$ формулой $\delta_i(wI)=\delta_{w^{-1}(i)}(I)$. В качестве действия S_m на одноэлементном множестве ${}^{Q}I_n$ возьмем единственно возможное — тривиальное.

Определение. Назовем супергруппой Вейля ${}^{G}W$ группу

а) S_{m+n} для $G=\mathrm{SL}(m, n)$,

б) $\{w\in{}^{\mathrm{SL}(m,n)}W \mid w({}^{G}I_n)={}^{G}I_n\}$ для $G=\mathrm{OSp}(m, n)$,

в) $\{w\in{}^{\mathrm{SL}(m,m)}W \mid w({}^{G}I_n)={}^{G}I_n\}$ для $G=\Pi\mathrm{Sp}(m)$,

г) S_m для $G=\mathrm{Q}(m)$.

Можно было бы дать другое, эквивалентное, определение супергруппы Вейля для $G=\mathrm{Q}(m)$, рассмотрев полные $\mathrm{Q}(m)$-флаги как неполные $\mathrm{SL}(m, m)$-флаги с условием симметрии (подобно тому, как при определении супергрупп Вейля для $G=\mathrm{OSp}(m, n)$ и $\Pi\mathrm{Sp}(m)$ полные G-флаги рассматриваются как полные $\mathrm{SL}(m, n)$-флаги с условием симметрии). Мы предпочли привести более подробную информацию в следующем упражнении.

Упражнение. Пусть I — единственный элемент в ${}^{\mathrm{Q}(m)}I_n$. Для типа I, как и для произвольного типа неполного $\mathrm{SL}(m, m)$-флага (см. § 6), определим подгруппу W_I в ${}^{\mathrm{SL}}W=S_{2m}$, состоящую из всех перестановок, оставляющих на месте каждое из подмножеств $\{1, 2\}, \ldots, \{2m-1, 2m\}$ множества $\{1, 2, \ldots, 2m\}$. Если $J\in{}^{\mathrm{SL}}I_n$ — расширение I, то есть $J=(\delta_1, \ldots, \delta_{2m}):\delta_{2i-1}+\delta_{2i}=1\mid 1$, то рассмотрим подгруппу $\widetilde{W}=\{w\in S_{2m}\mid w(J)$ — расширение $I\}$. Доказать, что W_I — нормальная подгруппа в $\widetilde{W}$ и что $\widetilde{W}/W_I\simeq S_m$.

4. Лемма. Супергруппа Вейля ${}^{G}W$ для $G=\mathrm{OSp}(m, n)$ и $\Pi\mathrm{Sp}(m)$ изоморфна полупрямому произведению $\mathbf{Z}_2^t\rtimes S_t$ $t=[(m+n)/2]$, где, как всегда, $m=n$ в случае $G=\Pi\mathrm{Sp}(m)$, а полупрямое произведение строится относительно естественного действия S_t перестановками базиса группы $\mathbf{Z}_2^t$.

Доказательство. Типы флагов из ${}^{G}I_n$ симметричны относительно середины (для $G=\Pi\mathrm{Sp}$ симметрия включает применение $(\ )^c$). Легко проверить, что перестановка сохраняет такую симметрию, если и только если она есть композиция следующих:

1) любая перестановка левой половины одновременно с зеркальной перестановкой правой,

2) любое количество транспозиций зеркально симметричных пар элементов. □

5. Комбинаторная лемма. Имеется биекция между следующими множествами:

1) геометрически реализуемые типы взаимного расположения полных G-флагов,

2) матрицы (d_{ij}) со свойствами 2,

3) тройки $\{(I, J, w) \mid I, J \in {}^G I_n,\ w \in {}^G W,\ J = w(I)\}$.

Замечание. В случае $G = Q$ множество из в) совпадает с ${}^Q W$.

Доказательство. I. Случай $G = SL(m, n)$. Доказательство разобьем на несколько шагов.

а) Конструкция стандартных пар флагов. Фиксируем I, J, w, $w(I) = J$. Выберем в $T^{m|n}$ базис $\{e_{k,I}\}$ такой, что четность $e_{k,I} = \delta_k(I)$. Рассмотрим линейные оболочки

$$\mathcal{P}_{I,i} = \langle e_{1,I}, \ldots, e_{i,I} \rangle,$$

$$\mathcal{P}_{J,j} = \langle e_{w^{-1}(1),I}, \ldots, e_{w^{-1}(j),I} \rangle.$$

Тип взаимного расположения флагов $\mathcal{P}_{I,\cdot}$ и $\mathcal{P}_{J,\cdot}$ обозначим через $(d_{ij,w,IJ})$. Таким образом, мы построили отображения множеств 3) $\to$ 2) и 3) $\to$ 1) из формулировки леммы.

б) Свойства матрицы $(d_{ij,w,I,J})$. Опять фиксируем I, J, w, и для краткости в этом пункте мы будем писать d_{ij} вместо $d_{ij,w,IJ}$. Докажем, что самые левые вдоль строк неравенства между соседними по вертикали элементами матрицы (d_{ij}) разбросаны равномерно по столбцам матрицы (на рисунке 1 изображена характерная картина совпадения элементов

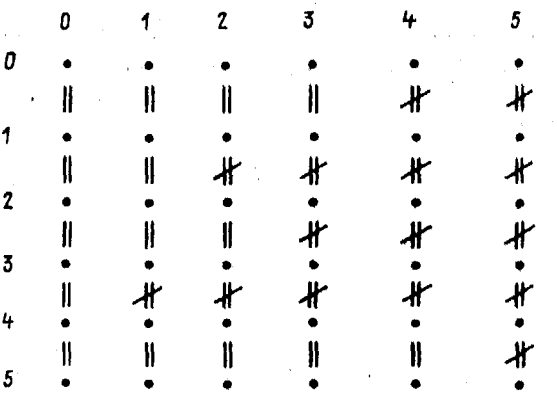

Рис. 1

матрицы (d_{ij})). Из геометрических соображений ясно, что в первом столбце есть ровно один знак неравенства между вертикальными соседями:

$$d_{k_1,1} \neq d_{k_1-1,1} \Leftrightarrow e_{k_1,I} = e_{w^{-1}(1),I} \Leftrightarrow w^{-1}(1) = k_1.$$

Во втором столбце встретится знак неравенства между элементами k_1-ой и $k_1 - 1$-ой строк (вспомним лемму 2) и еще ровно один знак неравенства:

$$(d_{k_2,2} \neq d_{k_2-1,2},\ k_2 \neq k_1) \Leftrightarrow e_{k_2,I} = e_{w^{-1}(2),I} \Leftrightarrow w^{-1}(2) = k_2.$$

Такая ситуация будет повторяться и дальше. Тем самым, сделанное утверждение доказано.

Таким образом, по матрице, происшедшей из стандартной пары флагов, тройка (I, J, w) однозначно восстанавливается: I = последний столбец, J = последняя строка, w — перестановка $w(k_i) = i$.

в) Свойства произвольной матрицы (d_{ij}), удовлетворяющей свойствам 2, а). Докажем, что для таких матриц тоже выполнено утверждение из шага б). Это даст нам возможность построить тройку (I, J, w), как это сделано в конце шага б).

Доказательство проведем индукцией по номеру столбца. В первом столбце нулевой элемент равен $0|0$, а дальше вниз, согласно свойствам 2, идут скачки на $0|0$, $0|1$ или $1|0$ вплоть до $m+n$-го элемента первого столбца, равного $d_1(J) = \delta_1(J) = 0|1$ или $1|0$. Отсюда следует, что в первом столбце будет ровно один скачок — на $\delta_1(J)$. Правее него, согласно свойствам 2, будут также знаки неравенства.

Пусть в k—1-ом столбце — k—1 знак неравенства и от каждого из них идут знаки неравенства вдоль строк вправо. Тогда, так как нулевой элемент k-ого столбца равен $0|0$, последний — $d_k(J)$, а скачки по вертикали не больше $\delta_i(I) = 1|0$ или $0|1$, то в этом столбце будет ровно k знаков неравенства. Иными словами, в k-ом столбце появляется ровно один новый знак неравенства, самый левый в горизонтальном ряду, и наше утверждение доказано.

г) Конец доказательства. В силу шага в) мы можем произвольной матрице (d_{ij}) со свойствами 2 поставить в соответствие тройку (I, J, w). Докажем, что это отображение есть отображение множеств 2) → 3) из формулировки леммы, то есть, что $w(J) = I$. В обозначениях шага б) нам нужно показать, что $\delta_l(J) = \delta_{w^{-1}(l)}(I) = \delta_{k_l}(I)$. Это следует из такого свойства матрицы (d_{ij}): если $d_{ij} \neq d_{i-1,j}$ и $d_{i,j-1} = d_{i-1,j-1}$, то $d_{ij} \neq d_{i,j-1}$ и $d_{i-1,j-1} = d_{i-1,j}$ — см. рис. 2. (Оно просто выводится из свойств 2.) Действительно, по построению k_l $d_{k_l,l} \neq d_{k_l-1,l}$ и $d_{k_l,l-1} = d_{k_l-1,l-1}$, значит, $d_{k_l,l} \neq d_{k_l,l-1}$ и $d_{k_l-1,l-1} = d_{k_l-1,l}$, откуда $\delta_{k_l}(I) = d_{k_l,l} - d_{k_l-1,l} = d_{k_l,l} - d_{k_l,l-1} = \delta_l(J)$. Таким образом, отображение 2) → 3) построено. Легко проверить, что оно яв-

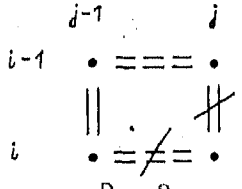

Рис. 2

ляется обратным к отображению 3)→2), построенному на шаге а).

Обратное отображение 1)→3) к отображению 3)→1), построенному в а), строится следующим образом. Матрица типа взаимного расположения двух полных флагов удовлетворяет свойствам 2. Построенное выше отображение 2)→3) переводит эту матрицу в тройку (I, J, w) со свойством $w(I)=J$.

Итак, мы доказали комбинаторную лемму в случае $G=\mathrm{SL}$.

II. Случаи $G=\mathrm{OSp}(m, n)$, $\Pi\mathrm{Sp}(m)$. В силу справедливости леммы для группы $\mathrm{SL}(m, n)$ каждой матрице (d_{ij}) со свойствами 2, а), отвечающей G, соответствует тройка (I, J, w), $I, J \in {}^{\mathrm{SL}}I_{\mathrm{n}}$, $w \in {}^{\mathrm{SL}}W$, $J=w(I)$. Поскольку $I=(d_{i, m+n})$, $J=(d_{m+n, j})$, ясно, что $I, J \in {}^{G}I_{n}$. Свойства 2, б) матрицы (d_{ij}) гарантируют, что перестановка w симметричный относительно середины тип флага из ${}^{\mathrm{SL}}I_{\mathrm{n}}$ переводит в такой же, то есть $w \in {}^{G}W$. Таким образом, мы имеем отображение 2)→3). К нему обратным является построенное при $G=\mathrm{SL}(m, n)$ отображение 3)→2). То, что из тройки (I, J, w), соответствующей группе G, получается матрица (d_{ij}) со свойствами 2, а), б), ясно из построения. Для отображений 1)→3) и 3)→1) рассуждение такое же, как и в случае $G=\mathrm{SL}$.

III. Случай $G=\mathrm{Q}(m)$. Здесь доказательство то же, что для $G=\mathrm{SL}(m, n)$, с точностью до небольших изменений, касающихся размерности полотнищ флагов. □

§ 3. СУПЕРКЛЕТКИ ШУБЕРТА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Фиксируем G и положим $F={}^{G}F$, $W={}^{G}W$. Для каждого элемента $w \in W$ обозначим через $\mathbf{d}_{ij, w}$ функцию на $\coprod_{J=w(I)} F_I \times F_J$ со значениями в $\mathbf{Z}|\mathbf{Z}$, постоянную на каждом $F_I \times F_J$:

$$\mathbf{d}_{ij, w}|_{F_I \times F_J}=d_{ij, w, IJ}-$$

элемент матрицы, соответствующей тройке (I, J, w) по комбинаторной лемме. Пусть $\mathscr{P}_{\cdot}$ — тавтологический флаг на F. Рассмотрим пучки $\mathscr{P}_i \cap \mathscr{P}_j=p_1^*\mathscr{P}_i \cap p_2^*\mathscr{P}_j \subset T_{F \times F}=T \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathcal{O}_{F \times F}$, где p_1, p_2 — проекции $F \times F$ на первый и второй сомножители. Определим

$$|Y_w| \subset \{\mathbf{C}\text{-точки } \coprod_{J=w(I)} F_I \times F_J\}$$

как множество всех $\mathbf{C}$-точек x, над которыми $\dim_x(\mathscr{P}_i \cap \mathscr{P}_j)=$ $=\mathbf{d}_{ij, w}$. В силу комбинаторной леммы, $\coprod_{w \in W}|Y_w|$ исчерпывает множество всех $\mathbf{C}$-точек $F \times F$. Структуру подсуперсхемы на $|Y_w|$ мы введем, следуя общей конструкции уплощающего разбиения ([18]).

2. Теорема. а) На каждом $|Y_w|$ существует каноническая структура локально замкнутой подсуперсхемы $Y_w \hookrightarrow F \times F$ такая, что морфизм $\coprod_{w \in W} Y_w \hookrightarrow F \times F$ является уплощающим разбиением

для системы пучков $\{\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j\}$. Это означает, что произвольный морфизм суперсхем $g: S \to F \times F$ (S — нётерова) обладает свойством

$$\left\{\begin{array}{l}\text{все } g^*(\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j) \text{ — локально прямые локально свободные} \\ \text{подпучки в } T_S \text{ рангов } \mathbf{d}_{ij,w}\end{array}\right\}$$

тогда и только тогда, когда g проводится через вложение $\coprod_{w \in W} Y_w \hookrightarrow F \times F$.

б) Все Y_w расслоены над F: $Y_w \xrightarrow{p_2} F$, причем слой $p_2^{-1}(x)$ этого расслоения изоморфен суперклетке $\mathbf{C}|^{e|s}$ (p_2 — естественная проекция на второй сомножитель произведения $F \times F$).

в) Y_w представляет функтор из категории нётеровых суперсхем над $\mathbf{C}$ в категорию множеств, ставящий в соответствие суперсхеме S множество S-точек суперсхемы $\coprod_{J=w(I)} F_I \times F_J$, над которыми $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j$ — локально прямые локально свободные подпучки в T_S рангов $\mathbf{d}_{ij,w}$.

Замечание. Очевидно, что в) — переформулировка а).

Доказательство теоремы опирается на конструкцию суперклеточного разбиения относительного проектированного суперпространства, с которой мы начнем.

3. Суперклеточное разбиение проективного суперпространства. Пусть X — фиксированная нётерова суперсхема, $\mathcal{T}$ — локально свободный пучок ранга $m|n$ на ней, а $\mathcal{P}.$ — фиксированный полный флаг в $\mathcal{T}$. Рассмотрим в относительном проективном суперпространстве $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T})$ цепочку вложенных подсуперсхем — проективизаций расслоений $\mathcal{P}_i$:

$$\varnothing \subset \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_1) \subset \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_2) \subset \ldots \subset \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T}).$$

На каждом из непустых открытых подмножеств $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_k)_{\mathrm{red}} \setminus \setminus \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_{k-1})_{\mathrm{red}}$ в $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_k)_{\mathrm{red}}$ зададим естественную структуру открытой подсуперсхемы $Z_k \subset \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_k)$.

Предложение. а) Морфизм $\coprod_k Z_k \hookrightarrow \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T})$ является относительным уплощающим разбиением для системы пучков $\{\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_i\}$, где $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{O}(-1)$-тавтологический пучок на $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T})$.

б) Z_k — относительное аффинное пространство размерности $\mathrm{rk}\,\mathcal{P}_k - 1|0$ над X. Иными словами, слой естественной проекции $Z_k \to X$ изоморфен $\mathbf{C}^{\mathrm{rk}\mathcal{P}_k - 1|0}$.

Доказательство. Утверждение б) очевидно из построения: Z_k является большой клеткой в $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_k)$.

Для доказательства а) нужно показать, что для произвольного морфизма схем над X $g: S \to \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T})$ (S — нётерова) пучки $g^*(\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_i)$ являются локально прямыми локально свободными подпучками в $\mathcal{T}_S$ ранга $0|0$ при $i < k$ и ранга $1|0$ при

$i \geqslant k$ тогда и только тогда, когда g проводится через вложение $Z_k \hookrightarrow \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T})$. Необходимость следует из того, что редукция g_{red} такого морфизма g, как известно из классической геометрии, проводится через $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_k)_{\mathrm{red}} \setminus \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_{k-1})_{\mathrm{red}} = (Z_k)_{\mathrm{red}}$, и из того, что g, очевидно, проводится через $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{P}_k)$.

Достаточность становится очевидной, если заметить, что $\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_l$ являются локально прямыми локально свободными подпучками в $\mathcal{T}_{Z_k}$ указанных рангов. Предложение доказано. □

4. Следствие. В предположениях п. 3 существует относительное уплощающее разбиение $\coprod_k Y_k$ супермногообразия $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T}) \times_X F_X$ для системы пучков $\{\tilde{\mathcal{P}} \cap \tilde{\mathcal{P}}_l\}$, где $\tilde{\mathcal{P}}$ — тавтологический пучок на $\mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T})$, $\tilde{\mathcal{P}}_\cdot$ — тавтологический флаг на F_X-суперпространстве полных флагов в $\mathcal{T}$ над X. При этом слой $p_2^{-1}(x)$ проекции $p_2: \coprod Y_k \to F_X$ над X-точкой $x \in F_X(X)$, представленной флагом $\mathcal{P}_\cdot$ в $\mathcal{T}$, канонически изоморфен $\coprod_k Z_k$. □

5. Доказательство теоремы 2.

I. Случай $G = \mathrm{SL}$. Доказательство проведем по индукции, рассматривая суперпространство полных флагов как относительное суперпространство полных флагов меньшей длины над проективным суперпространством. Для того, чтобы индуктивный переход был возможен, мы будем доказывать относительный вариант теоремы 2, то есть будем работать в категории суперсхем над некоторой нётеровой суперсхемой X, на которой задан локально свободный пучок $\mathcal{T}$ ранга $m|n$. (Формулировка утверждений 2, а), в) такая же, только все морфизмы понимаются как морфизмы суперсхем над X, а произведения — как расслоенные произведения над X. Формулировка утверждения 2, б) не меняется.)

Для $m+n=1$ пространство $F \times F$ есть X, и уплощающее разбиение состоит, очевидно, из одной компоненты $Y_w = F \times F$, $w = e$, $d_{11,w} = m|n = 1|0$ или $0|1$.

Пусть теорема доказана для $m+n=l-1$. Докажем ее для $m+n=l$. Рассмотрим естественную проекцию $F \to \mathbf{P}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_X(1|0; \mathcal{T})$ при $m>0$ и $\mathbf{P} = \mathbf{P}_X(0|1; \mathcal{T})$ при $m=0$. Относительно этой проекции F есть суперпространство $F'_{\mathbf{P}}$ полных флагов в $\mathcal{T}/\tilde{\mathcal{P}}$ над $\mathbf{P}$, где $\tilde{\mathcal{P}}$ — тавтологический пучок на $\mathbf{P}$: $F = F'_{\mathbf{P}}$. Предположение индукции дает нам относительное уплощающее разбиение (грубо говоря, уплощающее разбиение в слое) суперпространства $F'_{\mathbf{P}}$ на $\mathbf{P}$ для каждого флага $\mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{m+n}$ на X, поскольку флаг $\mathcal{P}_\cdot$ индуцирует флаг $\mathcal{P}_1/\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{P}_{m+n}/\tilde{\mathcal{P}}$ длины $m+n-1$ на $\mathbf{P}$. Тот же флаг $\mathcal{P}_\cdot$ по предложению 3 дает уплощающее разбиение $\mathbf{P}$ над X. Так получается суперклеточное разбиение F над X, соответствующее флагу $\mathcal{P}_\cdot$ — X-точке супермногообразия F над X.

Чтобы не рассматривать функтор точек, приведем конструкцию уплощающего разбиения произведения $F \underset{X}{\times} F = F'_{\mathbf{P}} \underset{X}{\times} F'_{\mathbf{P}}$. Соответствие $q: \mathcal{P}_{\cdot} \mapsto \mathcal{P}_{\cdot}/\tilde{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P}_{\cdot}$ — тавтологический флаг на F, $\mathcal{P}$ — тавтологический пучок на $\mathbf{P}$, определяет морфизм $F'_{\mathbf{P}} \underset{X}{\times} F'_{\mathbf{P}} \xrightarrow{\mathrm{id} \times q} F'_{\mathbf{P}} \underset{\mathbf{P}}{\times} F'_{\mathbf{P}}$, база которого по предположению индукции допускает уплощающее разбиение. Естественная проекция $p: F'_{\mathbf{P}} \to \mathbf{P}$ определяет морфизм $F'_{\mathbf{P}} \underset{X}{\times} F'_{\mathbf{P}} \xrightarrow{p \times \mathrm{id}} \mathbf{P} \underset{X}{\times} F'_{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \underset{X}{\times} F$, база которого по следствию 4 допускает уплощающее разбиение. Взяв прообразы компонент обоих уплощающих разбиений относительно указанных морфизмов, мы получим два разбиения суперпространства $F \underset{X}{\times} F$. Далее, компоненты искомого разбиения определим как (схемные) пересечения компонент обоих разбиений. Нам остается занумеровать компоненты построенного разбиения элементами супергруппы Вейля ${}^{\mathrm{SL}}W$ и доказать утверждения а) и б) теоремы 2.

Фиксируем $w \in {}^{\mathrm{SL}}W$ и матрицу (d_{ij}), соответствующую w по комбинаторной лемме. Рассмотрим матрицу (d'_{ij}), полученную из (d_{ij}) вычеркиванием первой строки и вычитанием $\mathrm{rk}\,\tilde{\mathcal{P}}$ из d_{ij}, при $i > 2$ и вычеркиванием k-го столбца и вычитанием $\mathrm{rk}\,\tilde{\mathcal{P}}$ из d_{ij} при $j > k$, $k = w(1)$. Эта матрица удовлетворяет свойствам 2.2, а), и, следовательно, ей отвечает элемент w' супергруппы Вейля ${}^{\mathrm{SL}}W'$ супергруппы $\mathrm{SL}(m-1, n)$ или $\mathrm{SL}(m, n-1)$. По предположению индукции элементу w' соответствует компонента $Y'_{w'}$ уплощающего разбиения $F'_{\mathbf{P}} \underset{\mathbf{P}}{\times} F'_{\mathbf{P}}$. Возьмем также компоненту уплощающего разбиения суперсхемы $\mathbf{P} \underset{X}{\times} F$, соответствующую первой строке (d_{1j}), то есть компоненту Y_k. Тогда $\mathrm{rk}\,(\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_j)|_{Y_k} = 0|0$ при $j < k$ и $\mathrm{rk}\,(\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_j)|_{Y_k} \neq 0|0$ при $j \geqslant k$ (см.) доказательство предложения 3 и следствие 4). Компоненту Y_w уплощающего разбиения $F \underset{X}{\times} F$ определим как $Y_w = (\mathrm{id} \times q)^{-1} Y_{w'} \cap (p \times \mathrm{id})^{-1} Y_k$. Ясно, что по любой паре (w', k) можно построить w так, чтобы это соответствие было обратным к соответствию $w \mapsto (w', k)$, описанному выше. Чтобы доказать, что Y_w удовлетворяет условию а) теоремы 2, достаточно заметить, во-первых, что $g^*(\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j)$ являются локально прямыми локально свободными подпучками в $\mathcal{T}_S$ рангов d_{ij} (обозначения см. в условии теоремы) тогда и только тогда, когда $((\mathrm{id} \times q) \circ g)^*(\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j/\tilde{\mathcal{P}})$ являются локально прямыми локально свободными подпучками в $\mathcal{T}_S/((\mathrm{id} \times \tilde{q}) \circ g)^* \tilde{\mathcal{P}}$ рангов d'_{ij} и $(p \times \mathrm{id}) \circ g)^*(\tilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_j)$ являются локально прямыми локально сво-

бодными подпучками в $\mathcal{T}_S$ рангов $0|0$ при $j<k$ и $1|0$ или $0/1$ при $j\geqslant k$. Во-вторых, g проводится через вложение $Y_w\to\to F\underset{X}{\times}F$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{id}\times q)\circ g$ и $(p\times\mathrm{id})\circ g$ проводятся соответственно, через вложения $Y_{w'}\to F'_{\mathbf{P}}\underset{\mathbf{P}}{\times}F'_{\mathbf{P}}$ и $Y_k\to\mathbf{P}\underset{X}{\times}F$ — это следует из построения Y_w.

Докажем б). Общий слой проекции $p_2:F\underset{X}{\times}F\to F$ есть пространства полных флагов, которое можно представить в виде относительного пространства полных флагов, меньшей длины над проективным суперпространством. При этом каждая суперклетка Шуберта в $p_2^{-1}(x)$, $x\in F(\mathbf{C})$, является суперклеткой Шуберта относительного пространства полных флагов над суперклеткой Шуберта проективного суперпространства. Поэтому можно воспользоваться предложением 3 и индукцией.

II. Случаи $G=\mathrm{OSp}$, $\Pi\mathrm{Sp}$, Q. В этих случаях проходит то же доказательство, если изменить формулировки предложения 3 и следствия 4: при $G=\mathrm{OSp}$, $\Pi\mathrm{Sp}$ вместо проективного суперпространства $\mathbf{P}_X(1|0;\mathcal{T})$ необходимо рассматривать суперпространство $\mathbf{P}_X(1|0;\mathcal{T},b)$ изотропных относительно заданной формы $b:\mathcal{T}\to\mathcal{T}^*$ подпучков ранга $1|0$ в $\mathcal{T}$, а при $G=Q$ — суперграссманиан $G_X(1|1;\mathcal{T},p)$ p-симметричных подпучков ранга $1|1$ в $\mathcal{T}$, где $p:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ — заданная нечетная инволюция. Точную формулировку мы оставляем читателю. □

В классической геометрии разбиение пространства флагов F на клетки Шуберта есть не что иное как разбиение $F=G/B$ на B-орбиты, где G — соответствующая простая алгебраическая группа, а B — ее подгруппа Бореля. В нашем подходе это, очевидно, отвечает разбиению $F\times F$ на G-орбиты. (Действительно, фиксировав точку $x\in F(\mathbf{C})$ во втором сомножителе, мы фиксируем подгруппу B в G — стабилизатор этой точки. Следовательно, слоем G-орбиты Y над x является B-орбита в F.)

Следующая лемма показывает, что суперклетки Шуберта тоже являются G-орбитами в суперсхемном смысле.

6. Лемма о транзитивности. Пусть S — суперсхема, $TS=T\otimes\mathcal{O}S$. Пусть $\mathcal{P}'_\cdot$, $\mathcal{P}''_\cdot$ — два полных G-флага в TS ($G=\mathrm{SL}$, OSp, $\Pi\mathrm{Sp}$ или Q) со свойствами (см. определение 2.1): 1) $\mathcal{P}'_\cdot$ и $\mathcal{P}^\circ_\cdot$ правильно взаимно расположены, 2) тип их взаимного расположения равен (d_{ij}). Пусть $\tilde{\mathcal{P}}'_\cdot$, $\tilde{\mathcal{P}}''_\cdot$ — другая пара полных G-флагов с теми же свойствами (и тем же (d_{ij})), причем тип $\mathcal{P}'_\cdot$-тип $\tilde{\mathcal{P}}'_\cdot$, тип $\mathcal{P}''_\cdot$-тип $\tilde{\mathcal{P}}''_\cdot$ (см. определение 1.2). Тогда у каждой точки $s\in S$ есть аффинная окрестность $U=\mathrm{Spec}\,A$, такая, что существует элемент $g\in G(A)$, переводящий пару флагов $\mathcal{P}'_\cdot|_U$, $\mathcal{P}''_\cdot|_U$ в T_U в пару флагов $\tilde{\mathcal{P}}'_\cdot/u$, $\tilde{\mathcal{P}}''_\cdot|_U$.

Доказательство I. Случай $G=\mathrm{SL}$. Пусть $U=\mathrm{Spec}\,A$ — такая окрестность точки $s\in S$, что пучки $\mathcal{P}'_i|_U$, $\mathcal{P}'_j|_U$, $\tilde{\mathcal{P}}'_i|_U$, $\tilde{\mathcal{P}}''_j|_U$,

$(\mathcal{P}'_i \cap \mathcal{P}''_j)|_U$, $(\tilde{\mathcal{P}}'_i \cap \tilde{\mathcal{P}}''_j)|_U$ свободны и являются прямыми подпучками в T_U. Чтобы не усложнять обозначений, в дальнейшем символ $|_U$ мы будем опускать, а также будем отождествлять все пучки над U с их пространствами глобальных сечений над U.

Построим искомый элемент $g \in G(A)$ явно. Построение проведем по индукции относительно номера i полотнища флага $\mathcal{P}'_\cdot$. На $\mathcal{P}'_1$ зададим искомое отображение g так, чтобы $\mathcal{P}'_1 \mapsto \tilde{\mathcal{P}}'_1$ (это позволяет сделать совпадение типов флагов $\mathcal{P}'_\cdot$ и $\tilde{\mathcal{P}}'_\cdot$). При этом ограничение будущего отображения g на $\mathcal{P}'_1$ переводит $\mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}''_\cdot$ в $\tilde{\mathcal{P}}'_1 \cap \tilde{\mathcal{P}}''_\cdot$ (пересечение $\mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}_\cdot$ рассматривается как вырожденный флаг $\mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{P}'_1 \cap \mathcal{P}_{m+n-1}$), так как d_{1j} для пар флагов $\mathcal{P}'_\cdot$, $\mathcal{P}''_\cdot$ и $\tilde{\mathcal{P}}'_\cdot$, $\tilde{\mathcal{P}}''_\cdot$ одинаковы.

Пусть теперь отображение g построено на полотнище $\mathcal{P}'_k$ и переводит $\mathcal{P}_1' \subset \ldots \subset \mathcal{P}'_k$ в $\tilde{\mathcal{P}}'_1 \subset \ldots \subset \tilde{\mathcal{P}}'_k$ и $\mathcal{P}'_k \cap \mathcal{P}''_\cdot$ в $\tilde{\mathcal{P}}'_k \cap \tilde{\mathcal{P}}''_\cdot$. Построим продолжение g на $\mathcal{P}'_{k+1}$, удовлетворяющее этим свойствам для $k = k+1$.

Пусть j_0 — наименьшее из тех j, для которых $d_{k+1,\,j} \neq d_{kj}$. Возьмем в A-модуле $\mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_{j_0}$ элемент e_{k+1}, дополняющий $\mathcal{P}'_k \cap \mathcal{P}''_{j_0}$, и в A-модуле $\tilde{\mathcal{P}}'_{k+1} \cap \tilde{\mathcal{P}}''_{j_0}$ элемент $\tilde{e}_{k+1}$, дополняющий $\tilde{\mathcal{P}}'_k \cap \tilde{\mathcal{P}}''_{j_0}$ (подсчет размерностей показывает, что мы вправе это сделать). Зададим действие g на e_{k+1}: $ge_{k+1} = \tilde{e}_{k+1}$. Продолженное по линейности на $\mathcal{P}'_{k+1}$, g переводит $\mathcal{P}'_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}'_{k+1}$ в $\tilde{\mathcal{P}}'_1 \subset \cdot \ldots \subset \tilde{\mathcal{P}}'_{k+1}$.

Докажем, что $\mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_\cdot$ переходит под действием g на $\mathcal{P}'_{k+1}$ в $\tilde{\mathcal{P}}'_{k+1} \cap \tilde{\mathcal{P}}''_\cdot$. При $j < j_0$ из соображений размерности $\mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_j = \mathcal{P}'_k \cap \mathcal{P}''_j$ и $\tilde{\mathcal{P}}'_{k+1} \cap \tilde{\mathcal{P}}''_j = \tilde{\mathcal{P}}'_k \cap \tilde{\mathcal{P}}''_j$, и, следовательно, по предположению индукции, $g(\mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_j) = \tilde{\mathcal{P}}'_{k+1} \cap \tilde{\mathcal{P}}''_j$. $g(\mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_{j_0}) = \tilde{\mathcal{P}}'_{k+1} \cap \tilde{\mathcal{P}}''_{j_0}$ по построению. Наконец, при $j > j_0$

$$\mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_j = Ae_{k+1} \oplus (\mathcal{P}'_k \cap \mathcal{P}''_j), \tag{1}$$

причем элемент $e_{k+1} \in \mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_{j_0} \subset \mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_j$, но $e_{k+1} \notin \mathcal{P}'_k \supset \mathcal{P}'_k \cap \mathcal{P}''_j$. Из (1) $g(\mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_j) = A\tilde{e}_{k+1} \oplus \tilde{\mathcal{P}}'_k \cap \tilde{\mathcal{P}}''_j$, что по построению равно $\tilde{\mathcal{P}}''_{k+1} \cap \tilde{\mathcal{P}}''_j$.

Последний шаг индуктивного построения дает отображение g с требуемыми свойствами, за исключением $\operatorname{Ber} g = 1$. Этого можно добиться, подправив g, например, на последнем шаге: $\hat{g}(e_k) = (\operatorname{Ber} g)^{\pm 1} \cdot \tilde{e}_k$ (в показателе стоит -1, если e_k четно, и $+1$ — в противном случае).

II. Случаи $G = \mathrm{OSp}$, iSp. Индуктивное построение до $\left[\frac{m+n+1}{2}\right]$, где $m|n = \dim T$, то же самое, что и для $G = \mathrm{SL}$. Далее следует выбирать e_k и $\tilde{e}_k$ так, чтобы $b(e_k, e_{m+n+1-k}) =$

$=b(\tilde{e}_k, \tilde{e}_{m+n+1-k})=1$, $b(e_k, e_j)=b(\tilde{e}_k, \tilde{e}_j)=0$ для остальных j (b — соответствующая билинейная форма). После этого ясно, что элемент g, переводящий e_k в $\tilde{e}_k$ для всех k, принадлежит $G(A)$, так как сохраняет матрицу Грама билинейной формы. По построению g обладает требуемыми свойствами.

III. Случай $G=Q$. Построение то же, что в случае $G=SL$, только с каждым шагом индукции размерность пространства $\mathcal{P}'_k$, на котором определено g, увеличивается на $1|1$. Точнее, в дополнении к $\mathcal{P}'_k \cap \mathcal{P}''_{j_0}$ в $\mathcal{P}'_{k+1} \cap \mathcal{P}''_{j_0}$ выбираются сразу два элемента: четный, e_{k+1}, и нечетный, $p(e_{k+1})$ (то же для $\tilde{\mathcal{P}}$). Они отображаются в элементы $\tilde{e}_{k+1}$, $p(\tilde{e}_{k+1})$, соответственно, поэтому построенное $g \in Q(A)$, то есть $g \circ p = p \circ g$. □

§ 4. СУПЕРКЛЕТКИ ШУБЕРТА: РАЗМЕРНОСТЬ

1. Определение. Базисное отражение σ — это один из следующих элементов группы ${}^G W$:

а) $G=SL$: σ — перестановка соседей в $\{1, 2, \ldots, m+n\}$, $\sigma_i = (i, i+1)$;

б) $G=OSp$, ΠSp: σ — одновременная перестановка соседей в левой половине последовательности $\{1, 2, \ldots, m+n\}$ и зеркальных соседей — в правой, $\sigma_i=(i, i+1)(m+n+1-i, m+n-i)$, $i+1 \leqslant \left[\frac{m+n}{2}\right]$, или транспозиция $l=\left[\frac{m+n}{2}\right]$ с его зеркальным отражением, $\tau_l=(l, m+n+1-l)$;

в) $G=Q$: $\sigma_i=(i, i+1) \in S_m$.

2. Введем понятие супердлины элемента группы Вейля.

Определение. а) Пусть $I, J \in {}^G I_n$, $\sigma \in {}^G W$ — базисное отражение такое, что $J=\sigma(I)$. Тогда если $\sigma=\sigma_i$, то

$$l_{IJ}(\sigma)=\begin{cases} 1|0, & \text{если } I=J,\ G=SL,\ OSp,\ \Pi Sp, \\ 0|1, & \text{если } I\neq J,\ G=SL,\ OSp,\ \Pi Sp, \\ 1|1, & \text{если } G=Q, \end{cases}$$

если $\sigma=\tau_l$, то

$$l_{IJ}(\sigma)=\begin{cases} 1|0, & \text{если } \delta_l(J)=1 \,|\, 0,\ G=OSp(2r+1, 2s), \\ 1|1, & \text{если } \delta_l(J)=0 \,|\, 1,\ G=OSp(2r+1, 2s), \\ 0|0, & \text{если } \delta_l(J)=1 \,|\, 0,\ G=OSp(2r, 2s), \\ 1|0, & \text{если } \delta_l(J)=0 \,|\, 1,\ G=OSp(2r, 2s), \\ 0|1, & \text{если } \delta_l(J)=1 \,|\, 0,\ G=\Pi Sp(m), \\ 0|0, & \text{если } \delta_l(J)=0 \,|\, 1,\ G=\Pi Sp(m). \end{cases}$$

б) В тех же условиях пусть $w=\sigma^k \ldots \sigma^1 \in {}^G W$ — приведенное разложение в базисные отражения (то есть число k базисных отражений, составляющих w, минимально), $J=w(I)$. Положим $I_i=\sigma^i \ldots \sigma^1(I)$, тогда *супердлиной* $l_{IJ}(w)$ назовем пару чисел

$$l_{IJ}(w) := \sum_{i=0}^{k-1} l_{I_i, I_{i+1}}(\sigma^{i+1}),$$

а *длиной* — число k.

3. Теорема. Для $J = w(I)$

$$\dim Y_w \cap (F_I \times F_J) = l_{IJ}(w) + \dim F_I.$$

Замечание. Можно проверить, пользуясь индукцией по $m+n$ и формулами для размерности G-грассманианов (ср. [8, теорема 5.6.3]), что

$$\dim^G F_I = \begin{cases} \left(\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \,\middle|\, mn\right), & G = \mathrm{SL}(m, n), \\ (r^2 + s^2 \mid s(2r+1)), & G = \mathrm{OSp}(2r+1, 2s), \\ (r(r-1) + s^2 \mid 2rs), & G = \mathrm{OSp}(2r, 2s), \\ \left(\frac{m(m+1)}{2} \,\middle|\, \frac{m(m+1)}{2}\right), & G = \mathrm{Q}(m), \end{cases}$$

и не зависит от I, а

$$\dim^G F_I = \left(rs + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \,\middle|\, \frac{(r+1)r}{2} + \frac{s(s-1)}{2} + rs\right),$$
$$G = \Pi\mathrm{Sp}(m),$$

где $r \mid s = d_m(I)$ — размерность максимального изотропного полотнища во флаге типа I, $r+s=m$.

Прежде чем доказывать теорему, сформулируем два следствия.

4. Следствие. Супердлина $l_{IJ}(w)$ не зависит от выбора приведенного разложения $w = \sigma^k \ldots \sigma^1$. □

5. Следствие. Справедлива формула

$$l_{IJ}(w) + \dim F_I = l_{JI}(w^{-1}) + \dim F_J.$$

Доказательство. $Y_w \cap (F_I \times F_J) \simeq Y_{w^{-1}} \cap (F_J \times F_I)$. Это следует из определения пространств Y_w — изоморфизм устанавливается перестановкой сомножителей произведения $F_I \times \times F_J$. □

6. Доказательство теоремы проведем методом индукции относительно длины k элемента $w = \sigma^k \ldots \sigma^1$ группы Вейля. Обозначим тавтологические флаги на первом и втором сомножителях $F_I \times F_J$ через $\mathcal{F}'_{I,\cdot}$ и $\mathcal{F}''_{J,\cdot}$, соответственно.

Пусть $k=0$, то есть $w=e$, $J=I$, $l_{II}(e) = 0 \mid 0$, и достаточно доказать, что $Y_e \cap (F_I \times F_I) \simeq F_I$. На самом деле, Y_e — это диагональ Δ в $F \times F$. Действительно, согласно п. 2.5, а), $d_{ij,e,II} = d_{\min(i,j)}(I)$. С другой стороны, $(\mathcal{F}'_{I,i} \cap \mathcal{F}''_{I,j})|_\Delta = \mathcal{F}'_{I,\min(i,j)}|_\Delta$, значит, эти пучки являются локально свободными локально прямыми подпучками в T_Δ рангов $d_{\min(i,j)}(I)$. Поэтому, если $g: S \to F \times F$ — морфизм суперсхем, который проводится через $\Delta \hookrightarrow F \times F$, то все $g^*(\mathcal{F}'_{I,i} \cap \mathcal{F}''_{I,j})$ — локально прямые ло-

кально свободные подпучки в T_S рангов $d_{ij,e,II}$. Обратно, если все $g^*(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{I,j})$ локально свободны рангов $d_{ij,e,II}$, то $\operatorname{rk} g^*(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{I,j})=d_i(I)$ для всех i и I, то есть $g^*(\mathcal{P}'_{I,i})=$ $=g^*(\mathcal{P}''_{I,i})$. Ясно, что в этом случае g проводится через $\Delta\hookrightarrow F\times F$.

Перейдем к проведению шага индукции. Пусть формула размерности верна для любого $w=\sigma^k\ldots\sigma^1$ (разложение в базисные элементы является приведенным). Докажем нашу формулу для элементов супергруппы Вейля длины $k+1: w=$ $=\sigma^{k+1}\sigma^k\ldots\sigma^1$. Положим $w_0=\sigma^k\ldots\sigma^1$, $J_0=w_0(I)$. В доказательстве нам понадобится следующая лемма.

7. Лемма. 1) Пусть $\sigma^{k+1}=\sigma_q$ — базисное отражение. Тогда $w_0^{-1}(q)<w_0^{-1}(q+1)$.

2) Пусть $\sigma^{k+1}=\tau_l$, $l=\left[\frac{m+n}{2}\right]$. Тогда $w_0^{-1}(l)<w_0^{-1}(m+n+$ $+1-l)$.

Для доказательства леммы заметим, что каждая из введенных нами супергрупп Вейля изоморфна классической группе Вейля, причем базисные отражения соответствуют отражениям относительно элементов некоторой системы простых корней. Поэтому лемма 7 есть переформулировка в терминах перестановок следующей классической леммы.

7′. Лемма (см. [1], [20]). Пусть w — элемент классической группы Вейля типа A, B или C, γ — положительный корень. Тогда если $l(w)=l(\sigma_\gamma w)-1$, где l — длина, то $w^{-1}(\gamma)$ — положительный корень.

Введем новые обозначения: если $\sigma^{k+1}=\sigma_q$, то $a=w_0^{-1}(q)$, $b=w_0^{-1}(q+1)$, и если $\sigma^{k+1}=\tau_l$, то $a=w_0^{-1}(l)$, $b=w_0^{-1}(m+n+$ $+1-l)$. По лемме 7, $a<b$.

I. Случай $\sigma^{k+1}=\sigma_q$. Сравним матрицы $(d_{ij,w,IJ})$ и (d_{ij,w_0,IJ_0}).

8. Лемма. $d_{iq,w,IJ}=d_{iq,w_0,IJ_0}+\delta_{q+1}(J_0)-\delta_q(J_0)$ при $i\geqslant b$,

$$d_{iq,w,IJ}=d_{iq,w_0,IJ_0}-\delta_q(J_0) \text{ при } a\leqslant i<b,$$

симметричные соотношения при $G=\mathrm{OSp}$ или $\Pi\mathrm{Sp}$,

$$d_{ij,w,IJ}=d_{ij,w_0,IJ_0} \text{ при остальных } i,\ j.$$

Доказательство мгновенно следует из определения $d_{ij,w,IJ}$ (см. п. 2.5, а)).

Таким образом, имеют место формулы

$$\operatorname{rk}(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J,q})|_{Y_w}=\operatorname{rk}(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}_{J_0,q})|_{Y_{w_0}}-$$
$$-\delta_q(J_0)+\delta_{q+1}(J_0) \text{ при } i\geqslant b, \tag{1}$$

$$\operatorname{rk}(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J,q})|_{Y_w}=\operatorname{rk}(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J_0,q})|_{Y_{w_0}}-\delta_q(J_0) \quad \text{при} \quad a\leqslant i<b$$

симметричные соотношения для $G=\mathrm{OSp}$, $\Pi\mathrm{Sp}$,

$$\mathrm{rk}\left(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J,j}\right)|_{Y_w}=\mathrm{rk}\left(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J_0,j}\right)|_{Y_{w_0}}$$

при остальных i, j.

Рассмотрим естественные проекции $F_{J_0}\to\tilde{F}$ и $F_J\to\tilde{F}$ на суперпространство $\tilde{F}$ неполных G-флагов — забывание q-ого полотнища $\mathcal{P}''_{J_0,q}$ и $\mathcal{P}''_{J,q}$ и двойственного полотнища в случаях $G=\mathrm{OSp}$, $\Pi\mathrm{Sp}$. Формулы (1) показывают, что проекции супермногообразий Y_{w_0} и Y_w при $p_0:F_I\times F_{J_0}\to F_I\times\tilde{F}$ и $p:F_I\times F_J\to F_I\times\tilde{F}$ совпадают: $p_0(Y_{w_0})=p(Y_w)=Y$. (Напомним, что разбиение на Y_w определялось как уплощающее разбиение для системы пучков $\{\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J,j}\}$; очевидно, что проекции Y_w на $F_I\times\tilde{F}$ составляют уплощающее разбиение для $\{\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{\tilde{J},j}\}$, где $\mathcal{P}''_{\tilde{J},\cdot}$ — тавтологический флаг на $\tilde{F}$, $p_0^*\mathcal{P}''_{\tilde{J},j}=\mathcal{P}''_{J_0,j}$, $p^*\mathcal{P}''_{\tilde{J},j}=\mathcal{P}''_{J,j}$, $j\neq q$.) На самом деле, Y_{w_0} изоморфно проецируется на Y, а Y_w является большой клеткой относительного проективного суперпространства размерности $l_{J_0J}(\sigma^{k+1})$ над Y (для $G=\mathrm{Q}$ — суперграссманиана p-симметричных $1|1$-мерных плоскостей в $2|2$-мерном суперпространстве с нечетной инволюцией p). Это опять же следует из свойств матриц (d_{ij}) и формул (1), переписанных в виде

$$\mathrm{rk}\left(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J_0,q}/\mathcal{P}''_{J_0,q-1}\right)|_{Y_{w_0}}=\begin{cases}0|0 & \text{при } i<a,\\ \delta_q(J_0) & \text{при } i\geqslant a,\end{cases}\tag{2}$$

$$\mathrm{rk}\left(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J_0,q+1}/\mathcal{P}''_{J_0,q-1}\right)|_{Y_{w_0}}=\begin{cases}0|0 & \text{при } i<a,\\ \delta_q(J_0) & \text{при } a\leqslant i<b,\\ \delta_q(J_0)+\delta_{q+1}(J_0) & \text{при } i\geqslant b,\end{cases}\tag{3}$$

$$\mathrm{rk}\left(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J,q}/\mathcal{P}''_{J,q-1}\right)|_{Y_w}=\begin{cases}0|0 & \text{при } i<b,\\ \delta_{q+1}(J_0) & \text{при } i\geqslant b,\end{cases}\tag{4}$$

$$\mathrm{rk}\left(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J,q+1}/\mathcal{P}''_{J,q-1}\right)|_{Y_w}=\mathrm{rk}\left(\mathcal{P}'_{I,i}\cap\mathcal{P}''_{J_0,q+1}/\mathcal{P}''_{J_0,q-1}\right)|_{Y_{w_0}}$$
$$\text{при всех } i.\tag{5}$$

Действительно, формула (2) влечет

$$\mathcal{P}''_{J_0,q}/\mathcal{P}''_{J_0,q-1}|_{Y_{w_0}}\subset\mathcal{P}'_{I,a}\cap\mathcal{P}''_{J_0,q+1}/\mathcal{P}''_{J_0,q-1}|_{Y_{w_0}},$$

откуда, согласно (3), последнее включение обращается в равенство. Это означает, что тавтологический пучок $\mathcal{P}''_{J_0,q}/\mathcal{P}''_{J_0,q-1}$ суперпространства Y_{w_0} над Y совпадает с пучком $\mathcal{P}'_{I,a}\cap\cap\mathcal{P}''_{J_0,q+1}/\mathcal{P}''_{J_0,q-1}$, поднятым с Y, поэтому $\dim Y_w-\dim Y=0|0$. Аналогично, формулы (4), (5) и (3) позволяют заключить, что тавтологический пучок $\mathcal{P}''_{J,q}/\mathcal{P}''_{J,q-1}$ ранга $\delta_{q+1}(J_0)$ суперпространства Y_w над Y должен быть вложен в пучок $\mathcal{P}'_{I,b}\cap\mathcal{P}''_{J,q+1}/\mathcal{P}''_{J,q-1}$ ранга $\delta_q(J_0)+\delta_{q+1}(J_0)$, поднятый с Y, и не должен пересекаться

с пучком $\mathcal{P}'_{I,b-1} \cap \mathcal{P}''_{J,q+1} / \mathcal{P}''_{J,q-1}$ ранга $\delta_q(J_0)$, также поднятым с Y. Таким образом, $\dim Y_w - \dim Y_{w_0} = \dim Y_w - \dim Y = l_{J_0 J}(\sigma^{k+1})$ и, наконец, $\dim Y_w = l_{IJ}(w) + \dim F_I$ по предположению индукции.

II. Случай $\sigma^{k+1} = \tau_l$. Рассмотрим естественные проекции $F_{J_0} \to \tilde{F}$ и $F_J \to \tilde{F}$ на суперпространство $\tilde{F}$ неполных G-флагов — забывание l-ого полотнища $\mathcal{P}''_{J_0,l}$ и $\mathcal{P}''_{J,l}$, соответственно, и двойственного полотнища в случае $G = \mathrm{OSp}(2r+1, 2s)$ (это единственная супергруппа G, для которой двойственное к $\mathcal{P}''_{J_0,l}$ полотнище не совпадает с $\mathcal{P}''_{J_0,l}$). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что проекции супермногообразий Y_{w_0} и Y_w при $p_0: F_I \times F_{J_0} \to F_I \times \tilde{F}$ и $p: F_I \times F_J \to F_I \times \tilde{F}$ совпадают $(p_0(Y_{w_0}) = p(Y_w) = Y)$ и что $\dim Y_{w_0} = \dim Y$, а Y_w является большой клеткой относительного (над Y) проективного суперпространства $\mathbf{P}(\delta_l(J); \delta_l(J) + \delta_{l+1}(J) + \delta_{l+2}(J), b)$ при $G = \mathrm{OSp}(2r+1, 2s)$ и $\mathbf{P}(\delta_l(J); \delta_l(J) + \sigma_{l+1}(J), b)$ при остальных G. Здесь $\mathbf{P}(x; y, b)$ означает суперпространство x-мерных изотропных относительно формы b прямых в y-мерном суперпространстве. Относительная размерность такого суперпространства дана в следующей таблице (табл. 1) (ср. [8, теорема 5.6.3]).

Таблица 1

Группа	Проективное суперпространство	Размерность проективного суперпространства
$\mathrm{OSp}(2r+1, 2s)$	$\mathbf{P}(1\|0; 3\|0, b)$ $\mathbf{P}(0\|1; 1\|2, b)$	$1\|0$ $1\|1$
$\mathrm{OSp}(2r, 2s)$	$\mathbf{P}(1\|0; 2\|0, b)$ $\mathbf{P}(0\|1; 0\|2, b)$	$0\|0$ $1\|0$
$\Pi\mathrm{Sp}(m)$	$\mathbf{P}(1\|0; 1\|1, b)$ $\mathbf{P}(0\|1; 1\|1, b)$	$0\|1$ $0\|0$

Эта размерность совпадает с $l_{J_0 J}(\sigma^{k+1})$, и по предположению индукции $\dim Y_w = l_{IJ}(w) + \dim F_I$. □

§ 5. СТРОЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

Список известных однородных пространств комплексной простой алгебраической супергруппы G, начинающийся с рассмотренных выше пространств полных G-флагов, можно про-

должить, включив в него пространства неполных G-флагов, в том числе суперграссманианы. В чисто четной ситуации этим исчерпываются однородные пространства, если определять их как полные факторпространства группы G по замкнутым подгруппам. В суперслучае таких однородных пространств больше, чем флаговых, и их строение описывается следующим простым предложением.

Предложение. Пусть G — комплексная алгебраическая супергруппа, подложка G_{red} которой редуктивна. Пусть G действует транзитивно (в суперсхемном смысле — см. п. 3.6 или [6, п. 4.1.17]) на некоторой суперсхеме X, а P является стационарной подгруппой замкнутой точки X (в этом случае мы пишем $X=G/P$). Многообразие X_{red} полно тогда и только тогда, когда подгруппа P_{red} в G_{red} — параболическая. Строение параболических подгрупп редуктивных групп описано в [15] (ср. [13]). □

В классической геометрии можно эквивалентным образом определять однородные пространства как факторпространства по параболическим подгруппам, т. е. замкнутым подгруппам, содержащим подгруппу Бореля. Настоящий параграф посвящен изучению супераналогов параболических подгрупп. Из наших результатов следует, что все они являются стационарными подгруппами неполных G-флагов. В качестве приложения можно получить такое утверждение (см. [11]): отражение обратимого пучка на пространстве G-флагов относительно нечетного корня, используемое в доказательстве суперварианта теоремы Бореля—Вейля—Ботта, переводит этот пучок в обратимый опять же на пространстве G-флагов.

1. Борелевские и параболические подгруппы. Назовем *борелевской подгруппой* в простой алгебраической супергруппе G типа SL OSp, ПSp или Q стабилизатор полного G-флага в пространстве стандартного представления T. Во всех случаях, кроме Q, всякая подгруппа Бореля реализуется, очевидно, как подгруппа верхних треугольных матриц $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$ в $G \hookleftarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(T)$. Для $G=\mathrm{Q}$ подгруппа Бореля реализуется как подгруппа в $G \hookleftarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(T)$ следующего вида:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \ddots & * & * & \ddots & * \\ 0 & \ddots & * & 0 & \ddots & * \\ \hline * & \ddots & * & * & \ddots & * \\ 0 & \ddots & * & 0 & \ddots & * \end{array}\right)$$

(разбиение на блоки — по четности). *Параболической подгруппой* в G мы назовем замкнутую подгруппу, содержащую некоторую борелевскую. Ниже мы дадим описание таких подгрупп (при $G \neq \Pi\mathrm{Sp}$ и еще при некоторых менее существенных ограничениях) в терминах систем корней: борелевских под-

групп — в пп. 5,8 и параболических — в пп. 6,8. Но прежде чем более основательно заниматься корнями, нам необходимо подготовить для этого почву.

2. Системы корней. Начиная с этого пункта и кончая п. 7, $\mathfrak{g}$ — классическая супералгебра Ли над $\mathbf{C}$ типа $A(m,n)$, $m\neq n$, $m,n\geqslant 0$, $B(m,n)$, $m\geqslant 0$, $n>0$, $C(n)$, $n\geqslant 2$, $D(m,n)$, $m\geqslant 2$, $n>0$, $D(2,1;\alpha)$, $F(4)$ или $G(3)$. (Тип $A(m,n)$ соответствует супералгебре Ли $\mathfrak{sl}(m+1,n+1)$, $B(m,n)$ — $\mathfrak{osp}(2m+1,2n)$, $C(n)$ — $\mathfrak{osp}(2,2n-2)$, $D(m,n)$ — $\mathfrak{osp}(2m,2n)$, типы $D(2,1;\alpha)$, $F(4)$ и $G(3)$ — исключительные, тип $Q(n)$, соответствующий супералгебре Ли $\mathfrak{q}(n+1)$, будет рассмотрен в п. 8) Если фиксировать подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ разложится на корневые подпространства (см. [16, 2.5.3]): $\mathfrak{g}=\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$, где Δ — система корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это разложение обладает следующими свойствами.

Предложение (В. Г. Кац, [16, предложение 2.5.5]).

(*а*) $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$;

(*в*) $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$ $\forall\alpha\neq 0$;

(*с*) на $\mathfrak{g}$ существует ровно одна, с точностью до множителя, невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма $(\ ,\ )$;

(*d*) (1) $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}\Leftrightarrow\alpha,\beta,\ \alpha+\beta\in\Delta,\ \alpha+\beta\neq 0$;

(2) $(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta)=0$ $\forall\alpha\neq-\beta$;

(3) форма $(\ ,\ )$ определяет невырожденное спаривание $\mathfrak{g}_\alpha$ с $\mathfrak{g}_{-\alpha}$;

(4) форма $(\ ,\ )$ невырождена на $\mathfrak{h}$;

(5) $[e_\alpha,\ e_{-\alpha}]=(e_\alpha,\ e_{-\alpha})h_\alpha$, где $h_\alpha\neq 0$ определен формулой $(h_\alpha,h)=\alpha(h)$, $h\in\mathfrak{h}$, $e_{\pm\alpha}\in\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$;

(6) $\alpha\in\Delta\Rightarrow-\alpha\in\Delta$. □

3. Системы простых корней и положительные корни.

Определение (В. Г. Кац, [16, п. 2.5.4]). Подмножество $\Pi=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}\subset\Delta$ называется системой простых корней, если существуют векторы $e_i\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_i\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$, $h_i\in\mathfrak{h}$, для которых $[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i$, векторы e_i и f_i, $i=1,\ldots,r$, порождают $\mathfrak{g}$, и Π минимально с такими свойствами.

Как показывают примеры, для всех классических супералгебр Ли, кроме $A(m,n)$, система корней $\Delta\setminus\{0\}$ не является абстрактной системой комплексных корней. Тем не менее, предложение 2 и следующее предложение дают нам набор свойств системы корней, достаточный для перенесения на суперслучай классического доказательства основного результата (см. [13, гл. VIII, § 3, п. 4]).

Предложение. Система простых корней Π обладает следующими свойствами:

1) Π — базис векторного пространства $\mathfrak{h}^*$;

2) все корни $\beta\in\Delta$ записываются в виде линейных комбинаций $\beta=\sum\limits_{\alpha\in\Pi} m_\alpha\cdot\alpha$ с целыми коэффициентами m_α, имеющими один и тот же знак (т. е. все $m_\alpha\geqslant 0$ или все $m_\alpha\leqslant 0$).

Доказательство. Начнем с 2).

2) Поскольку e_i и f_i, $i=1, \ldots, r$, порождают $\mathfrak{g}$, всякий элемент $g\in\mathfrak{g}_\beta$, $g\neq 0$, записывается в виде $g=\Sigma c_j\sigma_j(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r)$, где σ_j — коммутатор элементов из Π. Из свойства $[e_i, f_j]=\delta_{ij}h_i$ и равенств $[h_j, e_i]=\alpha_i(h_j)e_i$, $[h_j, f_i]=-\alpha_i(h_j)f_i$, $[h_i, h_j]=0$ следует, что $g=\Sigma d_j\delta_j(e_1, \ldots, e_r)+\Sigma d'_k\delta'_k(f_1, \ldots, f_r)+$ $+\Sigma a_ih_i$, где δ_j и δ'_k — коммутаторы элементов $e_1, \ldots, e_r$ и $f_1, \ldots, f_r$, соответственно. При $g\in\mathfrak{g}_\beta$, $\beta\neq 0$, $\dim\mathfrak{g}_\beta=1$ из предложения 1 (b), поэтому $g=a\delta_j(e_1, \ldots, e_r)$ или $a\delta'_k(f_1, \ldots, f_r)$ для некоторого δ_j и δ'_k. Отсюда $\beta=\sum\limits_{i=1}^{r} m_i\alpha_i$, где m_i — степень монома δ_j по e_i (или δ'_k по f_i), то есть $m_i\in\mathbf{Z}$ и все $m_i\geqslant 0$ (или $\leqslant 0$).

1) Линейная независимость элементов из Π становится очевидной, если посмотреть на системы простых корней, выписанные в работе В. Г. Каца [16, п. 2.5.4.]

Множество Π порождает $\mathfrak{h}^*$ как векторное пространство над $\mathbf{C}$. Действительно, для всякого $\alpha\in\mathfrak{h}^*$ можно взять h_α, определенный равенством $(h_\alpha, h)=\alpha(h)$, $h\in\mathfrak{h}$, а из того, что $\mathfrak{g}$ порождается элементами $e_1, \ldots, e_r$ и $f_1, \ldots, f_r$, следует, что $h_\alpha=\sum\limits_{i=1}^{r} c_ih_i$. Из равенств $h_i=[e_i, f_i]=(e_i, f_i)h_{\alpha_i}$, где $(h_{\alpha_i}, h)=$ $=\alpha_i(h)$ при всех $h\in\mathfrak{h}$ (предложение 2, (d), (5)), вытекает, что $h_\alpha=\sum\limits_{i=1}^{r} c_i\cdot(e_i, f_i)h_{\alpha_i}$, откуда $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{r} c_i\cdot(e_i, f_i)\alpha_i$, что и требовалось. $\square$

Определим *множество положительных корней* Δ^+ как множество ненулевых линейных комбинаций простых корней с неотрицательными целыми коэффициентами: $\Delta^+=(\Delta\cap\mathbf{Z}_+\Pi)\setminus$ $\setminus\{0\}$. Симметрично определим $\Delta^-:\Delta^-=(\Delta\cap(-\mathbf{Z}_+)\Pi)\setminus\{0\}$. Тогда, согласно предложению 3, $\Delta=\Delta^+\cup\Delta^-\cup\{0\}$, $\Delta^+\cap\Delta^-=\varnothing$.

4. Неразложимые и простые корни.

Определение. Назовем корень $\alpha\in\Delta^+$ разложимым, если $\exists\beta, \gamma\in\Delta^+:\alpha=\beta+\gamma$; в противном случае мы будем говорить, что α — неразложимый корень.

Лемма. Множество неразложимых корней совпадает с множеством простых корней Π.

Доказательство. 1) Каждый элемент $\alpha_j\in\Pi$ неразложим, так как если $\alpha_j=\beta+\gamma$, $\beta=\Sigma b_i\alpha_i$, $\gamma=\Sigma c_i\alpha_i$, $b_i\geqslant 0$, $c_i\geqslant 0$,

$\alpha_i \in \Pi$, то $\alpha_j = \Sigma(b_i + c_i)\alpha_i$, откуда из линейной независимости простых корней получаем: $b_i + c_i = 0$ $\forall i \neq j$, $b_j + c_j = 1$. Из неотрицательности и целочисленности коэффициентов b_k, c_k следует, что $\beta = 0$ или $\gamma = 0$, что противоречит предположению $\beta, \gamma \in \Delta^+$.

2) Пусть $\alpha \in \Delta^+$, $\alpha \notin \Pi$. Докажем, что α разложим. Действительно, возьмем ненулевой вектор $g \in \mathfrak{g}_\alpha$. Тогда $g = x \cdot \delta(e_1, \ldots, e_r)$ по определению множества Π (здесь $x \in \mathbf{C}$, $\delta(e_1, \ldots, e_r)$ — некоторый коммутатор элементов $e_1, \ldots, e_r$, участвующих в определении системы простых корней). Поскольку $\alpha \notin \Pi$, $\delta(e_1, \ldots, e_r) = [\delta_1(e_1, \ldots, e_r), \delta_2(e_1, \ldots, e_r)]$ для некоторых коммутаторов δ_1 и δ_2. Из свойства $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\beta+\gamma}$ следует, что $\alpha = \beta + \gamma$, где β и γ таковы, что $\delta_1(e_1, \ldots, e_r) \in \mathfrak{g}_\beta$, $\delta_2(e_1, \ldots, e_r) \in \mathfrak{g}_\gamma$ и, следовательно, $\beta, \gamma \in \Delta^+$. □

5. Борелевские подалгебры и борелевские подгруппы Назовем *борелевской подалгеброй* в классической супералгебре Ли $\mathfrak{g}$ подалгебру $\mathfrak{b} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \cup \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha$. *Параболической* мы назовем любую подалгебру в $\mathfrak{g}$, содержащую $\mathfrak{b}$.

Пусть G — комплексная алгебраическая супергруппа типа $SL(m, n)$, $m \neq n$, $OSp(m, n)$, G^0 — ее компонента единицы ($G^0 = G$ всегда, кроме $G = OSp(2r, 2s)$), $\mathfrak{g}$ — соответствующая супералгебра Ли.

Предложение (И. А. Скорняков, ср. Кац [17]). При естественном взаимно однозначном соответствии между подалгебрами в $\mathfrak{g}$ и замкнутыми подгруппами в G^0 борелевским подалгебрам взаимно однозначно соответствуют борелевские подгруппы в смысле п. 1, а параболическим подалгебрам — параболические подгруппы.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{b}$ — борелевская подалгебра в $\mathfrak{g}$, соответствующая множеству положительных корней Δ^+. Для супералгебры Ли $\mathfrak{b}$ справедлив более полный аналог теоремы Ли, чем для произвольной разрешимой супералгебры Ли. А именно, всякое конечномерное неприводимое представление $\mathfrak{b}$ одномерно. Действительно, всякий старший вектор произвольного конечномерного представления супералгебры Ли $\mathfrak{b}$ является собственным, и, значит, всякое конечномерное неприводимое представление $\mathfrak{b}$ одномерно. Применяя последовательно это утверждение к ограничению на $\mathfrak{b}$ стандартного представления T супералгебры $\mathfrak{g}$ и его факторпредставлениям, мы получим, что $\mathfrak{b}$ оставляет инвариантным некоторый полный SL-флаг f в T. В случае $G = SL$ это означает, что замкнутая подгруппа B в G, супералгебра Ли которой есть $\mathfrak{b}$, лежит в стабилизаторе $St_G(f)$ этого флага, то есть в борелевской подгруппе. На самом деле $B = St_G(f)$, иначе среди корней супералгебры Ли супергруппы $St_G(f)$ содержатся корни α и $-\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Delta \setminus \{0\}$. А то, что этого быть не может, легко усмотреть, например, в матричной реализации.

В случае $G=\mathrm{OSp}$ нужно несколько иначе применять аналог теоремы Ли для $\mathfrak{b}$. Для этого заметим, что каждый весовой вектор в стандартном представлении супералгебры $\mathfrak{g}$ изотропен (как, впрочем, и во всяком подфакторе ограничения этого представления на супералгебру $\mathfrak{b}$). Действительно, все веса стандартного представления ненулевые, и если $v\in T$ — вектор веса α, то $0=b(hv, v)+b(v, hv)=2\alpha(h)b(v, v)$ для всех $h\in\mathfrak{h}$, откуда $b(v, v)=0$ (b — структурная симметрическая билинейная $\mathfrak{g}$-инвариантная форма в T), то есть v изотропен. Полный G-флаг в T, инвариантный относительно $\mathfrak{b}$, мы будем строить по индукции, взяв сначала $\mathfrak{b}$-инвариантное одномерное весовое подпространство V (как мы только что показали, оно изотропно) и рассмотрев подфактор $V^{\perp}/V$ представления T супералгебры $\mathfrak{b}$, где $V^{\perp}$ — ортогональное дополнение к V относительно формы b. Потом то же рассуждение мы применим к $V^{\perp}/V$ и т. д. В конце концов получится полный изотропный флаг в T: $f=\{0\subset U\subset\ldots\subset V^{\perp}\subset T\}$. Аналогично случаю $G=\mathrm{SL}$, соответствующая $\mathfrak{b}$ замкнутая подгруппа B в G^0 совпадает с подгруппой $St_{G^0}(f)$, *то есть с борелевской подгруппой.*

2) Пусть B — борелевская подгруппа в G^0. Как уже отмечалось выше, если α — корень ее супералгебры Ли $\mathfrak{b}$, то $-\alpha$ не является корнем $\mathfrak{b}$. Поэтому если через Δ^+ обозначить систему ненулевых корней супералгебры $\mathfrak{b}$, через Δ^- — дополнение к $\Delta^+\cup\{0\}$ до системы корней Δ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то $\Delta^+=-\Delta^-$, $\Delta=\Delta^+\cup\Delta^-\cup\{0\}$. Пусть $\Pi=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ — множество неразложимых элементов Δ^+. Докажем, что Π — система простых корней в смысле определения 3. Выберем ненулевые векторы $e_i\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_i\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ и положим $h_i:=[e_i, f_i]$, что принадлежит $\mathfrak{h}$ согласно предложению 2, (d), (5). Кроме того, при $i\neq j$ $[e_i, f_j]=0$, иначе $\alpha_i-\alpha_j=\beta\in\Delta\setminus\{0\}$, а это противоречит неразложимости α_i и α_j. Очевидно, векторы e_i порождают подалгебру $\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha$; симметрично, векторы f_i порождают подалгебру $\bigoplus_{\alpha\in\Delta^-}\mathfrak{g}_\alpha$. Векторы h_i порождают пространство $\mathfrak{h}$, так как Π порождает $\mathfrak{h}^*$, а в силу предложения 2, (d), (5) векторы h_i с точностью до множителя двойственны относительно формы $(\,,\,)$ корням α_i. Таким образом, все e_i, f_i порождают $\mathfrak{g}$. Наконец, Π минимально среди множеств с такими свойствами, так как минимальное подмножество $\Pi'\subseteq\Pi$ является системой простых корней и соответствующая подалгебра Бореля $\mathfrak{b}'$ содержится в $\mathfrak{b}$. Но в первой части доказательства мы показали, что в этой ситуации $\mathfrak{b}'\subset\mathfrak{b}$ влечет $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}$, откуда $\Pi'=\Pi$. Итак Π — система простых корней и супералгебра Ли $\mathfrak{b}$ является подалгеброй Бореля.

3) Утверждение о параболических подгруппах и подалгебрах тривиально следует из утверждения о борелевских. □

6. Теорема. Пусть $\mathfrak{g}$ — классическая супералгебра Ли, $\mathfrak{b}$ — ее подалгебра Бореля, Π — система простых корней. Тогда

для любой параболической подалгебры $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{b}$ существует подмножество $I\subset\Pi$ такое, что $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_I^-}\mathfrak{g}_\alpha\right)$, где Δ_I^- — подмножество множества Δ^- отрицательных корней, порожденное I как полугруппа.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{b}$ — абелева подалгебра $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}=\bigoplus_{\alpha\in A}\mathfrak{g}_\alpha$ для некоторого подмножества $A\subset\Delta$. Нам нужно показать, что $A=\Delta^+\cup\{0\}\cup\Delta_I^-$ для некоторого $I\subset\Pi$.

В качестве I возьмем множество всех простых корней, появляющихся в разложении корней из $A\cap\Delta^-$ в сумму простых корней. Докажем, что $I\subset A$. Пусть $\alpha\in A\cap\Delta^-$ и $-\alpha$ разложим, т. е. для некоторых $\beta,\gamma\in\Delta^+$ $-\alpha=\beta+\gamma$. В таком случае $-\beta,-\gamma\in A\cap\Delta^-$, так как $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{-\gamma}$ и $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\gamma]=\mathfrak{g}_{-\beta}$ по предложению 2, (*d*), (1), а так как $\beta,\gamma\in\Delta^+\subset A$, то $-\beta,-\gamma\in A$. По индукции получаем, что $I\subset A$. Отсюда следует, что $\Delta_I^-\subset A$. По определению множества I $A\cap\Delta^-\subset\Delta_I^-$, поэтому $A=\Delta^+\cup\{0\}\cup\cup\Delta_I^-$. □

7. Следствие (И. А. Скорняков). Все связные параболические подгруппы в G являются стабилизаторами G-флагов в T (G имеет тип SL или OSp).

Доказательство. Пусть B — связная борелевская подгруппа, являющаяся стабилизатором $\mathrm{St}_{G^0}(f)$ некоторого полного G-флага $f=\{0\subset\mathcal{P}_1\subset\ldots\subset\mathcal{P}_{m+n}=T\}$, где $T^{m|n}$ — пространство стандартного представления G. Мы будем различать два случая.

I. Случай $G=\mathrm{SL}(m,n)$, $\mathrm{OSp}(2r+1,2s)$ или $\mathrm{OSp}(2r,2s)$, причем при $G=\mathrm{OSp}(2r,2s)$ $\dim\mathcal{P}_{r+s}-\dim\mathcal{P}_{r+s-1}=0|1$. Пусть f' — не обязательно полный G-флаг, продолжимый до f (т. е. все полотнища f' являются полотнищами f). Ясно, что $\mathrm{St}_{G^0}(f')\supset\mathrm{St}_{G^0}(f)=B$, то есть $\mathrm{St}_{G^0}(f')$ — (связная) параболическая подгруппа. Таким образом, множество стабилизаторов G-флагов, продолжимых до f, является подмножеством конечного множества (связных) параболических подгрупп, содержащих B. Нам достаточно доказать, что эти множества имеют одинаковую мощность. Согласно предложению 5 и теореме 6, число параболических подгрупп, содержащих B, равно числу подмножеств соответствующей системы простых корней Π. Мощность Π в случае $G=\mathrm{SL}(m,n)$ равна $m+n-1$, в случае $G=\mathrm{OSp}(m,n)$ — $\left[\frac{m+n}{2}\right]$ (см. [16, п. 2.5.4]). Ясно, что для каждой G этому числу равно число (изотропных при $G=\mathrm{OSp}$) полотнищ полного G-флага f, не считая 0 и T. Число G-флагов f', продолжимых до f, равно, очевидно, числу подмножеств множества (изотропных) полотнищ флага f без 0 и T. Кроме того, разным f_1' и f_2' соответствуют разные подгруппы $\mathrm{St}_{G^0}(f_1')$ и $\mathrm{St}_{G^0}(f_2')$. В противном случае эти подгруппы совпадали бы с

подгруппой $\mathrm{St}_{G^0}(f')$ для флага f', составленного из всех полотнищ флагов f_1' и f_2'. Такое совпадение означало бы, что пространство G-флагов того же типа, что f', есть не что иное как пространство G-флагов того же типа, что f_1' (напомним, что тип флага — это упорядоченный набор размерностей его последовательных факторов), а это неверно, потому что полотнища флага f', не входящие во флаг f_1', всегда можно инфинитезимально сдвинуть так, чтобы полученный флаг оставался G-флагом (здесь существенно то, что мы рассматриваем случай I). Итак, мы доказали, что число стабилизаторов G-флагов, продолжимых до фиксированного полного G-флага f, равно числу связных параболических подгрупп, содержащих $B=\mathrm{St}_{G^0}(f)$. Значит, в I случае следствие доказано.

II. Случай $G=\mathrm{OSp}(2r, 2s)$, $\dim \mathscr{P}_{r+s}-\dim \mathscr{P}_{r+s-1}=1\,|\,0$. Здесь рассуждение несколько сложнее, чем в первом случае, поскольку разным G-флагам f_1' и f_2', продолжимым до полного G-флага f, могут соответствовать одинаковые подгруппы $\mathrm{St}_{G^0}(f_1')$ и $\mathrm{St}_{G^0}(f_2')$. Пример: $f_2'=f$, $f_1'=\{f$ без лагранжева (максимального изотропного) полотнища $\mathscr{P}_{r+s}\}$. Если $\mathrm{St}_{G^0}(f_1')\supsetneqq\supsetneqq\mathrm{St}_{G^0}(f_2')$, то лагранжево полотнище флага f_2' можно инфинитезимально сдвинуть, что неверно — на самом деле флаг f_1' можно дополнить до полного, добавив лагранжево подпространство, ровно двумя способами. Отсюда, кстати, следует, что одна и та же борелевская подгруппа B является стабилизатором в G^0 двух разных полных G-флагов: флага $f=\{0\subset\mathscr{P}_1\subset\ldots\ldots\subset\mathscr{P}_{r+s-1}\subset\mathscr{P}_{r+s}\subset\mathscr{P}_{r+s+1}\subset\ldots\subset T\}$ и флага $f'=\{0\subset\mathscr{P}_1\subset\ldots\ldots\subset\mathscr{P}_{r+s-1}\subset\mathscr{P}'_{r+s}\subset\mathscr{P}_{r+s+1}\subset\ldots\subset T\}$, отличающегося от f только лагранжевым полотнищем. Этот факт мы используем при доказательстве оставшейся части следствия.

Как и в случае I, заметим, что множество стабилизаторов G-флагов, продолжимых до f или до f', является подмножеством множества связных параболических подгрупп, содержащих $B=\mathrm{St}_{G^0}(f)=\mathrm{St}_{G^0}(f')$. Эти множества совпадают, потому что конечны и имеют одинаковую мощность. Действительно, мощность второго множества равна $2^{|\Pi|}=2^{r+s}$, где Π — система простых корней супергруппы $G=\mathrm{OSp}(2r, 2s)$, а мощность первого складывается из следующих слагаемых: 1) число G-флагов, содержащих полотнище $\mathscr{P}_{r+s}$, но не содержащих $\mathscr{P}_{r+s-1}$, 2) число G-флагов, содержащих полотнище $\mathscr{P}'_{r+s}$, но не содержащих $\mathscr{P}_{r+s-1}$, 3) число G-флагов, содержащих $\mathscr{P}_{r+s-1}$ и $\mathscr{P}_{r+s}$, 4) число G-флагов, не содержащих ни $\mathscr{P}_{r+s-1}$, ни $\mathscr{P}_{r+s}$, ни $\mathscr{P}'_{r+s}$ (предполагается, что все флаги продолжимы до f или f'). Очевидно, что стабилизаторы всех указанных флагов различны и что каждое из четырех слагаемых равно 2^{r+s-2}. $\square$

8. В этом пункте мы кратко изложим результаты о параболических подгруппах для супергруппы $G=Q(n)$. Соответствующая супералгебра Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{q}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n;n)\mid[X,p]=0\}$, где p — заданная П-симметрия в стандартном представлении $T^{n|n}$, $p^2=1$. Отсутствующие в этом пункте доказательства аналогичны доказательствам в случаях $G=SL$ и OSp.

8.1. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{q}(n)$, $n\geqslant 3$, $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ — подалгебра Картана четной части $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\simeq\mathfrak{gl}(n)$. Относительно $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ имеет место разложение $\mathfrak{g}=\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$ на корневые подпространства (см. И. Б. Пенков [10]), где Δ совпадает с системой корней редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ и, значит, Δ является системой корней типа A_{n-1}. Назовем *подалгеброй Картана* в $\mathfrak{g}$ подалгебру $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{h}_{\bar{1}}:=\mathfrak{g}_0$. Корневое разложение обладает следующими свойствами.

Предложение (И. Б. Пенков [10]).

(*a*) $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1\mid 1\quad\forall\alpha\neq 0$;

(*b*) $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}\Leftrightarrow\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta,\ \alpha+\beta\neq 0.\square$

8.2. Поскольку $\Delta\subset\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ есть система корней алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$, Δ является абстрактной системой комплексных корней в подпространстве линейных форм на $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$, обращающихся в нуль на центре алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ (см. [12], [13]). Поэтому подмножество $\Pi=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}\subset\Delta$ можно назвать *системой простых корней* супералгебры $\mathfrak{g}$, если оно является абстрактной системой простых корней (см. [12]). Определим также *множество положительных корней* $\Delta^+:=(\Delta\cap\mathbf{Z}_+\Pi)\setminus\{0\}$ и *отрицательных корней* $\Delta^-:=(\Delta\cap(-\mathbf{Z}_+)\Pi)\setminus\{0\}$. Тогда $\Delta=\Delta^+\cup\Delta^-\cup\{0\}$, $\Delta^+\cap\Delta^-=\varnothing$.

8.3. Назовем *борелевской подалгеброй* в $\mathfrak{g}$ подалгебру $\mathfrak{b}=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+\cup\{0\}}\mathfrak{g}_\alpha$. *Параболической* мы назовем любую подалгебру в $\mathfrak{g}$, содержащую $\mathfrak{b}$.

Предложение. При естественном взаимно однозначном соответствии между подалгебрами в $\mathfrak{g}$ и замкнутыми подгруппами в G борелевским подалгебрам взаимно однозначно соответствуют борелевские подгруппы в смысле п. 1, а параболическим подалгебрам — параболические подгруппы. $\square$

8.4. Теорема. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{q}(n)$, $n\geqslant 3$, $\mathfrak{b}$ — ее подалгебра Бореля, Π — система простых корней. Тогда для любой параболической подалгебры $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{b}$ существует подмножество $I\subset\Pi$ такое, что $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}\oplus(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_I^-}\mathfrak{g}_\alpha)$, где Δ_I^- — подмножество множества Δ^- отрицательных корней, порожденное I как полугруппа.

Доказательство. Множество корней супералгебры $\mathfrak{p}$ относительно $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ в действительности является параболическим множеством корней, и теорема легко следует из описания параболических множеств корней — см. [12, предложение VI.1.7.20]. $\square$

8.5. Следствие. Все параболические подгруппы в $G=Q(n)$ являются стабилизаторами G-флагов в T. □

Замечание. Легко проверить, что для супералгебр $\mathfrak{q}(1)$ и $\mathfrak{q}(2)$ теорема и следствие верны. Для подсуперал гебры $\mathfrak{sq}(n)\subset\mathfrak{q}(n)$ состоящей из эндоморфизмов $T^{n|n}$, коммутирующих с p и имеющих нулевой нечетный след, указанные утверждения справедливы (буквально с теми же доказательствами) при $n\geqslant 3$, а при $n=2$ имеется контрпример — параболическая подалгебра в $\mathfrak{sq}(2)$ вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & 0 & * \end{array}\right).$$

9. Строение параболических подгрупп в случае $G=\Pi\mathrm{Sp}(n)$ нам неизвестно. Отметим, что система корней супералгебры $\mathfrak{g}=\pi\mathfrak{sp}(n)$ еще менее похожа на абстрактную систему корней, чем система корней супералгебры $\mathfrak{osp}(m,n)$. О возникающих здесь сложностях можно судить по корневому описанию борелевских подгрупп в $\mathfrak{g}$, приведенному в работе И. Б. Пенкова [11].

§ 6. СУПЕРПРОСТРАНСТВА НЕПОЛНЫХ ФЛАГОВ

В этом параграфе мы резюмируем результаты о суперклетках Шуберта в случае суперпространств неполных флагов.

1. Основным объектом нашего изучения будут G-флаги. Мы сохраняем обозначения §1: $T^{m|n}$ — пространство стандартного представления G, ${}^GI$ — множество типов G-флагов, то есть множество последовательностей $(\delta_1,\ldots,\delta_r)$, таких, что для некоторого G-флага $0=\mathcal{P}_0\subset\mathcal{P}_1\subset\ldots\subset\mathcal{P}_r=T$ $\delta_i=\dim\mathcal{P}_i-\dim\mathcal{P}_{i-1}$. Для $I\in{}^GI$ через ${}^GF_I$ обозначается суперпространство G-флагов типа I. Как и в случае полных флагов, все супермногообразия ${}^GF_I$ связаны, за исключением $G=\mathrm{OSp}(2r,2s)$, когда ${}^GF_I$ может распасться на 2 компоненты связности.

Лемма. $${}^{\mathrm{SL}}I=\left\{(\delta_1,\ldots,\delta_r)\,|\,1\leqslant r\leqslant m+n,\ \delta_i\geqslant 0\,|\,0,\ \sum_{i=1}^{r}\delta_i=m\,|\,n\right\},$$

$${}^{\mathrm{OSp}}I=\{(\delta_1,\ldots,\delta_r)\in{}^{\mathrm{SL}}I\,|\,\delta_i=\delta_{r+1-i}\},$$

$${}^{\Pi\mathrm{Sp}}I=\{(\delta_1,\ldots,\delta_r)\in{}^{\mathrm{SL}}I\,|\,\delta_i=\delta^c_{r+1-i}\},$$

$${}^{Q}I=\{(\delta_1,\ldots,\delta_r)\in{}^{\mathrm{SL}}I\,|\,\delta_i=a_i\,|\,a_i\}.\ \square$$

Зафиксируем число полотнищ r и последовательность натуральных чисел $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_r)$ такую, что $\sum_{i=1}^{r}u_i=m+n$. Через ${}^G\Theta={}^G\Theta(r,\mathbf{u})$ обозначим подмножество в ${}^GI$, состоящее из таких

$I=(\delta_1, \ldots, \delta_r)$, что $|\delta_i|=u_i$ при всех i, где $|(a|b)|=a+b$. Суперпространство неполных G-флагов, отвечающих ${}^G\Theta$, мы обозначаем через ${}^G F_\Theta$:

$$ {}^G F_\Theta := \coprod_{I \in {}^G\Theta} {}^G F_I. $$

2. Расположение неполного флага относительно полного.

Определение. Пусть $\mathcal{F}_{I,\cdot}$ — полный G-флаг в T_S типа $I \in {}^G I_n$, $\mathcal{F}_{J,\cdot}$ — G-флаг типа $I \in {}^G\Theta$ (S — суперсхема над $\mathbf{C}$). Назовем эти флаги правильно взаимно расположенными, если для всех i, j $\mathcal{F}_{I,i} \cap \mathcal{F}_{J,j}$ — локально прямые локально свободные подпучки в T_S постоянного ранга. Тип расположения флага $\mathcal{F}_{J,\cdot}$ относительно $\mathcal{F}_{I,\cdot}$ — это матрица с компонентами $d_{ij}=\mathrm{rk}\,(\mathcal{F}_{I,i} \cap \mathcal{F}_{J,j})$, $0 \leqslant j \leqslant r$, $0 \leqslant i \leqslant t$, где

$$ t=m+n \text{ для } G=\mathrm{SL},\ \mathrm{OSp}, $$
$$ t=2m \text{ для } G=\Pi\mathrm{Sp}, $$
$$ t=m \text{ для } G=\mathrm{Q}, $$

как и далее в этом параграфе.

3. Свойства матриц относительного расположения.

Лемма. Матрица $(d_{ij})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant t \\ 0 \leqslant j \leqslant r}}$ расположения неполного G-флага относительно полного обладает свойством: матрица (d_{ij}) получается из некоторой матрицы $(d'_{ij})_{0 \leqslant i,\, j \leqslant t}$ типа взаимного расположения полных G-флагов вычеркиванием $t-r$ строк с теми же номерами, что и при естественном отображении забывания: ${}^G I_n \to {}^G\Theta$.

Доказательство следует из возможности дополнить неполный G-флаг до полного. □

4. Определение. Пусть $\Theta={}^G\underset{\sim}{\Theta}(r, \mathbf{u})$, как и в п. 1.

а), W_Θ — подгруппа в ${}^G W$, состоящая из перестановок, которые переводят каждое из множеств $\{1, \ldots, i_1\}$, $\{i_1+1, \ldots, i_2\}, \ldots$ $\ldots, \{i_{r-1}+1, \ldots, t\}$ в себя; здесь $i_k := \sum_{j=1}^{k} u_j$.

б) Через $w(I)$ мы обозначим образ пары (w, I), $w \in {}^G W / W_\Theta$, $I \in {}^G I_n$, при отображении $({}^G W / W_\Theta) \times {}^G I_n \to {}^G\Theta$, индуцированном действием ${}^G W \times {}^G I_n \to {}^G I_n$.

5. Комбинаторная лемма. Имеется биекция между следующими множествами:

а) геометрически реализуемые типы расположения неполных G-флагов всех типов $I \in {}^G\Theta$ относительно полных;

б) матрицы $(d_{ij})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant t \\ 0 \leqslant j \leqslant r}}$ со свойствами 3 и, следовательно, для $G=\mathrm{OSp}$ или $\Pi\mathrm{Sp}$ со следующими условиями симметрии:

$$\text{OSp: } d_{ij}=d_{t-i,r-j}-m\,|\,n+d_{t-i}(I)+d_{r-j}(J),$$

$$\text{ПSp: } d_{ij}=d^c_{t-i,r-j}-m\,|\,m+d^c_{t-i}(I)+d^c_{r-j}(J);$$

в) тройки $\{(I, J, w)\,|\,I\in{}^G I_n,\ J\in{}^G\Theta,\ w\in{}^G W/W_\Theta,\ J=w(I)\}$.

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что каждое из указанных множеств получается из соответствующего множества для случая полных флагов посредством некоторой проекции «забывания». Слои этих проекций биективно переходят друг в друга под действием отображений из комбинаторной леммы в случае полных флагов. □

6. Суперклетки Шуберта. Положим $F:={}^G F$, $F':={}^G F_\Theta$, $W:={}^G W$. Пусть $\mathcal{P}'.$ — тавтологический флаг на F', $\mathcal{P}.$ — на F.

Для каждого класса $w\in W/W_\Theta$ через $\mathbf{d}_{ij,w}$ обозначим функцию на $\coprod_{J=w(I)} F_I\times F'_J$ со значениями в $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, постоянную на каждом $F_I\times F'_J$:

$$\mathbf{d}_{ij,w}\,|_{F_I\times F'_J}:=d_{ij,w,IJ}$$

— компонента матрицы, соответствующей тройке (I, J, w) в силу комбинаторной леммы.

Пусть $|Y_w|\subset(\coprod_{J=w(I)} F_I\times F'_J)\,(\mathbf{C})$ — множество всех $\mathbf{C}$-точек x, над которыми $\dim_x(\mathcal{P}_i\cap\mathcal{P}'_j)=\mathbf{d}_{ij,w}$. Очевидно, $\coprod_{w\in W/W_\Theta}|Y_w|$ покрывает все точки $(F\times F')_{\mathrm{red}}$.

Теорема. а) На каждом $|Y_w|$ существует каноническая структура локально замкнутой подсуперсхемы $Y_w\subset F\times F'$ такая, что морфизм $\coprod_{w\in W/W_\Theta} Y_w\hookrightarrow F\times F'$ является уплощающим разбиением для системы пучков $\{\mathcal{P}_i\cap\mathcal{P}'_j\}$. Это означает, что произвольный морфизм суперсхем $g:S\to F\times F'$ (S — нётерова) обладает свойством

$$\left\{\begin{array}{l}\text{все } g^*(\mathcal{P}_i\cap\mathcal{P}'_j)\text{ — локально прямые локально свободные}\\ \text{подпучки в } T_S \text{ рангов } \mathbf{d}_{ij,w}\end{array}\right\}$$

тогда и только тогда, когда g пропускается через вложение $\coprod_{w\in W/W_\Theta} Y_w\hookrightarrow F\times F'$.

б) Все Y_w расслоены над F: $Y_w\xrightarrow{p_1}F$, причем слой $p_1^{-1}(x)$ этого расслоения изоморфен открытой суперклетке $\mathbf{C}^{r|s}$.

в) Y_w представляет функтор из категории нётеровых суперсхем над $\mathbf{C}$ в категорию множеств, ставящий в соответствие суперсхеме S множество S-точек суперсхемы $\coprod_{J=w(I)} F_I\times F'_J$, над которыми $\mathcal{P}_i\cap\mathcal{P}'_j$ — локально прямые локально свободные подпучки в T_S рангов $\mathbf{d}_{ij,w}$.

г) $\dim Y_w=\dim F+\min\limits_{w'\in w\subset W} l(w')$, $w\in W/W_\Theta$.

Доказательство основано на замечании, что слои естественной проекции $F_I \times F_{J_1} \to F_I \times F'_J$ являются суперпространствами полных G-флагов ($J_1 \in {}^G I_n$ — некоторое продолжение J до типа полного G-флага). □

7. Подобно случаю полных флагов, суперклетки Шуберта будут G-орбитами в произведении пространства полных флагов на пространство неполных.

Лемма о транзитивности. Пусть S — суперсхема, $T_S = T \otimes \mathcal{O}_S$, $\mathcal{P}'_\cdot$, $\mathcal{P}''_\cdot$ — два правильно взаимно расположенных G-флага в T_S типов $I \in {}^G I_n$ и $J \in {}^G \Theta$, соответственно, и с типом расположения $\mathcal{P}''_\cdot$ относительно $\mathcal{P}'_\cdot$, равным (d_{ij}). Пусть $\tilde{\mathcal{P}}'_\cdot$, $\tilde{\mathcal{P}}''_\cdot$ — другая пара G — флагов с теми же свойствами (тем же (d_{ij}), теми же типами: тип $\mathcal{P}'_\cdot$ = тип $\tilde{\mathcal{P}}'_\cdot$, тип $\mathcal{P}''_\cdot$ = тип $\tilde{\mathcal{P}}''_\cdot$). Тогда у каждой точки $s \in S$ есть аффинная окрестность $U \simeq \operatorname{Spec} A$, такая, что существует элемент g группы $G(A)$ A — точек группы G, переводящий пару флагов

$$\mathcal{P}'_\cdot|_U,\ \mathcal{P}''_\cdot|_U \text{ в } T_U$$

в пару флагов

$$\tilde{\mathcal{P}}'_\cdot|_U,\ \tilde{\mathcal{P}}''_\cdot|_U.$$

Доказательство почти дословно повторяет доказательство соответствующей леммы для полных флагов. □

§ 7. УПОРЯДОЧЕНИЕ В СУПЕРГРУППЕ ВЕЙЛЯ И ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СУПЕРКЛЕТОК ШУБЕРТА

Суперклетки Шуберта суперпространств полных флагов нумеруются элементами супергруппы Вейля, а также матрицами взаимного расположения (см. §§ 2, 3), поэтому отношение $Y_{w',IJ} \subset \overline{Y}_{w,IJ}$ ($\overline{Y}$ — суперсхемное замыкание, $Y_{w,IJ} := Y_w \cap {}^G F_I \times {}^G F_J$), задает упорядочение в супергруппе Вейля и на множестве матриц взаимного расположения. Эти упорядочения в настоящем параграфе мы опишем внутренним образом. Пользуясь тем, что все $Y_{w,IJ}$ являются G-орбитами, нетрудно показать, что $(Y_{w,IJ})_{\mathrm{red}} = |Y_{w,IJ}|$ являются клетками Шуберта пространства $(F_I)_{\mathrm{red}} \times (F_J)_{\mathrm{red}}$. Поэтому понятно, что суперклетки Шуберта «разбросаны» по $F \times F$ так же, как клетки Шуберта по $F_{\mathrm{red}} \times F_{\mathrm{red}}$.

Неясным остается вопрос, может ли одна суперклетка, на уровне подложек лежащая в замыкании другой, иметь большую нечетную размерность, чем вторая. Если бы это было возможно, то в разумном суперсмысле разбиение на суперклетки Шуберта не было бы суперклеточным комплексом. То, что это все же не так, следует из одного из наших результатов (см. теорему 3):

$$(Y_{w',IJ})_{\mathrm{red}} \subset (\bar{Y}_{w,IJ})_{\mathrm{red}} \Leftrightarrow Y_{w',IJ} \subset \bar{Y}_{w,IJ}.$$

1. Пусть при I, $J \in {}^G I_n$ $W_{IJ} = \{w \in {}^G \mid w(I) = J\}$, $l(w) = l_0(w) \mid l_1(w) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ — супердлина элемента w супергруппы Вейля ${}^G W$. Из определения супергруппы Вейля видно, что имеет место изоморфизм групп $W_{JJ} \simeq {}^{G_{\mathrm{red}}} W$ и, следовательно, биекция множеств $W_{IJ} \simeq {}^{G_{\mathrm{red}}} W$. На самом деле, мы введем упорядочение не на ${}^G W$, а на подмножестве $W_{IJ} \subset {}^G W$, которое нумерует суперклетки Шуберта в пространстве ${}^G F_I \times {}^G F_J$.

Назовем $w \in {}^G W$ *отражением*, если w сопряжен в ${}^G W$ базисному отражению (см. определение 4.1).

Определение. (Здесь $G \neq \mathrm{OSp}(2r, 2s)$ — для этой супергруппы — см. замечание после определения.)

(i) Пусть w_1, $w_2 \in W_{IJ}$, $\sigma \in W_{JJ}$ — отражение. Тогда $w_1 \xrightarrow{\sigma} w_2$ означает, что $\sigma w_1 = w_2$ и $l_0(w_2) = l_0(w_1) + 1$.

(ii) Положим $w < w'$, если существует цепочка $w = w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_k = w'$.

Замечание. В случае $G = \mathrm{OSp}(2r, 2s)$ группа $G_{\mathrm{red}} = \mathrm{O}(2r) \times \mathrm{Sp}(2s)$ состоит из двух компонент связности. Соответствующая группа Вейля по определению равна ${}^{G_{\mathrm{red}}} W = N(H)/C(H)$, H — максимальный тор в G_{red}, N и C — соответственно, его нормализатор и централизатор в G_{red}. Через W^0 обозначим группу Вейля компоненты единицы $(G_{\mathrm{red}})^0$ группы G_{red}. W^0 является подгруппой индекса 2 в ${}^{G_{\mathrm{red}}} W \simeq W_{JJ}$. Для наших целей в этом случае удобнее будет вводить порядок не на множестве W_{IJ}, а на каждом из 2-х левых смежных классов W^1_{IJ} и $W^2_{IJ} \subset W_{IJ}$ по подгруппе $W^0 \subset W_{JJ}$. Поэтому в предыдущем определении и везде далее в случае $G = \mathrm{OSp}(2r, 2s)$ нужно в качестве W_{IJ} брать W^i_{IJ}, $i = 1$ или 2, а в качестве W_{JJ} — группу W^0.

2. Перед формулировкой теоремы дадим несколько определений, являющихся простым обобщением классических на суперслучай.

Определение. а) Пусть $\varphi : Y \to Z$ — морфизм суперсхем. Суперсхемным образом Y относительно φ мы назовем замкнутую подсуперсхему $\varphi(Y)$ в Z, однозначно характеризующуюся свойствами: морфизм φ пропускается через естественное вложение $\varphi(Y) \hookrightarrow Z$ и, если $X \hookrightarrow Z$ — замкнутое вложение, через которое пропускается φ, то вложение $\varphi(Y) \hookrightarrow Z$ также пропускается через $X \hookrightarrow Z$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & X \arrow[d, hook] \\ \varphi(Y) \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

б) Пусть Y — локально замкнутая подсуперсхема в Z. Ее замыканием $\overline{Y}$ назовем суперсхемный образ Y относительно естественного вложения $Y \hookrightarrow Z$.

в) Пусть X и Y — локально замкнутые подсуперсхемы в Z. Мы будем считать, что $X \subset \overline{Y}$, если вложение $X \hookrightarrow Z$ пропускается через $\overline{Y} \hookrightarrow Z$.

3. Теорема. Для $I, J \in {}^G I_n$, $w, w' \in W_{IJ}$ следующие условия эквивалентны:

(*i*) $w' \leqslant w$ в смысле определения 1,

(*ii*) $d_{ij,w',IJ} \geqslant d_{ij,w,IJ}$ $\forall i, j$, где $(d_{ij,w,IJ})$ — матрица взаимного расположения, соответствующая тройке (I, J, w) в силу комбинаторной леммы 2.5,

(*iii*) $Y_{w',IJ} \subset \overline{Y_{w,IJ}}$,

(*iv*) $(Y_{w',IJ})_{\mathrm{red}} \subset \overline{(Y_{w,IJ})_{\mathrm{red}}}$.

Замечания. а) Эквивалентность $(i) \Leftrightarrow (iv)$ означает, в частности, что упорядочение в группе W_{JJ} совпадает со стандартным упорядочением (см. [1], [20]) в группе Вейля W^0 компоненты единицы группы G_{red}, если W^0 отождествить с W_{JJ}, как в п. 1.

б) Напомним, что, согласно замечанию в конце п. 1, в случае $G = \mathrm{OSp}(2r, 2s)$ вместо множества W_{IJ} мы всюду рассматриваем одно из множеств $W_{IJ}{}^i$, $i = 1, 2$, а вместо группы W_{JJ} — группу W^0. Чтобы не усложнять обозначений, примем такое соглашение. Если речь идет о (супер)многообразиях, связных при $G \neq \mathrm{OSp}(2r, 2s)$ и несвязных при $G = \mathrm{OSp}(2r, 2s)$, мы будем иметь в виду в последнем случае не сами многообразия, а любые из их связных компонент. Под символом G_{red} мы будем подразумевать $G_{\mathrm{red}}{}^0$.

4. Схема доказательства теоремы:

$$\begin{tikzcd} (i) \arrow[r, Leftrightarrow] & (iv) \arrow[d, Leftrightarrow] & (iii) \arrow[l, Rightarrow] \\ & (ii) \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

5. $(i) \Leftrightarrow (iv)$.

Лемма. а) Существует единственный элемент $w_0 \in W_{IJ}$, такой, что $l_0(w_0) = 0$.

б) $(Y_{ww_0})_{\mathrm{red}} = {}^{G_{\mathrm{red}}} Y_w$ (относительно канонического изоморфизма ${}^G F_{\mathrm{red}} \simeq {}^{G_{\mathrm{red}}} F$) для всех $w \in W_{JJ} = W^0$.

в) Упорядочение на множестве W_{IJ} совпадает со стандартным упорядочением в группе W (см. [1], [20]) при отождествлении $W^0 \xrightarrow{\sim} W_{IJ} : w \mapsto ww_0$ для всех $w \in W^0 = W_{JJ}$.

Доказательство леммы. Заметим, что при $G = \mathrm{Q}(n)$ $I = J = (1 \mid 1, \ldots, 1 \mid 1)$, $w_0 = e$, $W_{JJ} = {}^G W$ и лемма очевидна. Поэтому дальше можно предполагать, что $G \neq \mathrm{Q}(n)$.

а) Суперклетки Шуберта $Y_{w,IJ}$ образуют разбиение супермногообразия ${}^{G}F_I \times {}^{G}F_J$ и, следовательно, множество подстилающих многообразий $(Y_{w,IJ})_{\mathrm{red}}$ совпадает с множеством клеток Шуберта Y_w пространства ${}^{G_{\mathrm{red}}}F \times {}^{G_{\mathrm{red}}}F$. Среди клеток Y_w существует ровно одна размерности $0+\dim {}^{G_{\mathrm{red}}}F$. Эта размерность равна размерности подстилающего супермногообразия соответствующей суперклетки $Y_{w_0,IJ}$, что по теореме 4.3 равно числу $l_0(w_0)+\dim({}^{G}F_I)_{\mathrm{red}}$, откуда $l_0(w_0)=0$.

в) есть следствие б), так как в условиях б) $l_0(ww_0)=$ $=\dim(Y_{ww_0,IJ})_{\mathrm{red}}-\dim({}^{G}F_I)_{\mathrm{red}}=\dim {}^{G_{\mathrm{red}}}Y_w-\dim {}^{G_{\mathrm{red}}}F=N(w)$ — классическая длина (см. [1], [20]) элемента $w\in W^0={}^{G_{\mathrm{red}}}W$ относительно множества базисных отражений, соответствующего выбору подгруппы Бореля $B_J=\mathrm{St}_{G_{\mathrm{red}}}(f_J)$, f_J — стандартный G-флаг типа J (см. а) в доказательстве леммы 2.5). Тогда упорядочения в W^0 и в W_{IJ} совпадают по определению.

б) Идея доказательства состоит в том, чтобы заметить, что соответствие $W_{IJ}\to {}^{G_{\mathrm{red}}}W$, при котором $w\mapsto w'$, $w\in W_{IJ}$, а w' однозначно определяется равенством ${}^{G_{\mathrm{red}}}Y_{w'}=({}^{G}Y_{w,IJ})_{\mathrm{red}}$, можно представить в виде: $w\mapsto w'=w\tilde{w}_0$. Тогда, по единственности в утверждении а), $\tilde{w}_0=w_0^{-1}$.

Итак, пусть $w\in W_{IJ}$, $w'\in {}^{G_{\mathrm{red}}}W$ и ${}^{G_{\mathrm{red}}}Y_{w'}=({}^{G}Y_{w,IJ})_{\mathrm{red}}$. Ясно, что w' определяется типом взаимного расположения пары G_{red}-флагов $\varphi(f_I)$, f_J в пространстве $T^{m|n}$ стандартного представления G, где $(f_I, f_J)\in(Y_{w',IJ})_{\mathrm{red}}$, а $\varphi(f_I)$ — определенная перестройка флага f_I в флаг типа J. Эта перестройка осуществляется следующим образом: каждое полотнище $\mathcal{P}_i$ флага f_I разлагается в прямую сумму своей четной и нечетной части: $\mathcal{P}_i=(\mathcal{P}_i)_0\oplus(\mathcal{P}_i)_1$. Далее, индукцией по номеру i из этих компонент составляется флаг $\varphi(f_I)=\mathcal{P}'$ типа J: пусть $\mathcal{P}'_i$ уже построено и $\mathcal{P}'_i=(\mathcal{P}_{i_0})_0\oplus(\mathcal{P}_{i_1})_1$. Тогда если $\delta_{i+1}(J)=1|0$, то $\mathcal{P}'_{i+1}:=(\mathcal{P}_k)_0\oplus(\mathcal{P}_{i_1})_1$, где k — наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям $k>i_0$, $\delta_k(I)=1|0$. Если же $\delta_{i+1}(J)=0|1$, то $\mathcal{P}'_{i+1}:=(\mathcal{P}_{i_0})_0\oplus(\mathcal{P}_k)_1$, где k — наименьшее целое, удовлетворяющее условиям $k>i_1$, $\delta_k(I)=0|1$. (В случае $G=\mathrm{OSp}$ или $\Pi\mathrm{Sp}$ еще необходимо требовать $i+1$, $k\leqslant\left[\frac{m+n+1}{2}\right]$ и затем однозначно достраивать флаг до изотропного.) Чтобы найти перестановку w', отвечающую матрице взаимного расположения G_{red} — флагов $\varphi(f_I)$ и f_J, заметим, что для любого i вертикальный скачок в i-ом столбце этой матрицы находится между строками с номерами $w(i_0)-1$ и $w(i_0)$, если $\delta_i(J)=1|0$, и меж-

ду строками $w(i_1)-1$ и $w(i_2)$ в противном случае. По определению w' это означает, что

$$w'(i)=\begin{cases} w(i_0), & \text{если } \delta_i(J)=1\,|\,0, \\ w(i_1), & \text{если } \delta_i(J)=0\,|\,1. \end{cases}$$

Следовательно, перестановка $\tilde{w}_0$, отображающая в i число i_0, если $\delta_i(J)=1\,|\,0$, и число i_1, если $\delta_i(J)=0\,|\,1$, $i=1, \ldots, m+n$, удовлетворяет требуемому равенству $w'=w\tilde{w}_0$. По построению $\tilde{w}_0$ зависит от I и J, но не зависит от w и w'. Лемма доказана.

Теперь эквивалентность $(i)\Leftrightarrow(iv)$ легко следует из теоремы Стейнберга ([20]), утверждающей в наших обозначениях:

$$^{G_{\mathrm{red}}}Y_{w'}\subset{}^{G_{\mathrm{red}}}Y_{w}\Leftrightarrow w'\leqslant w,\ w,\ w'\in{}^{G_{\mathrm{red}}}W.$$

6. $(iv)\Rightarrow(ii)$. Слой когерентного пучка $\mathcal{P}_{I,i}\cap\mathcal{P}_{J,j}$ над точкой $y\in(Y_{w,IJ})_{\mathrm{red}}\subset({}^{G}F_I\times{}^{G}F_J)_{\mathrm{red}}$ имеет размерность $d_{ij,w,IJ}$ ($\mathcal{P}_{I,\cdot}$ и $\mathcal{P}_{J,\cdot}$ — тавтологические флаги на первом и, соответственно, втором сомножителях произведения ${}^{G}F_I\times{}^{G}F_J$). Эта функция размерности полунепрерывна сверху, откуда следует требуемое.

7. $(ii)\Rightarrow(i)$. Рассмотрим множество базисных отражений в ${}^{G_{\mathrm{red}}}W$, соответствующее выбору в G_{red} подгруппы Бореля $B_J=\mathrm{St}_{G_{\mathrm{red}}}(f_J)$, где f_J — стандартный G — флаг типа J (см. а) в доказательстве леммы 2.5). Обозначим через Σ образ этого множества при каноническом изоморфизме ${}^{G_{\mathrm{red}}}W\xrightarrow{\sim}W_{JJ}$.

Лемма. Для любого $\sigma\in\Sigma$, если $d_{ij,w,IJ}\geqslant d_{ij,w',IJ}$ при всех i, j, то либо $d_{ij,\sigma w,IJ}\geqslant d_{ij,w',IJ}$, либо $d_{ij,\sigma w,IJ}\geqslant d_{ij,\sigma w',IJ}$ при всех i, j.

Доказательство леммы. Нетрудно проверить, что $\sigma\in\Sigma$, если и только если $\sigma=(i, j_i)$ для $G=\mathrm{SL}$, $\sigma=(i\,j_i)(m+n+1-i,\ m+n+1-j_i)$ для $G=\mathrm{OSp}$, $\Pi\mathrm{Sp}$, или $\sigma=(l, l+2)$, $l=r+s$ для $G=\mathrm{OSp}(2r+1, 2s)$, $\sigma=(l, l+1)$, $l=r+s$ для $G=\mathrm{OSp}(2r, 2s)$, $\sigma=(i, i+1)$ для $G=\mathrm{Q}$, где i — любое, j_i — наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям: $j_i>i$, $\delta_{j_i}(J)=\delta_i(J)$, а при $G=\mathrm{OSp}$, $\Pi\mathrm{Sp}$ i, $j_i\leqslant\left[\frac{m+n+1}{2}\right]$. Далее утверждение леммы выводится из свойств 2.2 матриц взаимного расположения. Подробности мы оставляем читателю.

Перейдем к доказательству импликации $(ii)\Rightarrow(i)$. Пусть для всех i, j $d_{ij,w',IJ}\geqslant d_{ij,w,IJ}$. Докажем, что $w'\leqslant w$ убывающей индукцией по $l_0(w')$. Согласно лемме 5, в) и соответствующему классическому утверждению (см., например, [20], лемма 53) для $w'=s\in W_{IJ}$ с наибольшим $l_0(s)$ $s\geqslant w$ и, значит, $d_{ij,s,IJ}\leqslant d_{ij,w,IJ}$ для всех i, j (поскольку $(i)\Rightarrow(ii)$ уже доказано). Поэтому, если $d_{ij,s,IJ}\geqslant d_{ij,w,IJ}$ для всех i, j, то $d_{ij,s,IJ}=d_{ij,w,IJ}$, и $s=w$ по комбинаторной лемме 2.5. Таким образом, для $w'=s$ утверждение доказано.

Пусть $l_0(w') < l_0(s)$. Опять же в силу леммы 5, в) и соответствующего классического утверждения (см., например, [1, предложение 2.7)] существует такое отражение $\sigma \in \Sigma$, что $w' < \sigma w'$. По лемме 7, либо $d_{ij,\sigma w',IJ} \geqslant d_{ij,w,IJ}$, либо $d_{ij,\sigma w',IJ} \geqslant d_{ij,\sigma w,IJ}$ при всех i, j. В первом случае по предположению индукции $\sigma w' \leqslant w$, откуда $w' \leqslant w$. Во втором — по предположению индукции $\sigma w' \leqslant \sigma w$. Из этого неравенства следует, что либо $w' \leqslant w$, либо $\sigma w' \leqslant w$ (можно применить соответствующий классический результат — лемму 2.5 работы [1]). В любом случае имеем $w' \leqslant w$, что и требовалось.

8. $(ii) \Rightarrow (iii)$. Используя доказанную эквивалентность $(i) \Leftrightarrow (ii)$ легко свести задачу к случаю $d_{ij,w,IJ} \geqslant d_{ij,\sigma w,IJ}$, $\sigma \in \Sigma \subset W_{JJ}$, Σ — множество отражений относительно простых корней группы G_{red}, определенное в п. 7. Мы разберем случай $G = \mathrm{SL}(m, n)$, $\sigma = (i_0, j_0)$, $i_0 < j_0$. Остальные случаи отличаются от этого лишь усложнением обозначений.

Рассмотрим две проекции: ${}^G F_I \times {}^G F_J \xrightarrow{\psi} {}^G F_I \times F' \xrightarrow{\varphi} F_I \times F''$; они тождественны по первому аргументу, а по второму задаются формулами:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{m+n} \\
\downarrow \\
\mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{i_0-1} \subset \mathcal{P}_{i_0} \subset \mathcal{P}_{j_0} \subset \mathcal{P}_{j_0+1} \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{m+n} \\
\downarrow \\
\mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{i_0-2} \subset \mathcal{P}_{i_0-1} \subset \mathcal{P}_{j_0} \subset \mathcal{P}_{j_0+1} \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{m+n},
\end{array}$$

где $\mathcal{P}_{\boxed{\ }} := \mathcal{P}_{J,\boxed{\ }}$ — тавтологический флаг. Исследуем взаимное расположение пересечений суперклеток Шуберта $Y_{w,IJ}$ и $Y_{\sigma w,IJ}$ со слоями этих проекций. Прежде заметим, что суперсхемные образы $\varphi\psi(Y_{w,IJ})$ и $\varphi\psi(Y_{\sigma w,IJ})$ совпадают, так как эти образы являются *супермногообразиями Шуберта* (то есть замыканиями суперклеток Шуберта) для пространства неполных флагов F'', и матрицы $(d_{ij,w,IJ})$ и $(d_{ij,\sigma w,IJ})$, задающие эти суперклетки, одинаковы строго до i_0-го и после j_0—1-го столбцов.

Суперсхемные образы $\psi(Y_{w,IJ})$ и $\psi(Y_{\sigma w,IJ})$ опять же являются супермногообразиями Шуберта для относительного проективного суперпространства $\mathbf{P}(\delta_{i_0}(J);\ \mathcal{P}_{i_0}/\mathcal{P}_{i_0-1})$ над $\varphi\psi(Y_{w,IJ}) = \varphi\psi(Y_{\sigma w,IJ})$. (Здесь $\delta_{i_0}(J) = \mathrm{rk}\,\mathcal{P}_{i_0} - \mathrm{rk}\,\mathcal{P}_{i_0-1}$.) Соответствующие суперклетки определяются условиями взаимного расположения пучков $\mathcal{P}_{i_0}/\mathcal{P}_{i_0-1}$ и $\mathcal{P}_{I,k}/\mathcal{P}_{i_0-1}$, $0 \leqslant k \leqslant m+n$. Условия взаимного расположения однозначно задаются матрицами $(d_{ij,w,IJ})$ и $(d_{ij,\sigma w,IJ})$. Матрица $(d_{ij,w,IJ})$ дает условие $\mathcal{P}_{i_0}/\mathcal{P}_{i_0-1} \subset (\mathcal{P}_{I,w^{-1}(i_0)} \cap \mathcal{P}_{j_0})/\mathcal{P}_{i_0-1}$ плюс некоторое условие общего положения, а матрица $(d_{ij,\sigma w,IJ})$ — $\mathcal{P}_{i_0}/\mathcal{P}_{i_0-1} \subset (\mathcal{P}_{I,w^{-1}(j_0)} \cap \mathcal{P}_{j_0})/\mathcal{P}_{i_0-1}$ плюс некоторое условие общего положения. Мы предполагаем,

что $d_{ij,w,IJ} \geqslant d_{ij,\sigma w,IJ}$ при всех i, j. Это влечет неравенство $w^{-1}(i_0) < w^{-1}(j_0)$ (см. свойство матрицы $(d_{ij,w,IJ})$ в пункте г) доказательства леммы 2.5 и пункт б) там же). Последнее неравенство показывает, что $\mathscr{P}_{I,w^{-1}(i_0)} \subset \mathscr{P}_{I,w^{-1}(j_0)}$, откуда $\psi(Y_{w,IJ}) \subset \psi(Y_{\sigma w,IJ}) = \overline{\psi(Y_{\sigma w,IJ})}$.

Наконец, супермногообразия Шуберта $\overline{Y}_w$ и $\overline{Y}_{\sigma w}$ являются пересечениями одного и того же супермногообразия Шуберта относительного суперпространства полных флагов ${}^G F_J \to F'$ с прообразами $\psi^{-1}\psi(Y_w)$ и $\psi^{-1}\psi(Y_{\sigma w})$. Это есть следствие того, что горизонтальные знаки равенства и неравенства между элементами соседних столбцов, начиная с i_0-го столбца и кончая j_0—1-ым, расположены одинаково.

Таким образом, $\overline{Y}_w \subset \overline{Y}_{\sigma w}$, если $w \leqslant \sigma w$.

9. $(iii) \Rightarrow (iv)$. Тривиально. □

10. Следствие. Пусть $I, J \in {}^G I_n$, $w, w' \in W_{IJ}$. Тогда $l_0(w') \leqslant l_0(w) \Leftrightarrow l(w') \leqslant l(w)$.

Доказательство вытекает из теоремы 4.3 о размерности суперклеток и из эквивалентности $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ теоремы 3. □

§ 8. РАЗРЕШЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ ШУБЕРТА

Особенности многообразий Шуберта, то есть замыканий клеток Шуберта, являются, в некотором смысле, линеаризацией довольно общих особенностей алгебраических многообразий. А именно, скачок, размерности касательного пространства Зарисского $U \to U'$ в особой точке иногда (например, в случае пересечения двух неособых многообразий) можно представлять себе как переход некоторого векторного пространства V, высекающего в каком-то фиксированном векторном пространстве касательное пространство Зарисского U: $U = V \cap W$, в менее общее положение: $U' = V' \cap W$, $\dim V' = \dim V$, $\dim U' > \dim U$. Это и есть типичный случай появления особенности многообразия Шуберта, лежащего в грассманиане подпространств некоторого объемлющего векторного пространства.

Аналогичная ситуация имеет место и в супергеометрии, поэтому мы надеемся, что изучение особенностей супермногообразий Шуберта прояснит общую картину суперособенностей, которая благодаря классификации Каца простых супералгебр Ли [16] и известной классификации простых особенностей гиперповерхностей посредством диаграмм Дынкина обещает быть интересной.

1. Определение. Пусть X — супермногообразие. Назовем точку $x \in X_{\mathrm{red}}$ неособой, если существует открытая окрестность $U \subset X$ такая, что $x \in U$ и U — неособое супермногообразие. Множество особых точек супермногообразия X — это дополнение в X_{red} к множеству неособых.

Напомним, что *супермногообразием Шуберта* называется замыкание $\overline{Y_{w,IJ}}$ (см. определение 7.2) суперклетки Шуберта $Y_{w,IJ}$ в суперпространстве ${}^GF_I \times {}^GF_J$, где I, $J \in {}^GI_n$, w — элемент супергруппы Вейля W алгебраической супергруппы G, $w(I) = J$. Поскольку $Y_{w,IJ}$ неособы, супермногообразия Шуберта $\overline{Y_{w,IJ}}$ имеют особенности только в точках $(\overline{Y_{w,IJ}})_{\mathrm{red}} \setminus (Y_{w,IJ})_{\mathrm{red}}$ и заведомо имеют их там, где имеют особенности многообразия Шуберта $(\overline{Y_{w,IJ}})_{\mathrm{red}}$.

2. Суперсхема Ботта—Сэмелсона. Фиксируем $w = s_k \ldots s_1$ — приведенное разложение элемента $w \in W$ в произведение базисных отражений, $w_i := s_i \ldots s_1$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Определим последовательность проективизаций ${}^GF_I = Z_0 \leftarrow Z_1 \leftarrow \ldots \leftarrow Z_k$ векторных расслоений с помощью следующей индуктивной конструкции. Пусть Z_j уже построено, причем на Z_j имеется флаг $\mathcal{F}_\cdot$ типа $w_j(I)$ в $T_{Z_j} := T \otimes \mathcal{O}_{Z_j}$, T — пространство стандартного представления супергруппы G. Если $G = \mathrm{SL}(m, n)$, то $s_j = (i, i+1)$ для некоторого i, и мы в качестве Z_{j+1} возьмем относительное проективное суперпространство $\mathbf{P}_{Z_j}(\delta_i(w_{j+1}(I)); \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_{i-1})$ относительной размерности $l_{w_j(I), w_{j+1}(I)}(s_j)$. В $T_{Z_{j+1}}$ мы выберем полный флаг $\mathcal{F}_\cdot$, все полотнища $\mathcal{F}_p$ $(p \neq i)$ которого подняты с Z_j, а $\mathcal{F}_i$ однозначно определяется тавтологическим пучком $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_{i-1}$ проективного суперпространства $\mathbf{P}_{Z_j}(\delta_i(w_{j+1}(I)); \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_{i-1})$ и расширением $0 \to \mathcal{F}_{i-1} \to \mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_{i-1} \to 0$.

Если $G = \mathrm{OSp}(m, n)$ или $\Pi\mathrm{Sp}(m)$, то в случае $s_j = (i, i+1)$ $(m+n+1-i, m+n-i)$, $i < \left[\frac{m+n}{2}\right]$, мы возьмем в качестве Z_{j+1} относительное проективное суперпространство $\mathbf{P}_{Z_j}(\delta_i(w_{j+1}(I)); \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_{i-1})$ относительной размерности $l_{w_j(I), w_{j+1}(I)}(s_j)$. Чтобы образовать флаг в $T_{Z_{j+1}}$, поднимем все полотнища $\mathcal{F}_p$ $(p \neq i, m+n-i)$ с Z_j, полотнище $\mathcal{F}_i$ определим, как в предыдущем случае, по тавтологическому пучку на $\mathbf{P}_{Z_j}(\delta_i(w_{j+1}(I)); \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_{i-1})$, а полотнище $\mathcal{F}_{m+n-i}$ зададим равенством $\mathcal{F}_{m+n-i} := \mathcal{F}_i^\perp$ (относительно структурной билинейной формы b в T). Если $s_j = (l, m+n+1-l)$, $l = \left[\frac{m+n}{2}\right]$, положим $Z_{j+1} := \mathbf{P}_{Z_j}(\delta_l(w_{j+1}(I)); \mathcal{F}_{m+n+1-l}/\mathcal{F}_{l-1}, b)$, где символ «$b$» означает, что рассматривается суперпространство изотропных относительно формы b прямых. Размерность Z_{j+1} над Z_j равна $l_{w_j(I), w_{j+1}(I)}(s_j)$. Полотнища $\mathcal{F}_p$ $(p \leqslant l-1$ или $p \geqslant m+n+1-l)$ мы поднимаем на Z_{j+1} с Z_j, полотнище $\mathcal{F}_l$ определяем по тавтологическому пучку на $\mathbf{P}_{Z_j}(\delta_l \times (w_{j+1}(I)); \mathcal{F}_{m+n+1-l}/\mathcal{F}_{l-1}, b)$. Если $m+n$ четно, то $\mathcal{F}_0$ — полный G-флаг в $T_{Z_{j+1}}$, если нечетно, то флаг $\mathcal{F}_\cdot$ мы достраиваем до полного, добавив полотнище $\mathcal{F}_{l+1} := \mathcal{F}_l^\perp$.

Наконец, в случае $G=\mathrm{Q}(m)$ $s_j=(i, i+1)$ для некоторого i, и мы положим $Z_{j+1}=\mathrm{Gr}_{Z_j}(1|1;\ \mathcal{P}_{i+1}/\mathcal{P}_{i-1},\ p)$ — суперграссманиан $1|1$-мерных подпространств в $\mathcal{P}_{i+1}/\mathcal{P}_{i-1}$, симметричных относительно структурной П-симметрии p. Размерность Z_{j+1} над Z_j равна $1|1=l_{w_j(I),\, w_{j+1}(I)}(s_j)$. Флаг $\mathcal{P}_\cdot$ в $T_{Z_{j+1}}$ строится так же, как в случае $G=\mathrm{SL}(m, n)$.

По построению все Z_j неособы.

Определение. $Z_w:=Z_k$ называется суперсхемой Ботта—Сэмелсона (она, разумеется, зависит от выбора приведенного разложения w).

3. **Морфизм Ботта—Сэмелсона.** Морфизм $\psi: Z_w \to {}^G F_I \times {}^G F_J$ определим как канонический морфизм, при котором $\psi^*(\mathcal{P}_I, .)=\theta^*(\mathcal{P}_I, .)$, где $\theta: Z_w=Z_k \to Z_0={}^G F_I$ — естественная проекция, и $\psi^*(\mathcal{P}_J, .)=\mathcal{P}_\cdot$, $\mathcal{P}_\cdot$ — построенный флаг типа $J=w(I)$ на Z_w. Ясно, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Z_w \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\theta"'] & {}^G F_I \times {}^G F_J \arrow[d, "p_1"] \\ & {}^G F_I \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть ψ — морфизм суперсхем над ${}^G F_I$.

Определение. Морфизм ψ называется морфизмом Ботта—Сэмелсона.

4. Морфизм алгебраических супермногообразий $f: X \to Y$ мы называем *сюръективным*, если соответствующий морфизм алгебраических многообразий $f_{\mathrm{red}}: X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ сюръективен и суперсхемный образ $f(X)$ совпадает с Y.

Теорема. Морфизм Ботта—Сэмелсона $\psi: Z_w \to {}^G F_I \times {}^G F_J$ является разрешением особенностей супермногообразия Шуберта $\overline{Y_{w,IJ}}$, т. е. морфизм $\psi: Z_w \to \overline{Y_{w,IJ}}$ определен, сюръективен и индуцирует изоморфизм открытого подсупермногообразия в Z_w с $Y_{w,IJ}$.

Доказательство.

Шаг 1. Построим открытое подсупермногообразие U_w в Z_w изоморфно отображающееся в $Y_{w,IJ}$ посредством ψ. Будем действовать, как в п. 2, то есть построим последовательность открытых подсупермногообразий $U_j \subset Z_j$, $j=0, \ldots, k$, таких, что $\theta_j|_{U_{j+1}}: U_{j+1} \to U_j$, где θ_j — естественная проекция $Z_{j+1} \to Z_j$. Через ψ_j обозначим естественный морфизм $Z_j \to {}^G F_I \times {}^G F_{w_j(I)}$, построенный, как морфизм ψ в п. 3. Положим $U_0:=Z_0={}^G F_I$. Ясно, что ψ_0 задает изоморфизм U_0 с диагональю в ${}^G F_I \times {}^G F_I$, то есть с $Y_{e,II}$.

Пусть U_j построено и $\psi_j|_{U_j}: U_j \to Y_{w_j, I, w_j(I)}$ — изоморфизм. В качестве U_{j+1} возьмем большую суперклетку в относительном проективном суперпространстве (в случае $G=\mathrm{Q}$ суперграссманиане) $Z'_{j+1}:=\theta_j^{-1}(U_j) \to U_j$ (мы считаем, что разбиение на суперклетки фиксируется флагом типа I, поднятым с ${}^G F_I$ отно-

сительно морфизма $Z'_{j+1} \to U_j \to U_0 = {}^G F_I$). Поскольку $\psi_j|_{U_j}$ изоморфно отображает U_j на $Y_{w_j, I, w_j(I)}$ и суперклетка Шуберта $Y_{w_{j+1}, I, w_{j+1}(I)}$ является большой суперклеткой в относительном проективном суперпространстве над $Y_{w_j, I, w_j(I)}$ (см. п. 4.8), а морфизм ψ_{j+1} индуцирован морфизмом тавтологических пучков, ψ_{j+1} — изоморфизм.

Если положить $U_w := U_k$, то по индукции $\psi|_{U_w} = \psi_k|_{U_k}: U_w \to \to Y_{w, IJ}$ — изоморфизм.

Шаг 2. Из доказанного на шаге 1 следует, что ψ задает морфизм $\overline{U_w} \to \overline{Y_{w, IJ}}$, причем $\psi(\overline{U_w}) = \overline{Y_{w, IJ}}$. По построению $Z_w = \overline{U_w}$, и нам остается только проверить, что морфизм $\psi_{\mathrm{red}}: (Z_w)_{\mathrm{red}} \to (\overline{Y_{w, IJ}})_{\mathrm{red}}$ сюръективен. Действительно, многообразие $(Z_w)_{\mathrm{red}}$ полно, значит, геометрический (не схемный) образ $\psi_{\mathrm{red}}((Z_w)_{\mathrm{red}})$ замкнут в $(\overline{Y_{w, IJ}})_{\mathrm{red}}$. С другой стороны, этот образ содержит $(Y_{w, IJ})_{\mathrm{red}}$, откуда следует требуемое. □

5. Замечание. Важные результаты, получаемые при помощи схем Ботта—Сэмелсона (см. Демазюр [14]): рациональность особенностей многообразий Шуберта, формула характеров Демазюра — существенно опираются на теорему об обращении в нуль когомологий обратимых пучков на многообразиях Шуберта. Для супермногообразий Шуберта коразмерности $0|0$ эта теорема является частным случаем суперварианта теоремы Бореля—Вейля—Ботта (см. [11], [19]). Можно думать, что вместе с конструкцией суперсхем Ботта—Сэмелсона это позволит установить правильные суперверсии указанных результатов Демазюра.

6. Пример. Рассмотрим грассманиан $X = \mathrm{Gr}(2|0; T)$ $2|0$-мерных плоскостей в $3|1$-мерном комплексном векторном пространстве T. Очевидно, $\dim X = 2|2$, $X_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{P}^2$. Пусть $p: X \hookrightarrow \mathbf{P}(1|0; \Lambda^2_{\mathbf{C}}(T)) \simeq \mathbf{P}^{3|3}$ — плюккерово вложение. Для любой комплексной супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$ образ $p(X(A))$ состоит из прямых в $\Lambda^2_A(T)$, порожденных четными разложимыми бивекторами $Q \in \Lambda^2_A(T)$. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, f\}$ — однородный базис в T. Найдем условия на коэффициенты Q в разложении по базису

$$\{e_i \wedge e_j,\ e_i \wedge f,\ f \wedge f\}, \tag{1}$$

$i, j = 1, 2, 3, i < j$, пространства $\Lambda^2_A(T)$, при которых бивектор $Q = Q_1 + Q_2 \wedge f + \lambda f \wedge f$, где $Q_1 := \lambda_{12} e_1 \wedge e_2 + \lambda_{13} e_1 \wedge e_3 + \lambda_{23} e_2 \wedge e_3$, $Q_2 := \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, $\lambda_{ij} \in A_0$, $\lambda_i \in A_1$, $i, j = 1, 2, 3$, разложим. Разложимость Q означает, что $Q = (R + af) \wedge (S + bf) = R \wedge S + (bR - aS) \wedge f - ab f \wedge f$, где R и S разлагаются по e_1, e_2, e_3 и a и $b \in A_1$. Любой бивектор Q_1, не зависящий от f, очевидно, разложим, то есть равенство $Q_1 = R \wedge S$ ограничений на Q_1 не налагает. Фиксируем последнее разложение. Условие ($Q_2 =$

$=bR-aS$ для некоторых a и b) равносильно условию $Q_1\wedge\wedge Q_2=0$. Наконец, условие $\lambda=-ab$ равносильно условию $Q_1\wedge Q_2+2\lambda Q_1=0$. Окончательно получаем уравнения образа $p(X)$ в однородных координатах $(\lambda_{12}:\lambda_{13}:\lambda_{23}:\lambda|\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3)$ в $\mathbf{P}^{3|3}$:

$$\begin{cases}\lambda_1\lambda_{23}-\lambda_2\lambda_{13}+\lambda_3\lambda_{12}=0,\\ \lambda_1\lambda_2+\lambda\lambda_{12}=0,\\ \lambda_1\lambda_3+\lambda\lambda_{13}=0,\\ \lambda_2\lambda_3+\lambda\lambda_{23}=0.\end{cases}$$

Возьмем суперклетку Шуберта $W=\{\Lambda^{2|0}\subset T^{3|1}\,|\,\dim(\Lambda\cap V)=1|0\}\subset X$, где $V^{2|0}$ — пространство, порожденное векторами e_1, e_3. Соответствующее супермногообразие Шуберта задается в $\mathbf{P}^{3|3}$ уравнениями

$$\begin{cases}\lambda_1\lambda_{23}+\lambda_3\lambda_{12}=0,\\ \lambda_1\lambda_3=0,\\ \lambda_2=0,\\ \lambda=0.\end{cases}\tag{2}$$

(Действительно, нетрудно проверить, что при $(\lambda_{12})_{\mathrm{red}}\in A^*_{\mathrm{red}}$ условие $\dim(\Lambda\cap V)\geqslant 1|0$ равносильно $e_1\wedge e_3\wedge Q=0$, где Q — бивектор, соответствующий плоскости Λ. Последнее уравнение эквивалентно системе $\lambda_2=\lambda=0$. С другой стороны, $W\subset\{\Lambda^{2|0}\subset\subset T^{3|1}\,|\,\dim(\Lambda\cap V)\geqslant 1|0\}\subset\overline{W}$ и открытое аналитическое множество $\{Q\in\Lambda^2(T)\,|$ коэффициент λ_{12} в разложении Q по базису (1) удовлетворяет условию $(\lambda_{12})_{\mathrm{red}}\neq 0\}$ плотно в аффинном суперпространстве $\Lambda^2(T)$. Поэтому $\overline{W}$ задается в $X\overset{p}{\hookrightarrow}\mathbf{P}^{3|3}$ уравнениями $\lambda_2=\lambda=0$.)

Все точки супермногообразия $\overline{W}_{\mathrm{red}}$, кроме точки s с однородными координатами $\lambda_{13}=1$, $\lambda_{12}=\lambda_{23}=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda=0$, неособы. В соответствующей неоднородной системе координат $(\tilde\lambda_{12}, \tilde\lambda_{23}, \tilde\lambda, \tilde\lambda_1, \tilde\lambda_2, \tilde\lambda_3)$ в окрестности точки s уравнение $\overline{W}$ можно записать в виде:

$$\begin{cases}\tilde\lambda_1\tilde\lambda_{23}+\tilde\lambda_3\tilde\lambda_{12}=0,\\ \tilde\lambda_1\tilde\lambda_3=0,\\ \tilde\lambda_2=0,\\ \tilde\lambda=0.\end{cases}$$

Ясно, что $\dim\overline{W}=2|1$.

7. Разрешение Ботта—Сэмелсона особой точки $s\in\overline{W}$. Для супермногообразия Шуберта $\overline{W}$ суперсхемой Ботта—Сэмелсона естественно назвать относительное проективное суперпространство $Z=\mathbf{P}_M(1|0;\ \mathcal{S}_3/\mathcal{S}_1)$, где $M=\mathbf{P}_C(1|0;\ V^{2|0})\times\times\mathbf{P}_C(1|0;\ T/V)$, $\mathcal{S}_1$ — тавтологический пучок на первом сом-

множителе, $\mathcal{P}_3$ — такой пучок на втором сомножителе, что $V\subset\mathcal{P}_3$ и $\mathcal{P}_3/V$ — тавтологический пучок. Морфизм Ботта—Сэмелсона $\psi:\mathbf{P}_M(1|0;\ \mathcal{P}_3/\mathcal{P}_1)\to\mathrm{Gr}\,(2|0;\ T)$ — канонический морфизм, такой, что при обратном образе тавтологический пучок на $\mathrm{Gr}\,(2|0;\ T)$ переходит в пучок $\mathcal{P}_2:\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2\subset\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1$ — тавтологический пучок на $\mathbf{P}_M(1|0;\ \mathcal{P}_3/\mathcal{P}_1)$. Ясно, что суперклетка W всюду плотна в (суперсхемном) образе $\mathrm{Im}\,\psi$ и, значит, $\mathrm{Im}\,\psi=\overline{W}$.

Опишем морфизм Ботта — Сэмелсона в координатах. Пусть $U\subset\mathbf{P}^{3|3}$ — окрестность особой точки s. Найдем локальные уравнения суперсхемы Ботта — Сэмелсона $Z\subset U\times\mathbf{P}^{1|0}(1|0;\ V)\times\times\mathbf{P}^{0|1}(1|0;\ T/V)$ в координатах $(l_{12},\ l_{23},\ l,\ l_1,\ l_2,\ l_3)$, $(a_1:a_2)$ и $(b|\beta)$ на первом, втором и третьем сомножителе, соответственно (на первом сомножителе рассматриваются неоднородные координаты, а на втором и третьем — однородные). Кроме уравнений, задающих грассманиан $X=\mathrm{Gr}\,(2|0;\ T)$ в U, появятся соотношения инцидентности: $\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2\subset\mathcal{P}_3$. Более явно, если $\mathcal{P}_1=\langle a_1e_1+a_2e_3\rangle$, $\mathcal{P}_3=\langle bf^*+\beta e_2^*\rangle^{\perp}\subset T$, где $\{e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*,\ f^*\}$ — двойственный к $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ f\}$ базис в T^*, а $\mathcal{P}_2$ соответствует бивектор $Q=l_{12}e_1\wedge e_2+e_1\wedge e_3+l_{23}e_2\wedge e_3+l_1e_1\wedge f+l_2e_2\wedge f+l_3e_3\wedge f+lf\wedge f\in\Lambda^2(T)$, то $\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2$ равносильно $(a_1e_1+a_2e_3)\wedge\wedge Q=0$, а $\mathcal{P}_2\subset\mathcal{P}_3-i\,(bf^*+\beta e_2^*)\,Q=0$, где $i\,(\cdot)\cdot$ — внутреннее произведение. В конечном итоге последние два уравнения можно записать в виде систем

$$\begin{cases}a_1l_{23}+a_2l_{12}=0,\\ a_1l_3-a_2l_1=0,\\ a_1l_2=a_2l_2=0.\\ a_1l=a_2l=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}bl_1-\beta l_{12}=0,\\ bl_3+\beta l_{23}=0,\\ 2bl+\beta l_2=0,\\ bl_2=0.\end{cases}$$

Отсюда уравнения Z в $U\times\mathbf{P}^{1|0}\times\mathbf{P}^{0|1}$ есть

$$\begin{cases}a_1l_{23}+a_2l_{12}=0,\\ bl_1-\beta l_{12}=0,\\ bl_3+\beta l_{23}=0,\\ l=l_2=0.\end{cases}$$

Из них явно видно, что суперсхема Z неособа в $U\times\mathbf{P}^{1|0}\times\mathbf{P}^{0|1}$.

Морфизм Ботта — Сэмелсона в координатах записывается следующим образом: $(\tilde{\lambda}_{12},\ \tilde{\lambda}_{23},\ \tilde{\lambda},\ \tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\lambda}_2,\ \tilde{\lambda}_3)=\psi\,(l_{12},\ l_{23},\ l,\ l_1,\ l_2,\ l_3;\ a_1:a_2;\ b|\beta):=(l_{12},\ l_{23},\ l,\ l_1,\ l_2,\ l_3)$. Прообраз $E:=\psi^{-1}(s)$ задается уравнениями $l_{12}=l_{23}=l=l_1=l_2=l_3=0$ и, следовательно, изоморфен $\mathbf{P}^{1|0}>\mathbf{P}^{0|1}$. Таким образом, можно сказать, что при морфизме Ботта—Сэмелсона в нашем примере в особую точку вклеивается супермногообразие $\mathbf{P}^{1|0}\times\mathbf{P}^{0|1}$.

8. Раздутие. Пусть M — неособое комплексное супермногообразие размерности $m|n$, $m\geqslant 1$, $s\in M_{\mathrm{red}}$ — точка его подложки, $z=(z_1,\ldots,z_m,\ \zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ — голоморфные координаты в окрестности $U\subset M$ точки s. *Раздутием* супермногообразия M в точке s называется комплексное супермногообразие $\tilde{M}$, полученное приклеиванием к $M\setminus\{s\}$ ($M\setminus\{s\}$ — открытое подмногообразие в M с подложкой $M_{\mathrm{red}}\setminus\{s\}$) супермногообразия

$$\tilde{U}=\{(z,\ l)\in U\times \mathbf{P}^{m-1|n}\mid z\in l\}$$

посредством отождествления $\tilde{U}\setminus\{(z,l)\mid z=0\}\simeq U\setminus\{s\}$, при котором $(z,l)\mapsto z$. При этом $\mathrm{P}^{m-1|n}$ рассматривается как суперпространство прямых в $\mathbf{C}^{m|n}$ с координатами $(z_1,\ldots,z_m,\ \zeta_1,\ldots,\zeta_n)$. Отображение $(z,l)\mapsto z$ продолжается до естественной проекции $\pi:\tilde{M}\to M$, являющейся изоморфизмом над $M\setminus\{s\}$. Прообраз $E:=\pi^{-1}(s)$ изоморфен $\mathbf{P}^{m-1|n}$ и называется *исключительным дивизором* раздутия.

В координатах $(z_1,\ldots,z_m,\ \zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ в U и соответствующих однородных координатах $(l_1:\ldots:l_m\mid\lambda_1:\ldots:\lambda_n)$ в $\mathbf{P}^{m-1|n}$ подмногообразие $\tilde{U}$ задается уравнениями:

$$\begin{cases} z_i l_j = z_j l_i, \\ z_i\lambda_j = \zeta_j l_i, \\ \zeta_i\lambda_j = -\zeta_j\lambda_i \end{cases}$$

при всех возможных i, j.

Как и в классической геометрии, раздутие является способом разрешения особенностей супермногообразий. Мы проиллюстрируем это на нашем примере.

9. Разрешение особой точки $s\in\overline{W}$ с помощью раздутия. Супермногообразие $\overline{W}\subset\mathbf{P}^{3|3}$ задается уравнениями (2) в однородных координатах $(\lambda_{12}:\lambda_{13}:\lambda_{23}:\lambda\mid\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3)$, поэтому можно считать, что $\overline{W}$ вложено в $\mathbf{P}^{2|2}=\{\lambda=0,\ \lambda_2=0\}$ и задано в соответствующей неоднородной системе координат $(\lambda_{12},\ \lambda_{23},\ \lambda_1,\ \lambda_3)$ в окрестности $U\subset\mathbf{P}^{2|2}$ особой точки $s=(0,0,0,0)$ уравнениями

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_{23}+\lambda_3\lambda_{12}=0, \\ \lambda_1\lambda_3=0. \end{cases} \tag{3}$$

Построим раздутие $\tilde{U}$ супермногообразия $U\subset\mathbf{P}^{2|2}$ в точке s. В $U\times\mathbf{P}^{1|2}(a_1:a_2\mid\alpha_1:\alpha_2)$ раздутие $\tilde{U}$ определяется уравнениями

$$\begin{cases} \lambda_{12}a_2=\lambda_{23}a_1,\ \ \lambda_{12}\alpha_1=\lambda_1 a_1, \\ \lambda_{12}\alpha_2=\lambda_3 a_1,\ \ \lambda_{23}\alpha_1=\lambda_1 a_2, \\ \lambda_{23}\alpha_2=\lambda_3 a_2,\ \ \lambda_1\alpha_2=-\lambda_3\alpha_1,\ \ \lambda_1\alpha_1=0,\ \ \lambda_3\alpha_2=0. \end{cases} \tag{4}$$

Найдем полный прообраз $\pi^{-1}(\overline{W})$ при естественной проекции $\pi:\tilde{U}\to U$. Рассмотрим покрытие суперпространства $\mathbf{P}^{1|2}$ двумя картами $a_1\neq 0$ и $a_2\neq 0$. В первой карте $a_1\neq 0$, и можно положить $a_1=1$. Подставляя уравнения (4) в (3), мы получим

$\lambda_{12}^2(\alpha_1 a_2+\alpha_2)=0$, $\lambda_{12}^2\alpha_1\alpha_2=0$, $\lambda_{23}=\lambda_{12}a_2$, $\lambda_1=\lambda_{12}\alpha_1$, $\lambda_3=\lambda_{12}\alpha_2$ (зависимые уравнения мы опускаем) — уравнения $\pi^{-1}(\overline{W})$. Во второй карте, полагая $a_2=1$, получим следующие уравнения $\pi^{-1}(\overline{W})$: $\lambda_{23}^2(\alpha_1+\alpha_2 a_1)=0$, $\lambda_{23}^2\alpha_1\alpha_2=0$, $\lambda_{12}=\lambda_{23}a_1$, $\lambda_1=\lambda_{23}\alpha_1$, $\lambda_3=\lambda_{23}\alpha_2$. В этой ситуации мы будем говорить, что полный прообраз $\pi^{-1}(\overline{W})$ распадается в объединение исключительно дивизора $E=\{\lambda_{12}=\lambda_{23}=\lambda_1=\lambda_3=0\}\simeq \mathbf{P}^{1|2}$ (взятого с кратностью 2), и собственного прообраза супермногообразия $\overline{W}$, заданного в первой и второй картах на $U\times\mathbf{P}^{1|2}$, соответственно, уравнениями

$$\begin{cases}\alpha_1 a_2+\alpha_2=0,\\ \lambda_{23}=\lambda_{12}a_2,\\ \lambda_1=\lambda_{12}\alpha_1,\\ \lambda_3=\lambda_{12}\alpha_2\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 a_1=0.\\ \lambda_{12}=\lambda_{23}a_1,\\ \lambda_1=\lambda_{23}\alpha_1,\\ \lambda_3=\lambda_{23}\alpha_2.\end{cases}$$

Ясно, что эти уравнения определяют неособое подмногообразие в $U\times\mathbf{P}^{1|2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.*, Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 3, 3—26 (РЖМат, 1973, 9А574)
2. *Воронов А. А.*, Взаимное расположение супермногообразий Шуберта и разрешение их особенностей. Функц. анализ и его прил., 1987, *21*, № 1, 72—73 (РЖМат, 1987, 6А492)
3. —, *Манин Ю. И.*, Суперклетки Шуберта. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 4, 75—76 (РЖМат, 1985, 3А425)
4. *Воронов Ф. Ф., Зорич А. В.*, Комплекс форм на супермногообразии. Функц. анализ и его прил., 1986, *20*, № 2, 58—59 (РЖМат, 1987, 3А608)
5. —, —, Теория бордизмов и гомотопические свойства супермногообразий. Функц. анализ и его прил., 1987, *21*, № 3, 77—78
6. *Лейтес Д. А.*, Теория супермногообразий. Петрозаводск: КФ АН СССР, 1983, 200 с.
7. *Манин Ю. И.*, Грассманианы и флаги в супергеометрии. В сб. «Некоторые вопросы современного анализа». М.: Изд-во МГУ, 1984, 83—101 (РЖМат, 1985, 5А406)
8. —, Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984, 335 с. (РЖМат, 1985, 10А407К)
9. —, Новые размерности в геометрии. Успехи мат. наук, 1984, *39*, № 6, 47—73 (РЖМат, 1985, 5А392)
10. *Пенков И. Б.*, Характеры типичных неприводимых конечномерных $q(n)$-модулей. Функц. анализ и его прил., 1986, *20*, № 1, 37—45 (РЖМат, 1986, 6А393)
11. —, Теория Бореля—Вейля—Ботта для классических супергрупп Ли. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Новейшие дост., в наст. томе
12. *Bourbaki N.*, Groupes et algèbres de Lie. Ch. IV—VI. Paris: 1968, 288 p. (РЖМат, 1971, 2А380К); Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.*, Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса, группы, порожденные отражениями, системы корней. М. Мир, 1972, 334 с. (РЖМат, 1973, 2А387К)

13. —, Groupes et algèbres de Lie. Ch. VII—VIII. Paris: 1974, 298 p.; Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.*, Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1978, 342 с. (РЖМат, 1978, 11А328К)
14. *Demazure M.*, Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. Ann. Scient. Ecole Norm. Super., Sér. 4, 1974, *7*, № 1, 53—88
15. *Humphreys J. E.*, Linear Algebraic Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1975, 247 pp. (Grad. Texts Math., *21*) (РЖМат, 1976, 4А426К); Пер. на рус. яз.: *Хамфри Дж.*, Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980, 399 с. (РЖМат, 1981, 2А433К)
16. *Kac V. G.*, Lie superalgebras. Adv. Math., 1977, *26*, № 1, 8—96 (РЖМат, 1977, 9А340)
17. —, Representations of classical Lie superalgebras. Lect. Notes Math., 1978, *676*, 597—626 (РЖМат, 1979, 6А237)
18. *Mumford D.*, Lectures on curves on an algebraic surface. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1966, 149 pp. (РЖМат, 1967, 6А228К); Пер. на рус. яз.: *Мамфорд Д.*, Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968, 236 с. (РЖМат, 1969, 2А454К)
19. *Penkov I. B., Skornyakov I. A.*, Cohomologie des $\mathcal{D}$-modules tordus typiques sur les supervariétés de drapeaux. C. r. Acad. Sci., sér. 1, 1985, *299*, № 20, 1005—1008 (РЖМат, 1985, 8А487)
20. *Steinberg R.*, Lectures on Chevalley groups. Yale Univ., 1967, 155 pp.: Пер. на рус. яз.: *Стейнберг Р.*, Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975, 262 с. (РЖМат, 1975, 11А304К)