B. G. Dragovich, Zeta-nonlocal scalar fields,
TMF, 2008, Volume 157, Number 3, 364–372

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 157, № 3
декабрь, 2008

 Б. Драгович*

ДЗЕТА-НЕЛОКАЛЬНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

Рассмотрены некоторые нелокальные и неполиномиальные модели скалярного поля, возникающие в теории p-адических струн. Бесконечное число пространственно-временных производных определяется операторнозначной дзета-функцией Римана через даламбертиан $\Box$ в качестве ее аргумента. Соответствующие лагранжианы L строятся исходя из точного лагранжиана $\mathcal{L}_p$ для эффективного поля p-адической тахионной струны, который обобщается посредством замены p на произвольное натуральное число n и суммированием $\mathcal{L}_n$ по всем n. Получен ряд основных классических свойств таких полей. В частности, изучены некоторые решения уравнений движения и их тахионные спектры. Теория поля с динамикой дзета-функции Римана интересна также и сама по себе.

Ключевые слова: нелокальная теория поля, p-адическая теория струн, дзета-функция Римана.

Посвящается Василию Сергеевичу Владимирову
в связи с 85-летием

1. ВВЕДЕНИЕ

Прошло уже два десятилетия со времени выхода первой публикации о p-адической струне [1]. К настоящему моменту разнообразные p-адические структуры наблюдались не только в теории струн, но и во многих других моделях современной математической физики (обзор развития теории струн см., например, в работах [2], [3]). Одно из наиболее значительных достижений теории p-адических струн состоит в эффективном полевом описании открытых скалярных p-адических струн [4], [5]. Эффективный тахионный лагранжиан очень прост и точен. Он описывает не только четырехточечные, но и все высшие амплитуды рассеяния на древесном уровне.

Теория p-адических струн получила значительное развитие, когда было показано [6], что она описывает тахионную конденсацию и бранные соотношения спуска проще, чем теория обычных бозонных струн. Вслед за этим были исследованы многие аспекты динамики p-адических струн в сравнении с динамикой обычных струн (см., например, [7]–[10] и приведенную там библиографию). Некоммутативная деформация мирового листа p-адической струны с постоянным B-полем исследовалась

*Institute of Physics, Belgrade, Serbia. E-mail: dragovich@phy.bg.ac.yu

в работах [11] (см. также [12]). Значительный интерес представляет систематическое математическое исследование пространственно однородных решений соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений движения (см. [9], [13]–[15] и приведенную там библиографию). Исследовались также некоторые возможные космологические следствия из теории p-адических струн [16]–[20]. В предположении, что теории p-адических струн дают решеточную дискретизацию мирового листа обычных струн [21], удалось воспроизвести некоторые нетривиальные свойства теории обыкновенных струн исходя из p-адического эффективного действия. Более того, были установлены многочисленные сходства и аналогии между p-адическими и обыкновенными струнами.

С помощью адельного подхода к струнным амплитудам рассеяния можно установить связь между p-адическими явлениями и их обычными аналогами [2], [3]. Более того, этот подход позволяет исключить параметр, задаваемый простым числом p, который содержится в p-адических амплитудах, а также исправить ситуацию, связанную с проблемой p-адического нарушения причинности. Было также сформулировано адельное обобщение квантовой механики и найдена связь между адельным вакуумным состоянием гармонического осциллятора и дзета-функцией Римана [22]. Интересный подход к обоснованию теории поля и космологии, основанный на использовании дзета-функции Римана, был предложен в работе [23]. Заметим, что и p-адический, и обычный секторы четырехточечных адельных струнных амплитуд содержат дзета-функцию Римана (см., например, [2], [3], [24]).

Основная цель настоящей работы – получить соответствующий эффективный лагранжиан для адельной скалярной струны. Поэтому сначала мы исследуем как можно вывести лагранжиан, связанный с p-адическим сектором адельной струны. Исходя из точного лагранжиана для эффективного поля p-адической тахионной струны, переходя от простого числа p к произвольному натуральному числу n и выполняя различные суммирования таких лагранжианов по всем n, получаем некоторые скалярные теории поля с операторнозначной дзета-функцией Римана. Дзета-функцию Римана, появляющуюся на классическом уровне, можно рассматривать как ее аналог в квантовой амплитуде рассеяния. Будет показано, что эта дзета-функция “управляет” пространственно-временной нелокальностью. Далее мы построим и исследуем некоторые классические полевые модели, с помощью которых можно будет описать некоторые свойства адельной открытой скалярной струны.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ДЗЕТА-НЕЛОКАЛЬНЫХ СКАЛЯРЫХ ПОЛЕЙ

На древесном уровне точный лагранжиан эффективного скалярного поля φ, описывающего тахион в открытой p-адической струне, имеет вид

$$\mathcal{L}_p = \frac{m_p^D}{g_p^2}\,\frac{p^2}{p-1}\left[-\frac{1}{2}\,\varphi\, p^{-\Box/(2m_p^2)}\,\varphi + \frac{1}{p+1}\,\varphi^{p+1}\right], \tag{1}$$

где p – любое простое число, а $\Box = -\partial_t^2 + \nabla^2$ – D-мерный даламбертиан; мы используем метрику с сигнатурой $(-,+,\ldots,+)$. Бесконечное число пространственно-временных производных возникает из разложения

$$p^{-\Box/(2m_p^2)} = \exp\left[-\frac{1}{2m_p^2}\ln p\,\Box\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\ln p}{2m_p^2}\right)^k \frac{1}{k!}\,\Box^k.$$

Уравнения движения для лагранжиана (1) имеют вид

$$p^{-\Box/(2m_p^2)}\,\varphi = \varphi^p. \tag{2}$$

Уравнение (2) исследовалось многими авторами (см., например, [9], [13]–[15] и приведенную там библиографию).

Стоит отметить, что простое число p в (1) и (2) можно заменить любым натуральным числом $n \geqslant 2$ так, что выражения по-прежнему будут иметь смысл. Более того, при $p = 1 + \varepsilon \to 1$ выражение для лагранжиана (1) имеет предел

$$\mathcal{L} = \frac{m^D}{g^2}\left[\frac{1}{2}\,\varphi\,\frac{\Box}{m^2}\,\varphi + \frac{\varphi^2}{2}\,(\ln\varphi^2 - 1)\right], \tag{3}$$

который связан с обыкновенной бозонной струной в струнной теории поля с границей [25].

Введем модель, включающую в себя все струнные лагранжианы (1), в которых p заменено на $n \in \mathbb{N}$. Для этого возьмем сумму всех лагранжианов $\mathcal{L}_n$ в виде

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathcal{L}_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\frac{m_n^D}{g_n^2}\,\frac{n^2}{n-1}\left[-\frac{1}{2}\,\phi\,n^{-\Box/(2m_n^2)}\,\phi + \frac{1}{n+1}\,\phi^{n+1}\right], \tag{4}$$

где явная реализация зависит от конкретного выбора коэффициентов C_n, масс m_n и постоянных взаимодействия g_n. Чтобы избежать проблемы с расходимостью $1/(n-1)$ при $n = 1$, следует учесть, что $C_n\,m_n^D/g_n^2$ пропорционально $n-1$. В данной работе мы рассмотрим случай, когда коэффициенты C_n пропорциональны $n-1$, а массы m_n и константы взаимодействия g_n не зависят от n, т.е. $m_n = m$, $g_n = g$. Поскольку рассматривается подход к эффективному лагранжиану адельной струны, имеет смысл выбрать массу и константу взаимодействия, не зависящие от конкретных p или n. Пусть адельный физический объект имеет фиксированные параметры с рациональными значениями. Чтобы подчеркнуть, что лагранжиан (4) описывает новое поле, отличное от частного p-адического, введем обозначение ϕ вместо φ. При $n = 1$ оба слагаемых в (4) равны с точностью до знака, но мы оставим их, поскольку они обеспечивают подходящий вид полного лагранжиана L.

Рассмотрим простой случай

$$C_n = \frac{n-1}{n^{2+h}}\,, \tag{5}$$

где h – вещественное число. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L_h = \frac{m^D}{g^2}\left[-\frac{1}{2}\,\phi\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\Box/(2m^2)-h}\,\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-h}}{n+1}\,\phi^{n+1}\right] \tag{6}$$

и зависит от параметра h.

Согласно формуле Эйлера можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\Box/(2m^2)-h} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-\Box/(2m^2)-h}}.$$

Напомним, что стандартное определение дзета-функции Римана имеет вид

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \qquad s=\sigma+i\tau, \qquad \sigma>1. \tag{7}$$

Это выражение допускает аналитическое продолжение на всю плоскость комплексных s, за исключением точки $s=1$, где оно имеет простой полюс с вычетом 1. Пользуясь определением (7), можно переписать (6) в виде

$$L_h = \frac{m^D}{g^2}\left[-\frac{1}{2}\,\phi\,\zeta\left(\frac{\Box}{2\,m^2}+h\right)\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-h}}{n+1}\,\phi^{n+1}\right]. \tag{8}$$

Здесь $\zeta\big(\Box/(2m^2)+h\big)$ действует как псевдодифференциальный оператор

$$\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2}+h\right)\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^D}\int e^{ixk}\,\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2}+h\right)\tilde{\phi}(k)\,dk, \tag{9}$$

где $\tilde{\phi}(k) = \int e^{-ikx}\,\phi(x)\,dx$ – преобразование Фурье функции $\phi(x)$. Лагранжиан L_0 с ограничением на импульсы $-k^2 = k_0^2-\vec{k}^2 > (2-2h)m^2$ и поле $|\phi|<1$ исследовались в работе [26]. Ниже мы рассмотрим лагранжиан (8) с аналитическим продолжением дзета-функции и степенным рядом $\sum n^{-h}\phi^{n+1}/(n+1)$, т.е.

$$L_h = \frac{m^D}{g^2}\left[-\frac{1}{2}\,\phi\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2}+h\right)\phi + \mathcal{AC}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-h}}{n+1}\,\phi^{n+1}\right], \tag{10}$$

где $\mathcal{AC}$ означает аналитическое продолжение.

Нелокальная динамика этого поля ϕ содержится в псевдодифференциальном виде дзета-функции Римана. Когда в аргументе дзета-функции Римана присутствует даламбертиан, мы будем говорить, что имеется дзета-нелокальность. Соответственно указанное поле ϕ является дзета-нелокальным скалярным полем.

Потенциал указанного дзета-скалярного поля (10) равен $-L_h$ при $\Box=0$, т.е.

$$V_h(\phi) = \frac{m^D}{g^2}\left(\frac{\phi^2}{2}\,\zeta(h) - \mathcal{AC}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-h}}{n+1}\,\phi^{n+1}\right), \tag{11}$$

где $h\neq 1$, поскольку $\zeta(1)=\infty$. Слагаемое с дзета-функцией обращается в нуль при $h=-2,-4,-6,\dots$.

Уравнения движения в дифференциальном и интегральном виде записываются в виде

$$\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2}+h\right)\phi = \mathcal{AC}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-h}\phi^n, \tag{12}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int_{\mathbb{R}^D} e^{ixk}\,\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2}+h\right)\tilde{\phi}(k)\,dk = \mathcal{AC}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-h}\phi^n. \tag{13}$$

Очевидно, что $\phi = 0$ является тривиальным решением для любого вещественного h. Существование других тривиальных решений зависит от параметра h. При $h > 1$ имеется другое тривиальное решение $\phi = 1$.

В приближении слабого поля (т.е. при $|\phi(x)| \ll 1$) выражение (13) принимает вид

$$\int_{\mathbb{R}^D} e^{ikx} \left[\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + h\right) - 1\right] \tilde{\phi}(k)\, dk = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) имеет решение $\tilde{\phi}(k) \neq 0$, если выполнено условие

$$\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + h\right) = 1. \tag{15}$$

С учетом обычного соотношения $k^2 = -k_0^2 + \vec{k}^2 = -M^2$ уравнение (15) переписывается в виде

$$\zeta\left(\frac{M^2}{2m^2} + h\right) = 1 \tag{16}$$

и определяет спектр масс $M^2 = \mu_h\, m^2$, где набор значений спектральной функции μ_h зависит от h.

Уравнение (16) дает бесконечное множество решений с тахионной массой. А именно, функция $\zeta(s)$ непрерывна для вещественных $s \neq 1$ и меняет знак при переходе через нули $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно соотношению $\zeta(1-2n) = -B_{2n}/(2n)$ и в соответствии со значениями чисел Бернулли ($B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$, $B_{12} = -691/2730$, $B_{14} = 7/6$, $B_{16} = -3617/510$, $B_{18} = 43867/798, \dots$) получается, что $|\zeta(1-2n)| = |B_{2n}/(2n)| > 1$ тогда и только тогда, когда $n \geqslant 9$. С учетом областей, где $\zeta(1-2n) > 0$, мы заключаем, что уравнение $\zeta(s) = 1$ имеет два решения при $-20-4j < s < -18-4j$ для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$. Соответственно для любого $h \in \mathbb{Z}$ получаем бесконечно много тахионных масс

$$M^2 = -(40 + 8j + 2h - a_j)m^2 \qquad \text{и} \qquad M^2 = -(36 + 8j + 2h + b_j)m^2, \tag{17}$$

где $a_j \ll 1$, $b_j \ll 1$ и $j = 0, 1, 2, \dots$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗНАЧЕНИЙ h

Среди бесконечно большого числа возможных значений h в (5) рассмотрим пять ($h = 0, \pm 1, \pm 2$), которые представляют наибольший интерес. Случай $h = -2$ соответствует простейшему виду коэффициентов C_n, которые содержат $n-1$. В случае $h = -1$ коэффициенты $C_n = (n-1)/n \to 1$ при больших n и лагранжианы $\mathcal{L}_n$ учитываются почти единообразно. В случае $h = 0$ коэффициенты $C_n = (n-1)/n^2$ обратны соответствующим значениям из $\mathcal{L}_n$, что сильно упрощает полученные выражения. Анализ случаев $h = 1$ и $h = 2$ позволяет получить более глубокое представление о поведении лагранжиана L_h вблизи $h = 0$.

3.1. Случай $h = -2$. Лагранжиан (10), соответствующий потенциал и уравнение движения имеют вид

$$L_{-2} = \frac{m^D}{g^2}\left[-\frac{1}{2}\,\phi\,\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2} - 2\right)\phi + \frac{2\phi^2 - \phi}{(1-\phi)^2} - \frac{1}{2}\ln(1-\phi)^2\right], \tag{18}$$

$$V_{-2}(\phi) = \frac{m^D}{g^2}\left[\frac{\phi - 2\phi^2}{(1-\phi)^2} + \frac{1}{2}\ln(1-\phi)^2\right], \tag{19}$$

$$\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2} - 2\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D}\int_{\mathbb{R}^D} e^{ixk}\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} - 2\right)\tilde{\phi}(k)\,dk = \frac{\phi(\phi+1)}{(1-\phi)^3}. \tag{20}$$

Потенциал $V_{-2}(\phi)$ имеет один локальный минимум $V_{-2}(-1) \approx -0.057m^D/g^2$ и один локальный максимум $V_{-2}(0) = 0$. Он сингулярен при $\phi = 1$ (т.е. $\lim_{\phi\to 1} V_{-2}(\phi) = -\infty$) и, кроме того, $\lim_{\phi\to\pm\infty} V_{-2}(\phi) = +\infty$. Уравнение движения (20) имеет два тривиальных решения: $\phi(x) = 0$ и $\phi(x) = -1$. Решение $\phi(x) = -1$ можно также получить, если взять $\tilde{\phi}(k) = -\delta(k)(2\pi)^D$ и учесть, что $\zeta(-2) = 0$ в (20).

3.2. Случай $h = -1$. Соответствующий лагранжиан, потенциал и уравнение движения имеют вид

$$L_{-1} = \frac{m^D}{g^2}\left[-\frac{1}{2}\,\phi\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2} - 1\right)\phi + \frac{\phi}{1-\phi} + \frac{1}{2}\ln(1-\phi)^2\right], \tag{21}$$

$$V_{-1}(\phi) = \frac{m^D}{g^2}\left[\frac{\zeta(-1)}{2}\,\phi^2 - \frac{\phi}{1-\phi} - \frac{1}{2}\ln(1-\phi)^2\right], \tag{22}$$

$$\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2} - 1\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D}\int_{\mathbb{R}^D} e^{ixk}\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} - 1\right)\tilde{\phi}(k)\,dk = \frac{\phi}{(1-\phi)^2}, \tag{23}$$

где $\zeta(-1) = -1/12$. Потенциал (22) обладает следующими свойствами: он имеет локальный максимум $V_{-1}(0) = 0$, $\lim_{\phi\to 1-0} V_{-1}(\phi) = -\infty$, $\lim_{\phi\to 1+0} V_{-1}(\phi) = +\infty$, $\lim_{\phi\to\pm\infty} V_{-1}(\phi) = -\infty$, для него отсутствует устойчивый вакуум. Уравнение движения (23) имеет постоянное тривиальное решение только при $\phi(x) = 0$.

3.3. Случай $h = 0$. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L_0 = -\frac{m^D}{g^2}\left[\frac{1}{2}\,\phi\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2}\right)\phi + \phi + \frac{1}{2}\ln(1-\phi)^2\right]. \tag{24}$$

Потенциал принимает вид

$$V_0(\phi) = \frac{m^D}{g^2}\left[\frac{\zeta(0)}{2}\,\phi^2 + \phi + \frac{1}{2}\ln(1-\phi)^2\right], \tag{25}$$

где $\zeta(0) = -1/2$. Он имеет два локальных максимума: $V_0(0) = 0$ и $V_0(3) \approx 1.443m^D/g^2$, нет устойчивых точек и $\lim_{\phi\to 1} V_0(\phi) = -\infty$, $\lim_{\phi\to\pm\infty} V_0(\phi) = -\infty$. Уравнение движения имеет вид

$$\zeta\left(\frac{\Box}{2\,m^2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D}\int_{\mathbb{R}^D} e^{ixk}\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2}\right)\tilde{\phi}(k)\,dk = \frac{\phi}{1-\phi}. \tag{26}$$

Оно имеет два решения: $\phi = 0$ и $\phi = 3$. Решение $\phi = 0$ очевидно, а решение $\phi = 3$ следует из разложения Тейлора дзета-функции Римана

$$\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2}\right) = \zeta(0) + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\zeta^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{\Box}{2m^2}\right)^n \tag{27}$$

при $\tilde{\phi}(k) = (2\pi)^D\, 3\,\delta(k)$.

3.4. Случай $h = 1$. Аналогично предыдущему случаю имеем

$$L_1 = \frac{m^D}{g^2}\left[-\frac{1}{2}\phi\,\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2} + 1\right)\phi + \phi + \frac{1-\phi}{2}\ln(1-\phi)^2\right], \tag{28}$$

$$V_1(\phi) = \frac{m^D}{g^2}\left[\frac{\zeta(1)}{2}\,\phi^2 - \phi - \frac{1-\phi}{2}\ln(1-\phi)^2\right], \tag{29}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int_{\mathbb{R}^D} e^{ixk}\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + 1\right)\tilde{\phi}(k)\,dk = -\frac{1}{2}\ln(1-\phi)^2, \tag{30}$$

где $V_1(\phi) = \infty$, поскольку $\zeta(1) = \infty$.

3.5. Случай $h = 2$. В этом случае имеем

$$L_2 = \frac{m^D}{g^2}\left[-\frac{1}{2}\,\phi\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2} + 2\right)\phi - \frac{1-\phi}{2}\ln(1-\phi)^2 - \phi - \phi\int_0^\phi \frac{\ln(1-w)^2}{2w}\,dw\right], \tag{31}$$

$$V_2(\phi) = \frac{m^D}{g^2}\left[\frac{\zeta(2)}{2}\phi^2 + \frac{1-\phi}{2}\ln(1-\phi)^2 + \phi + \phi\int_0^\phi \frac{\ln(1-w)^2}{2w}\,dw\right], \tag{32}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int_{\mathbb{R}^D} e^{ixk}\zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + 2\right)\tilde{\phi}(k)\,dk = -\int_0^\phi \frac{\ln(1-w)^2}{2w}\,dw. \tag{33}$$

Поскольку выполнено равенство

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-w)}{w}\,dw = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2),$$

уравнение (33) имеет тривиальное решение $\phi = 1$.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При построении эффективной теории поля адельной открытой скалярной струны мы вывели несколько лагранжианов, которые содержат все соответствующие n-адические лагранжианы ($n \in \mathbb{N}$). В результате получено, что бесконечное число пространственно-временных производных и соответствующая нелокальность "управляются" дзета-функцией Римана. Потенциалы неполиномиальны, спектр масс тахиона определяется некоторыми уравнениями, p-адические лагранжианы легко восстановить из дзета-лагранжиана, используя для их построения обратную процедуру.

В данной работе описаны некоторые основные классические свойства введенного дзета-скалярного поля. Остается еще много вопросов, которые необходимо исследовать в классическом случае. Один из них – систематическое изучение уравнений движения и нетривиальных решений. В квантовом случае было бы полезно исследовать амплитуды рассеяния и провести сравнение с адельной струной.

Используя приведенную выше процедуру, имеет смысл рассматривать конструкцию лагранжиана для открыто-замкнутой дзета-струны исходя из p-адического лагранжиана [2]. Заметим, что эффективный лагранжиан для открыто-замкнутых p-адических струн можно также использовать для анализа тахионной конденсации [27].

Благодарности. Данная работа была выполнена при частичной поддержке со стороны Министерства науки Сербии, контракт № 144032D. Автор благодарит И. Я. Арефьеву, В. С. Владимирова и И. В. Воловича за полезные обсуждения, Д. Гошала за ряд замечаний и П. Г. О. Фрейнда, предложившего автору рассмотреть адельный подход. Данная работа выполнена во время пребывания автора в Математическом институте им. В. А. Стеклова в Москве.

Список литературы

[1] И. В. Волович, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 337–340; I. V. Volovich, *Class. Quantum Grav.*, **4**:4 (1987), L83–L87.
[2] L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66.
[3] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
[4] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **302**:3 (1988), 365–402.
[5] P. H. Frampton, Y. Okada, *Phys. Rev. D*, **37**:10 (1988), 3077–3079.
[6] D. Ghoshal, A. Sen, *Nucl. Phys. B*, **584**:1–2 (2000), 300–312; arXiv: hep-th/0003278.
[7] J. A. Minahan, *JHEP*, **03** (2001), 028; arXiv: hep-th/0102071.
[8] A. Sen, *JHEP*, **10** (2002), 003; arXiv: hep-th/0207105.
[9] N. Moeller, B. Zwiebach, *JHEP*, **10** (2002), 034; arXiv: hep-th/0207107.
[10] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, A. S. Koshelev, *JHEP*, **09** (2003), 012; arXiv: hep-th/0301137.
[11] D. Ghoshal, T. Kawano, *Nucl. Phys. B*, **710**:3 (2005), 577–598; arXiv: hep-th/0409311; P. Grange, *Phys. Lett. B*, **616**:1–2 (2005), 135–140; arXiv: hep-th/0409305.
[12] B. Dragovich, I. V. Volovich, "p-Adic strings and noncommutativity", *Noncommutative Structures in Mathematics and Physics*, NATO Sci. Ser. II, Math. Phys. Chem., **22**, eds. S. Duplij, J. Wess, Kluwer, Dordrecht, 2001, 391–399; D. Ghoshal, *JHEP*, **09** (2004), 041; arXiv: hep-th/0406259.
[13] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 355–368; arXiv: math-ph/0306018.
[14] В. С. Владимиров, *ТМФ*, **149**:3 (2006), 354–367; arXiv: 0705.4600.
[15] N. Barnaby, N. Kamran, *Dynamics with infinitely many derivatives*: *the initial value problem*, arXiv: 0709.3968v1.
[16] I. Ya. Aref'eva, "Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy", *p-Adic Mathematical Physics*, AIP Conf. Proc., **826**, AIP, New York, 2006, 301–311; arXiv: astro-ph/0410443.
[17] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 3–12; arXiv: hep-th/0612098.
[18] N. Barnaby, T. Biswas, J. M. Cline, *JHEP*, **04** (2007), 056; arXiv: hep-th/0612230.

[19] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, S. Yu. Vernov, *JHEP*, **07** (2007), 087; `arXiv: hep-th/0701184`.
[20] G. Calcagni, M. Montobbio, G. Nardelli, *Phys. Rev. D*, **76**:12 (2007), 126001; `arXiv: 0705.3043`.
[21] D. Ghoshal, *Phys. Rev. Lett.*, **97**:15 (2006), 151601.
[22] Б. Г. Драгович, *ТМФ*, **101**:3 (1994), 349–359; *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:16 (1995), 2349–2365; `arXiv: hep-th/0404160`.
[23] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **4**:5 (2007), 881–895; `arXiv: hep-th/0701284`.
[24] I. Ya. Aref'eva, B. G. Dragovich, I. V. Volovich, *Phys. Lett. B*, **209**:4 (1988), 445–450.
[25] A. Gerasimov, S. Shatashvili, *JHEP*, **10** (2000), 034; `arXiv: hep-th/0009103`.
[26] B. Dragovich, *Zeta strings*, `arXiv: hep-th/0703008`.
[27] N. Moeller, M. Schnabl, *JHEP*, **01** (2004), 011; `arXiv: hep-th/0304213`.

Поступила в редакцию 25.04.2008