

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Г. М. Полотовский, Проективные M -кубики и M -квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов, *Алгебра и анализ*, 1999, том 11, выпуск 5, 166–184

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

19 марта 2025 г., 13:39:16



ПРОЕКТИВНЫЕ M -КУБИКИ И M -КВАРТИКИ В ОБЩЕМ ПОЛОЖЕНИИ С МАКСИМАЛЬНО ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙСЯ ПАРОЙ ОВАЛОВ

© С. Ю. Оревков, Г. М. Полотовский

Получена изотопическая классификация кривых, указанных в заглавии. При этом предложен новый подход к построению кривых. Для доказательств запретов применены теория комплексных ориентаций и методы теории зацеплений (неравенство Мурасуги–Тристрама).

Введение

Увеличение запаса примеров плоских алгебраических кривых с известной топологией индуцирует, как правило, общее продвижение в круге вопросов, связанных с первой частью 16-й проблемы Гильберта. В частности, полученная в [1, 2] классификация плоских вещественных кривых степени 6, распадающихся в произведение двух трансверсально пересекающихся сомножителей, нашла разнообразные применения, основные из которых перечислены в [3]. (Сейчас этот список можно дополнить построением кривых степени 6 на кубической поверхности в недавней работе [4].) Характер упомянутых применений позволяет надеяться, что аналогичная классификация распадающихся кривых степени 7 будет столь же полезной.

Однако в рассматриваемой задаче „7 \gg 6“: не говоря о том, что исследованию подлежит на порядок большее количество топологических типов, техники работ [1, 2] здесь уже недостаточно. Последнее ясно после проведенного вторым автором весьма объемного „предварительного“ изучения распадающихся кривых степени 7, часть результатов которого изложена в [3, 5]. Отметим также, что для классификации взаимных расположений M -кривой степени 6 и трансверсально пересекающей ее прямой оказалось недостаточно и более мощных средств [6, 7]. Недавно с помощью привлечения методов теории зацеплений эта задача была продвинута первым автором. (См. [8, 9]; в частности, найдена классификация гибких аффинных M -кривых степени 6.)

Ключевые слова: распадающаяся плоская вещественная кривая, 16-я проблема Гильберта, возмущение особой кривой, квадратичные преобразования, комплексные ориентации, теория зацеплений.

Работа поддержана грантом 98-01-00794 РФФИ.

В настоящей работе с помощью методов теории зацеплений получена изотопическая классификация кривых, указанных в заглавии. Используемые средства применимы и для других классов кривых — например, для коник и квинтик в общем положении,¹ и можно надеяться, что они позволят завершить классификацию распадающихся кривых степени 7 (при естественных условиях максимальности и трансверсальности).

§1. Формулировка задачи и результата

Ниже C_n обозначает множество точек M -кривой степени n в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

Напомним, что C_3 (M -кубика) состоит в $\mathbb{R}P^2$ из двух непересекающихся топологических окружностей, одна из которых разбивает $\mathbb{R}P^2$, а вторая — не разбивает. Первая называется *овалом* и будет обозначаться O_3 , а вторая — *нечетной ветвью* и будет обозначаться J_3 .

M -квартика C_4 состоит в $\mathbb{R}P^2$ из четырех овалов, лежащих вне друг друга. Мы предполагаем, что один из этих овалов — будем обозначать его O_4 — пересекается с O_3 в 12 различных вещественных точках. Остальные три овала квартики и ветвь J_3 будем называть *свободными* (от точек пересечения).

Основной результат настоящей работы — топологическая классификация троек

$$(\mathbb{R}P^2, C_3 \sqcup C_4, C_3), \quad (1.1)$$

где \sqcup обозначает объединение при описанных выше условиях (трансверсальность пересечения, максимальность числа общих вещественных точек, свобода трех овалов квартики и ветви J_3) — может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Любая тройка $(\mathbb{R}P^2, C_3 \sqcup C_4, C_3)$ гомеоморфна одной из 31 топологических моделей, перечисленных на рис. 1, где стандартные окружности — модели овала O_3 , нечетные ветви J_3 не нарисованы, а в компонентах дополнения к $O_3 \cup O_4$, содержащих буквы α и β , следует расположить соответственно α и $\beta = 3 - \alpha$ свободных овалов квартики при значениях α , указанных в подписях под рисунками.*

Как обычно в подобных задачах, доказательство естественно разбивается на три этапа: (i) перечисление допустимых топологических моделей; (ii) построения; (iii) запреты.

¹Замечание при корректуре. См. статью первого автора „Проективные Коники и M -квинтики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов“ (Мат. заметки 65(1999), № 4, 632-636), написанную после настоящей работы.

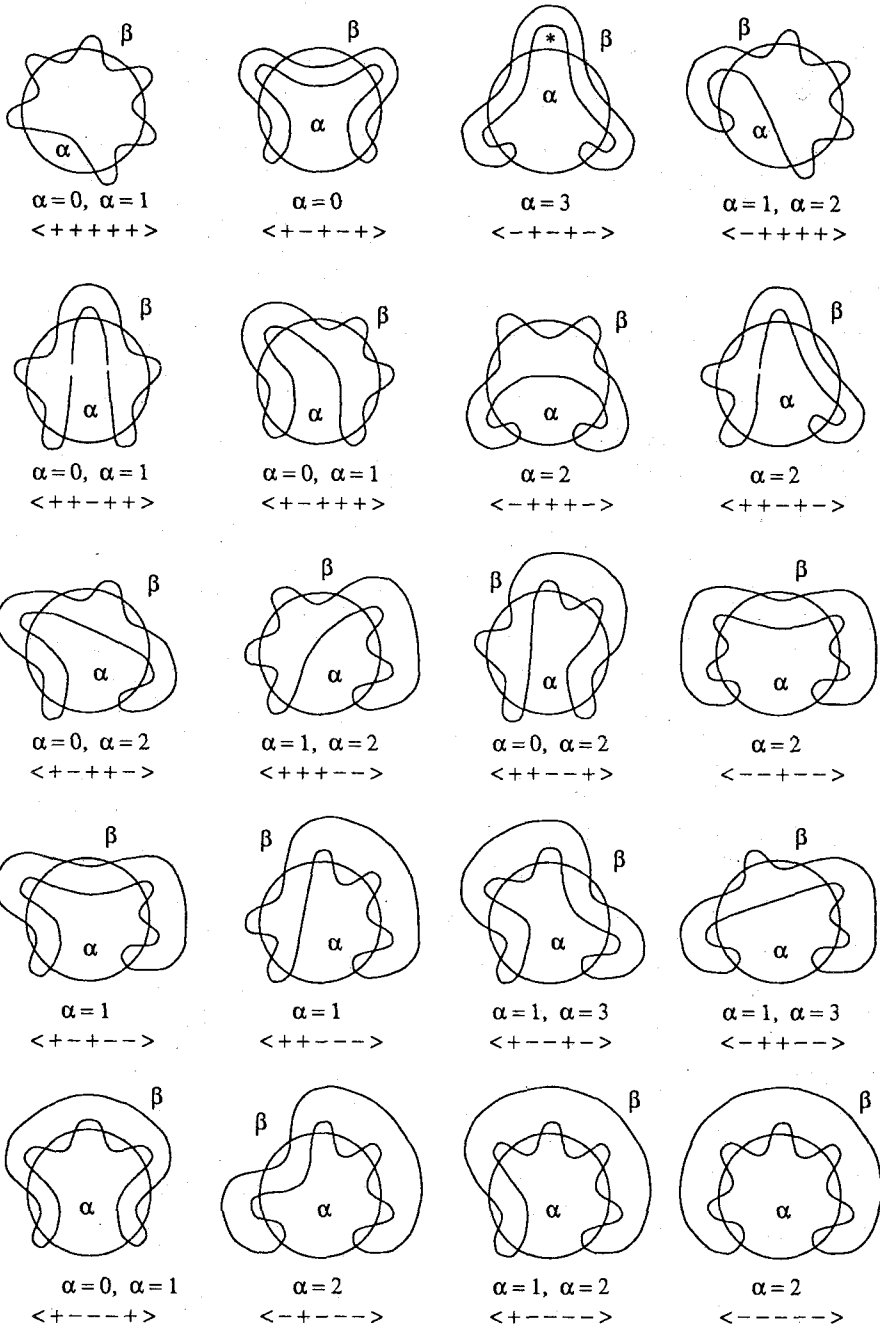


Рис. 1.

Под „допустимыми моделями“ здесь понимаются такие расположения в $\mathbb{R}P^2$ двух наборов A и B топологических окружностей, что A , B и $A \cup B$ удовлетворяют тем же комбинаторным условиям, что C_3 , C_4 и $C_3 \cup C_4$ в (1.1), включая ограничения на взаимные расположения овалов, вытекающие из теоремы Безу при рассмотрении пересечений с прямыми.

Этап (i) подробно описан в [5]. Там приведен алгоритм перечисления допустимых моделей для $O_3 \sqcup O_4$, который дает список из 20 расположений, показанных на рис. 1; затем с помощью теоремы Брюзогги о независимости устраниений невырожденных двойных точек (например, [10]) доказывается, что для каждого из этих расположений теорема Безу допускает только одну (с точностью до симметрии) область α внутри овала O_3 (рис. 1), где могут быть расположены α свободных овалов кривой C_4 , $0 \leq \alpha \leq 3$. Таким образом, *всего для троек (1.1) имеется $20 \times 4 = 80$ допустимых моделей.*²

Этапам (ii) и (iii) посвящены §2 и 3 соответственно.

§2. Построения

Предварительно опишем применяемую ниже кодировку допустимых моделей. Словом (последовательностью символов)

$$w = \langle s_1 s_2 \dots s_n \rangle, \quad s_k \in \{+, -\},$$

будем кодировать взаимное расположение овалов O_3 и O_4 , составленное из блоков $B(s_1), \dots, B(s_n)$ в соответствии с рис. 2.1; блоки $B(+)$ и $B(-)$ изображены на рис. 2.2. Удобно считать, что символы „<“ и „>“ тоже входят в слово w ; отвечающими им блоками $B(<)$ и $B(>)$ являются крайний левый и крайний правый блоки на рис. 2.1.

Замечание. Ясно, что возможны 32 различных слова w описанного вида. После отождествления слов, переходящих друг в друга при изменении направления чтения, останутся 20 слов, записанных под соответствующими им моделями на рис. 1.

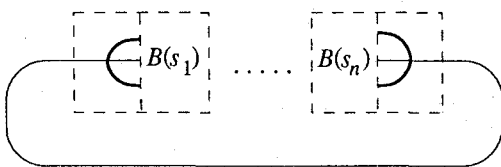


Рис. 2.1.

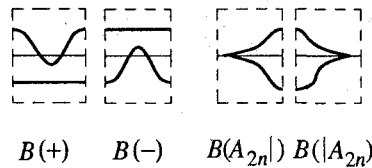


Рис. 2.2.

Рис. 2.3.

Для кодировки расположений $C_3 \sqcup C_4$ будем оснащать слово w указанием параметра α в фигурных скобках после w .

²В разделе VIII а) работы [3] ошибочно указано „16“ вместо „20“ и „64“ вместо „80“.

2.1. Элементарные построения методом малого параметра. Модель $\langle++++\rangle\{0\}$ реализуется кривой $C_3 \cup C_4$, где C_4 — M -квартика, имеющая 6 точек перегиба на одном овале O_4 (такая кватрика построена в [11]), а C_3 — M -кубика, полученная малым возмущением объединения трех секущих этого овала, достаточно близких к трем его бикасательным и пересекающих его в четырех точках каждая.

Для реализации модели $\langle++-++\rangle\{0\}$ рассмотрим M -квартуку C_4 , полученную возмущением объединения двух эллипсов. Пусть $L = 0$ — бикасательная к O_4 и $E = 0$ — эллипс, касающийся O_4 в трех точках так, как показано на рис. 3.1. Предположим, что $L < 0$ на O_4 и $E < 0$ внутри эллипса. Тогда $C_4 \cup \{EL = \varepsilon\}$ при $0 < \varepsilon \ll 1$ дает искомое расположение (рис. 3.2).

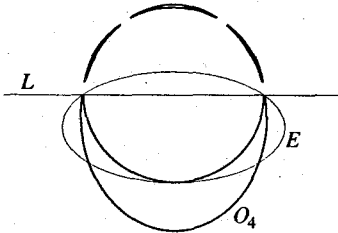


Рис. 3.1.

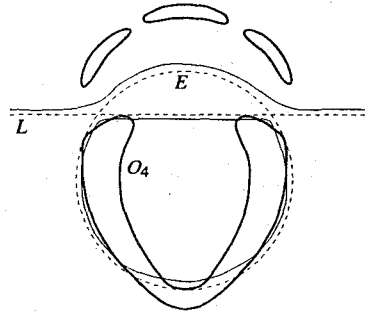


Рис. 3.2.

Замечания. 1. Используя в качестве исходного расположения объединение коники и кубики, получающееся в методе Харнака (см., например, [10]), аналогичными элементарными построениями удастся реализовать еще $\langle++-++\rangle\{0\}$ и $\langle--++\rangle\{3\}$. Мы опускаем подробности, поскольку в следующем пункте эти две модели будут реализованы единым способом вместе со всеми оставшимися.

2. Реализация модели $\langle++-++\rangle\{0\}$ и все построения следующего пункта получены первым автором.

2.2. Построения с помощью устраниений каспов.

2.2.1. Построение особых кривых. Пусть в точке p одна кривая неособа, а другая имеет особенность типа A_{2n} . Будем говорить, что эти кривые имеют в точке p *максимальное касание*, если в некоторых локальных аналитических координатах они записываются уравнениями $y = 0$ и $y^2 = x^{2n+1}$ соответственно.

По аналогии с кодировкой взаимных расположений овалов мы будем обозначать словом $w = A_{2n}|s_1 \dots s_k|A_{2m}$ взаимное расположение овала и особой четной ветви с особенностями A_{2n} , A_{2m} , получающееся из рис. 2.1 заменой блоков $B(<)$ и $B(>)$ соответственно на блоки $B(A_{2n}|)$ и $B(|A_{2m})$, показанные на рис. 2.3. Данные обозначения предполагают наличие максимального касания в особых точках (что, впрочем, следует из рисунка).

Положим также $B(A_0|) = B(<)$, $B(|A_0) = B(>)$. Как и в неособом случае, $w\{\alpha\}$ будет обозначать взаимное расположение M -кубики и кватрики, при котором

внутри O_3 лежат α и снаружи лежат $\beta = 3 - \alpha - n - m$ свободных овалов кватики. Поскольку при $m + n = 3$ имеем $\alpha = \beta = 0$, в этом случае „{0}“ будем опускать.

Лемма 2.2.1. *Существуют следующие расположения неособой кубики и особой кватики:*

$$A_6|+->; A_6|-+>; A_4|+-|A_2; A_4|-+|A_2; A_2|---|A_2\{0\}; A_4|+++>\{0\}. \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть $(x : y : z)$ — однородные координаты в $\mathbb{R}P^2$ и C_3 — M -кубика, овал O_3 которой касается оси $y = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$ и имеет в этой точке кривизну k (т.е. O_3 в окрестности этой точки определяется уравнением $y = kx^2 + \dots$), а нечетная ветвь J_3 пересекает эту ось в некоторой точке p .

Пусть коника C_2 касается оси $y = 0$ в точке p и имеет с J_3 еще пять различных общих точек (имеются две возможности такого расположения кривых C_3 и C_2 , показанные на рис. 4.1 и 4.2). Легко проверить, что образ $f_k(C_3)$ кубики C_3 при квадратичном преобразовании

$$f_k(x : y : z) = (xy : y^2 : yz - kx^2)$$

является кубикой с овалом $f_k(J_3)$ и нечетной ветвью $f_k(O_3)$, а $f_k(C_3 \cup C_2)$ реализует расположения $A_6|-+>$ в случае рис. 4.1 и $A_6|+->$ в случае рис. 4.2.

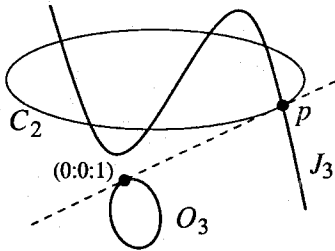


Рис. 4.1.

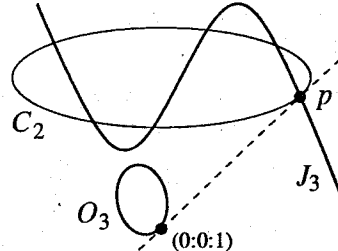


Рис. 4.2.

Пусть теперь C_3 — M -кубика, расположенная относительно координатных осей так, как показано на рис. 5.1. (Здесь ось $y = 0$ — касательная перегиба к нечетной ветви в точке $(0 : 0 : 1)$.) Определим новую M -кубику C'_3 уравнением

$$(yz - kx^2)(x - \epsilon z) + \delta y^3 = 0.$$

При $0 < \delta \ll \epsilon \ll k \ll 1$ получим расположение кривых C_3 и C'_3 , показанное на рис. 5.2. Расположение $A_4|+++>\{0\}$ получается как $f_k(C_3) \cup f_k(C'_3)$.

Еще две конфигурации из (2.1) строятся применением гиперболизма — квадратичного преобразования

$$h_y(x : y : z) = (x^2 : xy : yz).$$

Пусть овал кубики C_3 касается оси $y = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$, а также проходит через точку $(0 : 1 : 0)$. Тогда $A_4|+-|A_2$ и $A_4|-+|A_2$ реализуются в виде $h_y(C_3) \cup$

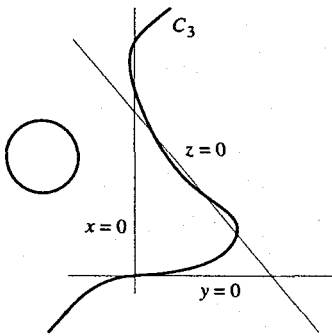


Рис. 5.1.

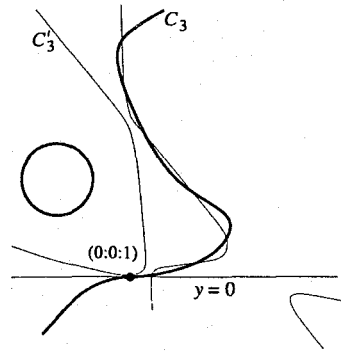


Рис. 5.2.

$hy(C_2)$, где C_2 — коника, пересекающая нечетную ветвь кубики C_3 в шести различных вещественных точках, в двух из которых C_2 касается осей $x = 0$ и $y = 0$. Как и выше, C_2 можно выбрать двумя способами.

Наконец, построим кривую $A_2 | \dots | A_2$. Рассмотрим эллипсы E и C' , пересекающиеся в точках p, p' и касающиеся в точке q . Проведем через p касательную L к C' . Пусть r — вторая точка пересечения L и E , а L' — касательная к E , проходящая через r (рис. 6.1). Положим

$$C = C' + \epsilon L^2, \quad H = L'^2 + \delta LL''.$$

Здесь мы одинаково обозначаем кривую и определяющий ее многочлен, причем считаем, что в области, помеченной на рис. 6.1 звездочкой, многочлен LL'' положителен, а C' — отрицателен. Тогда прямая L касается коник C и H в точках p и r соответственно, и при $0 < \delta \ll \epsilon \ll 1$ получим то, что показано на рис. 6.2. Разрезав $\mathbb{R}P^2$ вдоль L , получим диск, изображенный на рис. 6.3.

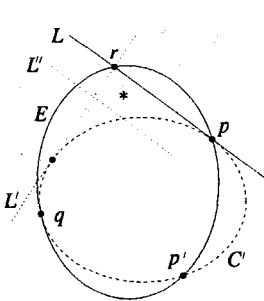


Рис. 6.1.

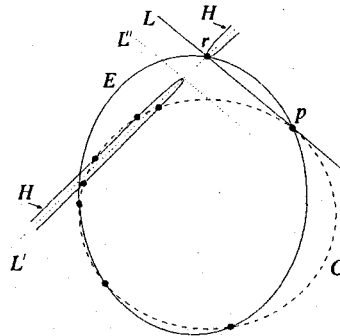


Рис. 6.2.

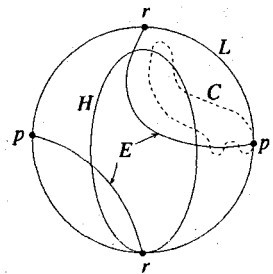


Рис. 6.3.

Раздуем на $\mathbb{R}P^2$ точку r (обозначим вклеенную прямую через R), а затем раздуем точку пересечения прямых R и L . (Вторую вклеенную прямую обозначим через F).

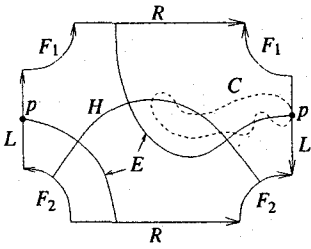


Рис. 6.4.

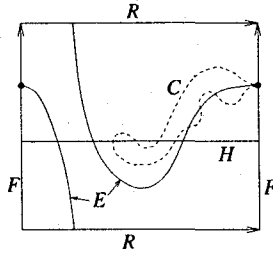


Рис. 6.5.

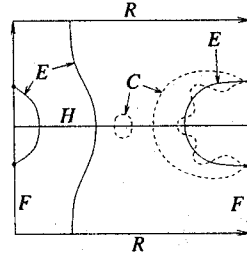


Рис. 6.6.

Получившаяся поверхность склеена из восьмиугольника, изображенного на рис. 6.4, в соответствии со стрелками на его границе. (F_1 и F_2 — части, на которые F делится прямыми R и L .)

На комплексификации этой поверхности индекс самопересечения кривой L равен -1 . Стягивая L в точку, получим (минимальную рациональную) линейчатую поверхность Σ_2 (рис. 6.5), причем F — слой, а R и H — сечения расслоения $\Sigma_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ с индексами самопересечения $R^2 = -2$ и $H^2 = 2$.

Рассмотрим двулистное накрытие $\xi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, разветвленное вдоль $H \cup R$. Тогда Σ_1 — линейчатая поверхность с индексами самопересечения сечений $R^2 = -1$ и $H^2 = 1$.

Комплексное сопряжение поднимается с Σ_2 на Σ_1 двумя способами. Выберем то поднятие, при котором множеством неподвижных точек служит $\mathbb{R}\Sigma_1 := \xi^{-1}(A)$, где A — верхняя (рис. 6.5) компонента множества $\mathbb{R}\Sigma_2 \setminus (R \cup H)$. Поверхность $\mathbb{R}\Sigma_1$ изображена на рис. 6.6 (мы одинаково обозначаем кривые на $\mathbb{R}\Sigma_2$ и их прообразы на $\mathbb{R}\Sigma_1$).

Стягивая R , получаем $\mathbb{R}P^2$ с требуемым расположением кватрики C и кубики E .

Последние две операции (переход к двулистному накрытию и стягивание кривой R) в терминах уравнений означают следующее. На

$$U := \mathbb{R}\Sigma_2 \setminus (R \cup F) \cong \mathbb{R}^2$$

можно выбрать аффинные координаты (x, y) , в которых H имеет вид $y = 0$, а слои расслоения $\Sigma_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ имеют вид $x = \text{const}$. Выберем знак координаты y так, что $y > 0$ сверху от H на рис. 6.5. Тогда уравнения требуемых кривых получаются из уравнений кривых на U (рис. 6.5) подстановкой $y = z^2$ с последующей проективизацией. Например, если $f(x, y) = 0$ — уравнение кривой C на U , то многогранником Ньютона многочлена f является треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 0)$, и тогда $f(x, z^2) = 0$ — уравнение кватрики, участвующей в конфигурации $A_2 | \text{---} | A_2$. Лемма 2.2.1 доказана. •

2.2.2. Построение возмущений. Теперь мы построим возмущения особенностей типа A_{2n} с учетом расположения относительно максимально касающейся гладкой ветви.

Пусть (x, y) — локальные координаты, в которых эта ветвь имеет вид $y = 0$. В соответствии с используемой выше системой кодировки обозначим через $A_{2n} |$

и $|A_{2n}$ особенности $y^2 = x^{n+1}$ и $y^2 = -x^{n+1}$ соответственно. Далее $\langle s_1 \dots s_n \{ \alpha \} \rangle$ будет обозначать последовательность блоков $B(\langle), B(s_1), \dots, B(s_n)$, расположенных вплотную один к другому вдоль оси $y = 0$, вне которых находятся α овалов в нижней полуплоскости и $\beta = n - \alpha$ овалов в верхней полуплоскости. Мы опишем только возмущения $A_{2n}|$, так как возмущения $|A_{2n}$ получаются из них отражением относительно вертикальной оси.

Предложение. Для любой последовательности знаков s_1, \dots, s_n существует возмущение $A_{2n}| \mapsto \langle s_1 \dots s_n \{ \alpha \} \rangle$, где α — число плюсов в последовательности $-s_1, s_2, -s_3, \dots, (-1)^n s_n$.

Доказательство. Требуемые возмущения строятся методом T -кривых Виро [12]. Пусть Δ — треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2n + 1, 0)$. Разобьем его на треугольники отрезками $[(0, 2), (2k + 1, 0)]$, $k = 1, \dots, n$, и произвольным образом продолжим это разбиение до примитивной триангуляции. Распределение знаков $s: \Delta \cap \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ зададим формулами $s(k, 0) = (-1)^k$, $s(0, 2) = 1$, $s(k, 1) = s_k$ при $k > 0$ (выбор $s(0, 1)$ не влияет на результат). •

Замечание. В работе [9] первым автором доказано, что таким образом получаются все M -расположения M -возмущений особенности A_{2n} относительно горизонтальной оси с точностью до „полужестких“ изотопий, т.е. изотопий, при которых кривая в каждый момент имеет не более двух пересечений с вертикальной прямой (говоря менее формально, получается изотопическая классификация, учитывающая порядок чередования овалов). Аналогичные результаты получены для M -кривых на линейчатых поверхностях, трехкратно пересекающих слои, с учетом расположения относительно исключительного сечения.

Следствие 2.2.2. Особенности A_2, A_4, A_6 обладают следующими возмущениями:

$$\begin{array}{lll}
 A_2| \rightarrow \langle +\{0\} & A_4| \rightarrow \langle ++\{1\} & A_6| \rightarrow \langle +++\{1\} \quad \langle -++\{2\} \\
 \quad \quad \quad \langle -\{1\} & \quad \quad \quad \langle +-\{0\} & \quad \quad \quad \langle +++\{2\} \quad \langle -+-\{3\} \\
 & \quad \quad \quad \langle -+\{2\} & \quad \quad \quad \langle -++\{0\} \quad \langle -+-\{1\} \\
 & \quad \quad \quad \langle --\{1\} & \quad \quad \quad \langle +--\{1\} \quad \langle ----\{2\}
 \end{array}$$

2.2.3. Построение расположений $C_3 \sqcup C_4$. Все реализуемые модели из теоремы 1, кроме моделей $\langle +++++\{0\} \rangle$ и $\langle +++-++\{0\} \rangle$, построенных в п. 2.1, получаются возмущением особых квартик в расположениях списка (2.1) способами, перечисленными в следствии 2.2.2. По поводу обоснования того, что любые возмущения из следствия 2.2.2 применимы к любой особенности из (2.1), см. замечание в конце работы [13].

При использовании принятой нами системы кодировки эти построения можно описать, как чисто формальную замену выражений $A_n|$ и $|A_n$ в кодах из (2.1) в соответствии с таблицей из следствия 2.2.2, сопровождаемую складыванием чисел, встречающихся в фигурных скобках. Например, из особого расположения $A_2|---|A_2\{0\}$ получаются модели

$$\langle +----\{0\} \rangle, \quad \langle +-----\{1\} \rangle, \quad \langle -----\{1\} \rangle, \quad \langle -----\{2\} \rangle,$$

где средние два расположения эквивалентны в силу симметрии. Все результаты построений (с учетом таких эквивалентностей) собраны в табл. 7 — см. переформулировку теоремы 1 в конце статьи.

§3. Запреты

3.1. Применение теории комплексных ориентаций. Напомним необходимые понятия и факты (детали можно найти в [14]). Если множество A вещественных точек неособой вещественной кривой степени n разбивает множество комплексных точек этой кривой, то последнее разбивается на две симметричные половины. Эти половины индуцируют на A как на общем крае две противоположные ориентации, которые называются *комплексными ориентациями*.

Пара овалов, один из которых охватывает другой, называется *инъективной парой*. Инъективная пара ориентированных овалов называется *положительной*, если их ориентации индуцированы некоторой ориентацией ограничиваемого ими кольца в $\mathbb{R}P^2$, и *отрицательной* — в противном случае. Если n нечетно, то овал O называется *положительным*, если

$$[O] = -2[J] \in H_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \text{Int } O),$$

где J — нечетная компонента кривой, и *отрицательным* — в противном случае. Для кривой степени n при $n = 2k$ имеет место *формула Рохлина*

$$2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - k^2, \tag{3.1}$$

а при $n = 2k + 1$ — *формула Рохлина-Мишачева*

$$\Lambda^+ - \Lambda^- + 2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - k(k + 1). \tag{3.2}$$

Здесь $\Pi^+(\Pi^-)$ и $\Lambda^+(\Lambda^-)$ обозначают количество положительных (отрицательных) инъективных пар и овалов кривой, а l — общее число овалов кривой.

Теория комплексных ориентаций позволяет запретить для каждой из допустимых моделей, изображенных на рис. 1, некоторые значения для пар (α, β) .

Пусть, например, модель $\langle++++\rangle\{\alpha\}$ реализуется некоторой кривой $C_3 \cup C_4$. Кубика C_3 и квартика C_4 обладают комплексными ориентациями как M -кривые, причем овал O_3 отрицателен в силу (3.2) при $k = l = 1$. Зафиксируем некоторую комплексную ориентацию кубики и выберем ориентацию овала O_4 , например, так, как показано на рис. 7. Пусть среди α и β свободных овалов квартики имеется α^+ и β^+ положительных относительно нечетной ветви J_3 , а остальные α^- и β^- овалов отрицательны.

Построим теперь неособую кривую степени 7 как результат малого возмущения кривой $C_3 \cup C_4$, устраняющего все ее 12 двойных точек согласованно с выбранными ориентациями (см. пунктир на рис. 7). Это можно сделать в силу теоремы Брюзотти. По теореме Фидлера ([15] или [14]) индуцированная при этом ориентация возмущенной кривой является ее комплексной ориентацией и, следовательно, должна удовлетворять формуле (3.2) с $k = 3$. В нашем примере мы имеем $l = 15$ (12 овалов, возникших при устранении особенностей, и 3 — из свободных овалов квартики),

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= \alpha^+ + \beta^+ + 6, & \Lambda^- &= \alpha^- + \beta^- + 6, \\ \Pi^+ &= \alpha^+, & \Pi^- &= \alpha^-, \end{aligned}$$

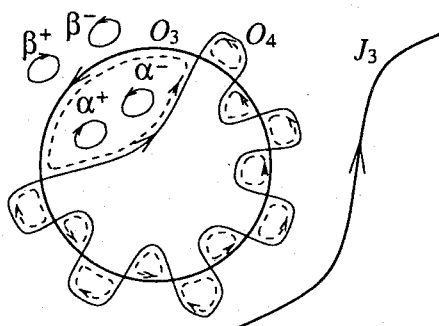


Рис. 7.

и формула (3.2) вместе с условием, что общее число свободных овалов равно 3, дает систему

$$\begin{cases} 3(\alpha^+ - \alpha^-) + (\beta^+ - \beta^-) = 3, \\ \alpha^+ + \alpha^- + \beta^+ + \beta^- = 3. \end{cases} \quad (3.3)$$

Осталось найти целые неотрицательные решения системы (3.3).

Таблица 1

№ пп.	α	α^+	α^-	β^+	β^-	Л.ч.	№ пп.	α	α^+	α^-	β^+	β^-	Л.ч.
1	3	3	0	0	0	9	11	1	1	0	2	0	5
2	3	2	1	0	0	3	12	1	1	0	1	1	3
3	3	1	2	0	0	-3	13	1	1	0	0	2	1
4	3	0	3	0	0	-9	14	1	0	1	2	0	-1
5	2	2	0	1	0	7	15	1	0	1	1	1	-3
6	2	2	0	0	1	5	16	1	0	1	0	2	-5
7	2	1	1	1	0	1	17	0	0	0	3	0	3
8	2	1	1	0	1	-1	18	0	0	0	2	1	1
9	2	0	2	1	0	-5	19	0	0	0	1	2	-1
10	2	0	2	0	1	-7	20	0	0	0	0	3	-3

Заметим теперь, что вид левой части первого уравнения в (3.3) один и тот же для всех моделей $O_3 \sqcup O_4$ из списка рис. 1. Правая часть этого уравнения зависит, вообще говоря, от взаимного расположения овалов O_3 и O_4 , а также от выбора ориентации овала O_4 , однако несложно проверить, что при смене этой ориентации меняется только знак правой части, а модуль остается неизменным.³ В табл. 1 перечислены все логически возможные наборы целых неотрицательных значений α^+ , α^- , β^+ , β^- , удовлетворяющие второму уравнению (3.3), и соответствующие значения левой части („Л.ч.“) первого уравнения

³Поэтому смена одной из исходных ориентаций на противоположную не даст новых запретов.

этой системы. Сопоставляя с ними возможные значения правой части этого уравнения („П.ч.“) для каждой модели рис. 1, приведенные в табл. 2, получаем запреты, указанные в последнем столбце этой таблицы. В частности, модель $\langle+++++\rangle\{2\}$ не может быть реализована никакой кривой степени 7.

Таблица 2

Коды расположений $O_3 \sqcup O_4$	П.ч.	Запрет
$\langle+++++\rangle\langle-+-+\rangle\langle---+\rangle\langle+----\rangle\langle+---+\rangle\langle-+---\rangle\langle+----\rangle$	± 3	$\alpha \neq 2$
$\langle---+\rangle\langle-+---\rangle\langle+----\rangle$	± 5	$\alpha \neq 0, 3$
$\langle-----\rangle$	± 7	$\alpha \neq 0, 1, 3$
Остальные коды списка рис. 1	± 1	$\alpha \neq 3$

3.2. Применение теории зацеплений.

3.2.1. Расположение кривой относительно пучка прямых. Пусть $C \subset \mathbb{R}P^2$ — модель вещественной кривой степени m , имеющей в качестве особенностей лишь простые двойные точки. Фиксируем точку $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus C$, и пусть \mathcal{L}_p — пучок прямых, проходящих через эту точку. Выберем аффинные координаты (x, y) так, что

(i) $\mathcal{L}_p = \{l_t\}$, где l_t — прямая, заданная уравнением $x = t$;

(ii) C имеет m различных вещественных точек пересечения с бесконечно удаленной прямой;

(iii) C находится в *общем положении* относительно \mathcal{L}_p , т.е. \mathcal{L}_p содержит конечное число *критических прямых* l_{x_1}, \dots, l_{x_q} , $x_1 < \dots < x_q$, и каждая из них имеет одну точку двукратного пересечения с C . (Другими словами, каждая из этих прямых либо касается C , либо пересекает кривую C в ее двойной точке без касания.)

Схему расположения кривой C относительно пучка \mathcal{L}_p будем кодировать, как и в [9], словом $u_1 \dots u_q$, где каждая буква u_i характеризует расположение кривой C в окрестности прямой l_{x_i} и принимает одно из значений \supset_k, \subset_k или \times_k ($k \in \{1, \dots, m-1\}$) в соответствии с рис. 8. Пару расположенных подряд символов $\subset_k \supset_k$ будем заменять одним символом σ_k („свободный овал в k -й полосе“).

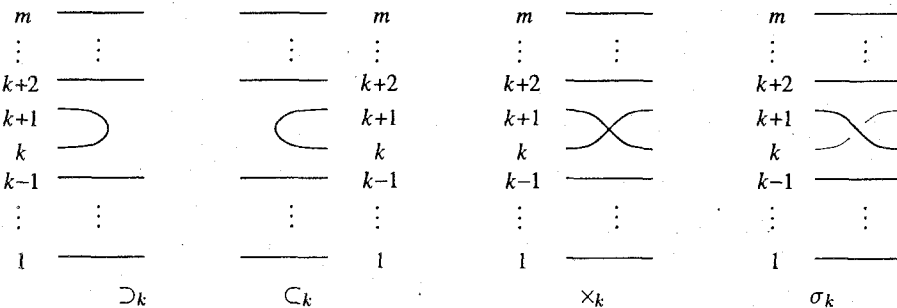


Рис. 8.

Пример. Предположим, что модель $\langle + - + - + \rangle \{2\}$ реализуется некоторой кривой $C = C_3 \cup C_4$. Пусть O_α^* — один из двух свободных овалов этой кривой, лежащих в области α , и p — точка внутри O_α^* . Тогда можно выбрать аффинные координаты (x, y) , удовлетворяющие перечисленным выше условиям, в которых C расположена так, как изображено на рис. 9.

В силу теоремы Безу остальные два свободных овала, O_α в области α и O_β в области β , должны находиться внутри вертикальной полосы $D = \{x_7 < x < x_{12}\}$, где l_{x_7} и $l_{x_{12}}$ — критические прямые, касающиеся овала O_4 . Множество $J_3 \cup O_3 \cup O_\alpha^*$ делит D на шесть горизонтальных полос, которые мы занумеруем числами от 1 до 6 снизу вверх (в порядке возрастания координаты y).

По теореме Безу ни одна прямая пучка \mathcal{L}_p (вертикальная прямая на рис. 9) не может пересекать оба овала O_α и O_β . Пусть левый из этих овалов расположен в i -й полосе, а правый — в j -й. Тогда схема расположения кривой C относительно \mathcal{L}_p кодируется словом

$$x_3 \times_2 \times_2 \times_3 \times_3 \times_2 \supset_3 0; 0_j \subset_4 \times_5 \times_4 \times_4 \times_5 \times_5 \times_4. \tag{3.4}$$

Поскольку полосы с номерами 2 и 5 (3 и 4) принадлежат одной области α (соответственно области β), то с учетом очевидной симметрии достаточно рассмотреть только случаи $(i, j) \in \{(2, 3), (2, 4), (5, 3), (5, 4)\}$.

Замечание. Чтобы в табл. 3 ниже запись кода была короче, вместо \times_k будем писать сам индекс k . Например, (3.4) будет иметь вид $32^23^22 \supset_3 0; 0_j \subset_4 54^25^24$.

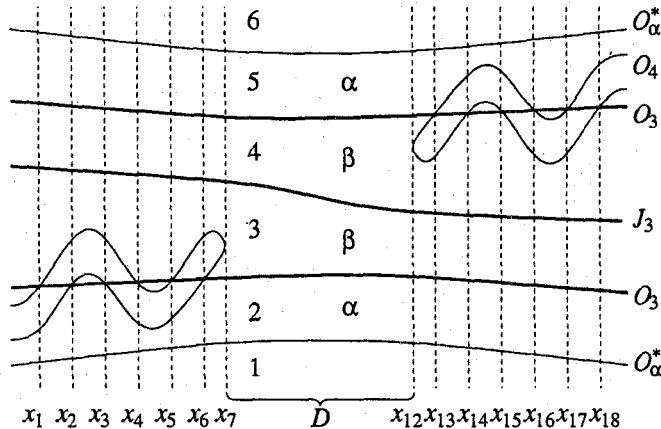


Рис. 9.

3.2.2. Коса вещественной алгебраической кривой. Напомним, что *коса* из m нитей — это график m -значной функции $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ с попарно-различными значениями в каждой точке, рассматриваемый с точностью до послышной изотопии, причем $F(0) = F(1) = \{y_1, \dots, y_m\}$, $\text{Re } y_1 < \dots < \text{Re } y_m$. Группа B_m кос из m нитей имеет стандартное копредставление

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i - j| > 1, \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ при } |i - j| = 1 \rangle,$$

где образующая σ_k показана на рис. 8, а ориентация выбирается так, что двузначной функции $F(t) = e^{\pm t\pi i}$, $t \in [0, 1]$, отвечает коса $\sigma_1 \in B_2$.

Замыканием косы $b \in B_m$ называется зацепление в \mathbb{R}^3 , полученное соединением концов $F(1)$ ее нитей с их началами $F(0)$ с помощью m дуг, проекции которых на плоскость не пересекаются.

Следуя [9], с вещественной алгебраической кривой C степени m и точкой $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus C$ сопоставим косу $b_{(C,p)} \in B_m$ следующим образом. Пусть $y = F(x)$ — m -значная функция, графиком которой является комплексификация кривой C , и пусть $x = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, — простая замкнутая кривая в верхней полуплоскости комплексификации оси Ox , охватывающая все значения x с $\text{Im } x > 0$, при которых l_x — критическая прямая пучка \mathcal{L}_p . Тогда $b_{(C,p)}$ — коса, соответствующая графику функции $y = F(\gamma(t))$. Эта коса, вообще говоря, зависит от начальной точки пути γ , но ее класс сопряженности, а значит, и замыкание, не зависят.

Если C имеет m вещественных точек пересечения с бесконечно удаленной прямой и не менее $m - 2$ вещественных точек пересечения с каждой из остальных прямых пучка \mathcal{L}_p , то несложно убедиться [9], что коса $b_{(C,p)}$ однозначно с точностью до сопряженности определяется видимым на $\mathbb{R}P^2$ расположением кривой C относительно пучка прямых \mathcal{L}_p .

Разложение косы $b_{(C,p)}$ на стандартные образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ получается следующим образом. Положим

$$\pi_{k,l} = \prod_{i=k}^l \sigma_i$$

(индекс i меняется последовательно от $i = k$ до $i = l$). Далее, положим

$$\tau_{k,l} = \pi_{l,k-1}^{-1} \pi_{k,l+1} \text{ и } \tau_{l,k} = \tau_{k,l}^{-1} \text{ при } k > l, \tau_{k,k} = 1, \\ \Delta_m = \pi_{1,m-1} \pi_{1,m-2} \dots \pi_{1,1}.$$

Тогда $b_{(C,p)} = b_{\mathbb{R}} \Delta_m$, где $b_{\mathbb{R}} \in B_m$ получается из кодирующего слова $u_1 \dots u_q$ (см. 3.2.1) применением следующих правил замены подслов:

- (i) $\supset_k \subset_l \mapsto \sigma_k^{-1} \tau_{k,l}$;
- (ii) $\supset_k \times_{i_1} \times_{i_2} \dots \times_{i_p} \subset_l \mapsto \sigma_k^{-1} \delta_1 \dots \delta_p \tau_{k,l}$, где

$$\delta_j = \begin{cases} \sigma_{i_j}^{-1} & \text{при } i_j < k - 1, \\ \sigma_{i_j+2}^{-1} & \text{при } i_j > k - 1, \\ \tau_{k,k+1} \sigma_{k-1}^{-1} \tau_{k+1,k} & \text{при } i_j = k - 1; \end{cases}$$

- (iii) каждый символ \times_i , не замененный по правилу (ii), заменяется на σ_i^{-1} .

Пример. Для слова (3.4) при $(i, j) = (2, 3)$ получаем

$$b_{\mathbb{R}} = \underbrace{\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-2} \sigma_3^{-2} \sigma_2^{-1}}_{\times_3 \times_2 \times_2 \times_3 \times_3 \times_2} \cdot \underbrace{\sigma_3^{-1} (\sigma_2^{-1} \sigma_3)}_{\supset_3 \subset_2} \cdot \underbrace{\sigma_2^{-1} (\sigma_3^{-1} \sigma_2)}_{\supset_2 \subset_3} \cdot \underbrace{\sigma_3^{-1} (\sigma_4^{-1} \sigma_3)}_{\supset_3 \subset_4} \cdot \underbrace{\sigma_5^{-1} \sigma_4^{-2} \sigma_5^{-2} \sigma_4^{-1}}_{\times_5 \times_4 \times_4 \times_5 \times_5 \times_4}.$$

3.2.3. Неравенство Мурасуги–Тристрама. Напомним некоторые определения. Пусть A — вещественная симметричная матрица и $B = QAQ^t$ — ее диагонализация. *Сигнатура* $\sigma(A)$ и *дефект* (nullity) $n(A)$ матрицы A определяются соответственно как сумма знаков диагональных элементов и число нулей на диагонали матрицы B .

Поверхностью Зейферта ориентированного зацепления L в трехмерной сфере S^3 называется связная ориентированная поверхность $X \subset S^3$, краем которой (с учетом ориентации) является L . Пусть x_1, \dots, x_n — базис в $H_1(X, \mathbb{Z})$. *Матрицей Зейферта* называется матрица из коэффициентов зацепления $\text{lk}(x_i, x_j^\dagger)$, где x_j^\dagger — результат малого сдвига цикла x_j вдоль поля положительных нормалей к X . *Сигнатура* $\sigma(L)$ и *дефект* $n(L)$ зацепления L определяются формулами

$$\sigma(L) = \sigma(V + V^t), \quad n(L) = 1 + n(V + V^t),$$

где V — матрица Зейферта.

Определим сигнатуру $\sigma(b)$ и дефект $n(b)$ косы b как сигнатуру и дефект ее замыкания и для $b = \prod \sigma_i^{k_i}$ положим $e(b) = \sum k_i$.

В [9] показано, что необходимым условием того, чтобы данная схема расположения кривой относительно пучка прямых \mathcal{L}_p была реализуема вещественной алгебраической кривой степени m , является неравенство Мурасуги–Тристрама, которое в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$|\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0, \quad b = b_{(C,p)} \in B_m. \quad (3.5)$$

Для вычисления матрицы Зейферта по заданной косе b мы пользовались несложной компьютерной программой, написанной первым автором для вычислений в [9]. Эта программа опирается на стандартный алгоритм построения поверхности Зейферта с помощью так называемых окружностей Зейферта, получающихся при сглаживании двойных точек на диаграмме зацепления; подробности см. в [9]. Этот алгоритм дает матрицу размером $s \times s$, где $s = e(b) + m - 1$.

3.2.4. Результаты вычислений. Здесь мы приводим результаты вычислений величин, входящих в неравенство (3.5), и полученные на этой основе запреты. Во второй и третьей колонках табл. 3 перечислены все модели, запрещенные с помощью теории зацеплений. В графе „N“ дан номер строки; в дальнейшем ссылка на k -ю строку табл. 3 имеет вид „Nk“. В графе „p“ следующим образом указан выбор точки p (центра пучка прямых):

- I — внутри свободного овала кривой C_4 из области α ;
- II — внутри пересечения внутренностей несвободных овалов O_3 и O_4 ;
- III — в области α вне овалов кривой C_4 , но в выпуклой оболочке овала O_4 ;
- IV — в области, помеченной звездочкой на третьей модели рис. 1 (данный выбор точки p мы используем только для этой модели).

В следующей колонке табл. 3 приведены коды взаимных расположений пучка \mathcal{L}_p и модели кривой $C_3 \cup C_4$. Заметим, что выбор месторасположения точки p определяет этот код с точностью до следующих замен фрагментов кодов:

$$x_j \supset j_{\pm 1} \leftrightarrow x_{j \pm 1} \supset j; \quad C_{j \pm 1} x_j \leftrightarrow C_j x_{j \pm 1}; \quad x_j u_k \leftrightarrow u_k x_j; \quad (3.6)$$

$$C_j \supset j_{\pm 1} \leftrightarrow \emptyset, \quad (3.7)$$

где $|k - j| > 1$ и u — любой из символов \times, \subset, \supset . Выбор вариантов из (3.6) не влияет на результаты вычислений, в случае (3.7) всегда будем выбирать

Таблица 3

№	Код модели	α	p	Код расположения	$e(b)$
1	$\langle+++++\rangle\{\alpha\}$	3	II	$\supset_2 o_2 o_2 1^{12} C_5$	6
2	$\langle+---+\rangle\{\alpha\}$	1,2	I	$32^2 3^2 2 \supset_3 o_i o_j C_4 54^2 5^2 4$	6
3	$\langle-+---\rangle\{\alpha\}$	0,1	IV	$2312^3 \supset_3 o_i o_j o_k C_3 2^3 132 \supset_3 C_4$	4
4	$\langle-++++\rangle\{\alpha\}$	0	II	$2^2 \supset_3 o_i o_j o_k 1^8 4 C_5 6$	5
5	$\langle++---+\rangle\{\alpha\}$	2	III	$5^2 \supset_6 o_i o_j o_k 2^3 1^2 2^3 C_6 5^2$	5
6	$\langle+++++\rangle\{\alpha\}$	2	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 2^2 1^2 2^6 C_5 6$	5
7	$\langle-+---+\rangle\{\alpha\}$	0,1	III	$6^2 \supset_5 o_i o_j o_k 12^6 1 C_5 6^2$	5
8	$\langle-+---+\rangle\{\alpha\}$	0,1	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 2^4 1^2 2^2 1^2 C_5 6$	5
9	$\langle-+---+\rangle\{\alpha\}$	1	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 2^2 1^2 2^4 1^2 C_5 6$	5
10	$\langle---+++\rangle\{\alpha\}$	0	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 2^6 1^4 C_5 6$	5
11	$\langle+---+++\rangle\{\alpha\}$	1	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 2^4 1^4 2^2 C_5 6$	5
12	$\langle---+++\rangle\{\alpha\}$	1	III	$6^2 \supset_5 o_i o_j o_k 1^3 2^2 1^3 C_5 6^2$	5
13	$\langle---+++\rangle\{\alpha\}$	0,3	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 2^2 1^2 2^2 1^4 C_5 6$	5
14	$\langle++----\rangle\{\alpha\}$	0,3	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 1^6 2^4 C_5 6$	5
15	$\langle+----+\rangle\{\alpha\}$	0	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 1^2 2^2 1^4 2^2 C_5 6$	5
16	$\langle-+----\rangle\{\alpha\}$	0	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 1^4 2^4 1^2 C_5 6$	5
17	$\langle+----+\rangle\{\alpha\}$	3	III	$5^2 \supset_6 o_i o_j o_k 21^6 2 C_6 5^2$	5
18	$\langle-+----\rangle\{\alpha\}$	1	III	$6 \supset_5 o_i o_j o_k 1^6 2^2 1^2 C_5 6$	5

Таблица 4

Строка №2				
α	i	j	σ	h
1	3	3	-2	2
1	3	4	-2	2
1	4	3	-4	4
2	2	3	-4	4
2	2	4	-2	2
2	5	3	-2	2
2	5	4	-2	2

Таблица 5

Строка	α	Рассмотренные наборы (ijk)
№4	0	(333)(334)(343)(344)(433)(434)(443)(444)
№5	2	(665)(664)(656)(646)
№6	2	(665)(664)(656)(646)(566)(466)
№7	0	(555)(554)(545)(544)(444)
№8, №10, №13-№16	0	(555)(554)(545)(544)(455)(454)(445)(444)
№7, №12	1	(655)(654)(645)(644)(565)(564)(464)
№8, №9, №11, №18	1	(655)(654)(645)(644)(565)(564)(556)(546) (465)(464)(456)(446)
№13, №14, №17	3	(666)

вариант „ \emptyset “ (см. предложение 3.6 [9]). Тогда

$$e(b) = 9 - \#(o) - \#(\supset),$$

где $\#(\cdot)$ — количество символов данного вида в коде (см. последний столбец табл. 3).

Для случая, рассматриваемого в этой статье, $m = 7$. Обозначим через h левую часть неравенства (3.5). Для строки № 1 вычисления дают $n = 1$, $\sigma = 2$, откуда $h = 2 + 7 - 6 - 1 = 2$, что противоречит неравенству (3.5), т.е. доказывает нереализуемость модели $\langle+++++\rangle\{3\}$.

В табл. 4 приведены все подлежащие рассмотрению наборы значений параметров i и j (т.е. возможные способы распределения свободных овалов с учетом симметрии — ср. с примером п. 3.2.1) для строки № 2, а в табл. 5 — наборы (i, j, k) для строк № 4–№ 18; наборы для строки № 3 содержатся в табл. 6.

Для строки № 2 вычисления дают $n = 1$ и значения величины σ , приведенные в табл. 4, откуда опять во всех случаях получаем $h > 0$. Для строк № 3–№ 18 имеем $e(b) < 6$, поэтому если $n = 1$, то для этих строк (3.5) дает запрет независимо от значения сигнатуры σ . Результаты вычислений для тех случаев, когда $n > 1$, собраны в табл. 6.

Итак, во всех случаях, включенных в табл. 3, $h > 0$, что и завершает доказательство теоремы 1.

Замечания. 1. Приведенные выше доказательства существенно опираются на „удачный“ выбор области (компоненты множества $\mathbb{R}P^2 \setminus C$) для точки p : вычисления показали, что далеко не при любом выборе неравенство (3.5) дает противоречие. С другой стороны, „удачный“ выбор этой области, вообще говоря, не единственный: например, модель $\langle---+\rangle\{1\}$ (см. строку № 3 в табл. 3) запрещается и при выборе типа „I“.

2. Модели, нереализуемые в силу п. 3.1, тоже могут быть запрещены методами п. 3.2. В п. 3.1 мы привели доказательства с помощью теории комплексных ориентаций, поскольку они значительно проще и не требуют компьютерных вычислений.

Таблица 6

Строка	α	i	j	k	n	σ	h	Строка	α	i	j	k	n	σ	h
№3	0	3	3	3	2	-1	2	№3	1	3	2	3	2	-3	4
№3	0	3	3	4	2	-3	4	№3	1	3	2	4	2	-3	4
№3	0	3	4	3	2	-3	4	№3	1	4	2	4	3	-2	2
№3	0	3	4	4	2	-3	4	№8	0	4	4	5	2	-2	2
№3	0	4	3	4	2	-3	4	№8	1	6	4	5	2	-2	2
№3	0	4	4	4	3	-2	2	№8	1	5	6	4	2	-2	2
№3	1	2	3	3	2	-1	2	№8	1	5	4	6	2	-2	2
№3	1	2	3	4	2	-3	4	№8	1	4	6	5	2	-2	2
№3	1	2	4	3	2	-3	4	№15	0	5	5	4	2	-2	2
№3	1	2	4	4	3	-2	2	№18	1	4	5	6	2	-2	2

Таблица 7

	{0}	{1}	{2}	{3}		{0}	{1}	{2}	{3}
<++++>	$\exists e$	$\exists 6$	с.о.		<+--->	$\exists 4$		$\exists 2$	с.о.
<+--->	$\exists e, 2, 3$			с.о.	<+--->	с.о.		$\exists 3$	с.о.
<+--->			с.о.	$\exists e, 1, 4$	<+--->		$\exists 2, 3$	с.о.	
<++++>		$\exists 1$	$\exists 6$	с.о.	<+--->		$\exists 4$	с.о.	
<+--->	$\exists e$	$\exists 4$		с.о.	<+--->		$\exists 1, 4$	с.о.	$\exists 2$
<+--->	$\exists 6$	$\exists 2, 3$		с.о.	<+--->		$\exists 1$	с.о.	$\exists 3$
<+--->			$\exists 1$	с.о.	<+--->	$\exists 5$	$\exists 2$	с.о.	
<+--->			$\exists 1, 4$	с.о.	<+--->	с.о.		$\exists 1, 4$	с.о.
<+--->	$\exists 1$		$\exists 2, 3$	с.о.	<+--->	с.о.	$\exists 5$	$\exists 2$	с.о.
<+--->		$\exists 6$	$\exists 3$	с.о.	<+--->	с.о.	с.о.	$\exists 5$	с.о.

Приведем в заключение эквивалентную теореме 1 формулировку, содержащую указания на методы доказательства.

Теорема 1'. Топологическая классификация троек $(\mathbb{R}P^2, C_3 \sqcup C_4, C_3)$ описывается табл. 7, где реализуемые модели и только они отмечены знаком „ \exists “, буква „e“ рядом с ним указывает на элементарное построение (см. п. 2.1), а цифры — порядковый номер возмущаемой кривой из списка (2.1) при построениях п. 2.2.3. Модели, запрещенные в п. 3.1 при помощи комплексных ориентаций (см. табл. 2), помечены буквами „с.о.“. Остальные модели (см. пустые клетки) запрещены в п. 3.2.

Список литературы

- [1] Полотовский Г. М., *Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка*, Докл. АН СССР 236 (1977), № 3, 548–551.
- [2] Полотовский Г. М., *$(M-1)$ - и $(M-2)$ -распадающиеся кривые 6-го порядка*, Методы качественной теории дифференциальных уравнений, Горьк. ун-т, Горький, 1978, сс. 130–148.
- [3] Polotovskii G. M., *On the classification of decomposing plane algebraic curves*, Real Algebraic Geometry (Rennes, 1991), Lecture Notes in Math., vol. 1524, Springer, Berlin, 1992, pp. 52–74.
- [4] Mikhalkin G., *Topological arrangement of curves of degree 6 on cubic surfaces in $\mathbb{R}P^3$* , J. Algebraic Geom. 7 (1998), 219–237.
- [5] Polotovskii G. M., *On the classification of decomposable 7-th degree curves*, Contemp. Math. (в печати).
- [6] Корчагин А. Б., Шустин Е. И., *Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки*, Изв. АН СССР. Сер. мат. 52 (1988), № 6, 1181–1199.
- [7] Шустин Е. И., *К изотопической классификации аффинных M -кривых степени 6*, Методы качественной теории и теории бифуркаций, Горьк. ун-т, Горький, 1988, сс. 97–105.
- [8] Ореков С. Ю., *Новая аффинная M -секстика*, Функц. анализ и его прил. 32 (1998), № 2, 91–94.
- [9] Orekov S. Yu., *Link theory and arrangements of real algebraic curves*, Topology 38 (1999), no. 4, 779–810.
- [10] Гудков Д. А., *Топология вещественных проективных алгебраических многообразий*, Успехи мат. наук 29 (1974), № 4, 3–79.
- [11] Гудков Д. А., Небукина Г. Ф., *Точки перегиба и двойные касательные кривых четвертого порядка*. 7, Горьк. ун-т, Горький, 1985, 15 с. (Рукопись деп. в ВИНТИ 18.09.85, № 6711-В).
- [12] Itenberg I., Viro O., *Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture*, Math. Intelligencer 18 (1996), no. 4, 19–28.
- [13] Шустин Е. И., *Новая M -кривая 8-й степени*, Мат. заметки 42 (1987), № 2, 180–186.
- [14] Рохлин В. А., *Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых*, Успехи мат. наук 33 (1978), № 5, 77–89.
- [15] Fiedler Th., *Eine Beschränkung für die Lage von reellen ebenen algebraischen Kurven*, Beiträge Algebra Geom. No. 11 (1981), 7–19.

Математический
институт РАН им. В. А. Стеклова
E-mail: orevko@mi.ras.ru

Поступило 17 сентября 1998 г.

Нижегородский университет,
Механико-математический факультет

Université Paul Sabatier (Toulouse)
E-mail: polot@curve.unn.ac.ru