Математические заметки

Том 81 выпуск 4 апрель 2007

УДК 517.9+514.745.8

Общая линейная задача изомонодромной деформации фуксовых систем

В. А. Побережный

В отличие от нерезонансных систем, непрерывные деформации которых всегда являются шлезингеровскими деформациями, в системах с резонансами имеются большие возможности для деформирования. В этом случае в число непрерывных параметров деформации помимо положения полюсов системы включаются данные, описывающие левелевскую структуру системы, или другими словами, распределение резонансных направлений в пространстве решений. Встает вопрос о виде и структуре деформаций по этим параметрам. В данной работе рассмотрены непрерывные изомонодромные деформации фуксовых систем, в том числе и по дополнительным параметрам, описана соответствующая линейная задача и найден вид пфаффовой формы линейной задачи общей непрерывной изомонодромной деформации фуксовых систем.

Библиография: 10 названий.

В изучении фуксовых систем и их изомонодромных деформаций особую сложность представляют резонансы. В резонансных особых точках нарушаются многие свойства системы, имеющие место в отсутствие резонансов, также усложняются и изомонодромные деформации систем с резонансами. Заметить это можно на примере линейных задач изомонодромных деформации, показывающем также и общую связь между понятиями интегрируемости и изомонодромности. Речь идет о том, что изомонодромность семейства фуксовых систем равносильна интегрируемости некоторой переопределенной пфаффовой системы многих переменных $dy = \omega y$. В нерезонансном случае форма ω всегда, с точностью до не зависящей от z калибровки, имеет шлезингеровский вид

$$\omega = \omega_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\, d(z - a_i),$$

и никаких других непрерывных изомонодромных деформаций нерезонансных фуксовых систем нет. В резонансном случае, как показано А. Болибрухом, форма ω может принимать более сложный вид

$$\omega = \omega_s + \omega_{\mathrm{res}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\, d(z - a_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\gamma_{ijk}}{(z - a_i)^k}\, da_j.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00642), фонда PICS (грант № 2094), фонда NWO (грант № 047.017.2004.015) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-6849.2006.1).

Однако эта форма построена в предположении, что параметрами деформации являются лишь положения особых точек $(a_1, \dots, a_n)$. В то же время, непрерывные изомонодромные деформации резонансных фуксовых систем не исчерпываются деформациями, зависящими лишь от набора полюсов системы. Существуют дополнительные непрерывные параметры, определяющие распределение асимптотик системы вблизи резонансных особых точек. И по этим параметрам также возможно построение непрерывной изомонодромной деформации.

В настоящей работе изучены наиболее общие непрерывные изомонодромные деформации и описана отвечающая им линейная пфаффова система. Основным результатом работы является теорема 6, описывающая максимально общую пфаффову форму изомонодромной деформации:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_s + \omega_n + \omega_{\mathrm{res}} + \omega_{\mathrm{add}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a,s)}{z-a_i}\, d(z-a_i) + \sum_{l=1}^{n} c_l(a,s)\, da_l \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\gamma_{ijk}(a,s)}{(z-a_i)^k}\, da_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j:a_j\in\widetilde{\mathscr{D}}}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\widetilde{\gamma}_{ijk}}{(z-a_i)^k}\, ds_j.\end{aligned}$$

1. Предварительные сведения

1.1. Фуксовы системы. В этом пункте мы изложим некоторые факты из теории фуксовых уравнений и систем, которые нам потребуются в дальнейшем. Основными объектами, исследуемыми в данной работе, являются фуксовы системы и их изомонодромные деформации. Система

$$\dot{y} = B(z)y, \qquad y \in \mathbb{C}^n, \quad B(z) \in M_n(\mathbb{C}),$$

называется *фуксовой в особой точке* $z = 0$, если $B(z)$ имеет в нуле полюс первого порядка. Система, не имеющая других особых точек, кроме фуксовых, называется *фуксовой системой*. Легко видеть, что на $\mathbb{CP}^1$ всякая фуксова система имеет вид

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z-a_i}\, y,$$

где $\sum_{i=1}^{n} B_i = 0$. Особая точка системы называется *регулярной*, если у любой компоненты решения рост в ней, при стремлении z к этой точке по сектору, раствор которого меньше 2π, не более, чем степенной. Известно [1], [2], что фуксовы системы являются регулярными. Важнейшую роль в описании фуксовых систем играют их асимптотики, представленные левелевскими нормированиями. *Левелевское нормирование* в точке a_i для функции $f(z)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_{a_i}(f) = \sup\Big\{\lambda \in \mathbb{Z} : \frac{f(z)}{(z-a_i)^\lambda} \to 0 \text{ при } z \to a_i,\ z \in S\Big\}$$

где S – сектор с вершиной в a_i и раствором менее 2π. То есть левелевским нормированием называют целую часть скорости роста функции при стремлении к особой точке по любому из секторов раствора меньше 2π. Нормирования вектора и матрицы определяются как минимум нормирований компонент. Базисы пространства решений системы, в которых представлены все возможные в данной особой точке асимптотики, называются *слабо ассоциированными* в этой точке и обладают рядом важных и удобных для работы с системой свойств. *Левелевским* мы будем называть слабо ассоциированный базис, в котором монодромия блочно-диагональна, каждый из блоков верхнетреуголен и отвечает корневому подпространству монодромии.

Утверждение 1 [3]. *В слабо ассоциированном в точке a_i базисе фундаментальная матрица системы с регулярной особой точкой a_i допускает разложение*

$$Y(z)=U_i(z)(z-a_i)^{A_i}(z-a_i)^{E_i},$$

где E_i – нормализованный логарифм матрицы монодромии G_i, $A_i=\operatorname{diag}(\varphi_i^1,\dots,\varphi_i^p)$ – целочисленная диагональная матрица нормирований столбцов, $U_i(z)$ голоморфна в окрестности a_i. Система фуксова в a_i тогда и только тогда, когда $\det U_i(a_i)\neq 0$.

Числа $\beta_i^j=\varphi_i^j+\rho_i^j$, стоящие на диагонали матрицы $A_{a_i}+E_{a_i}$, полученной разложением матрицы ассоциированного в a_i базиса, называются *показателями системы в точке a_i*. Набор показателей системы в точке a_i совпадает со спектром B_i – матрицы вычета коэффициентов системы.

Утверждение 2 (соотношение Фукса; [4]). *Сумма показателей системы с регулярными особыми точками – неположительное целое число; система фуксова тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_i^j=0.$$

Фуксова особая точка системы называется *резонансной*, если существуют хотя бы два показателя системы в этой точке, различающиеся на натуральное число. Резонансные особые точки выделяются среди прочих тем, что в них могут нарушаться некоторые соотношения и свойства, характерные для нерезонансных точек. Например, в нерезонансном случае базис пространства решений, в котором матрица монодромии имеет жорданов вид, является слабо ассоциированным, а вычет B_i сопряжен с матрицей A_i+E_i. В резонансном случае данные свойства могут нарушаться. Заметим также, что в нерезонансном случае существует не более, чем одна фуксова система с заданными особенностями, монодромией и показателями. В то же время, в резонансном случае могут существовать существенно различные системы, у которых эти характеристики совпадают, т.е. нарушается единственность решения проблемы Римана–Гильберта.

1.2. Изомонодромные деформации. Понятие изомонодромных деформаций фуксовых систем связано с вложением некоторой фиксированной фуксовой системы в семейство систем, голоморфно зависящее от некоторых параметров. Обычно такими параметрами является набор особых точек системы $a=(a_1,\dots,a_n)$. Иными словами, задача построения изомонодромной деформации состоит в том, чтобы, имея некоторую фуксову систему

$$\frac{dy}{dz}=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i^0}{z-a_i^0}\,y, \tag{1}$$

построить семейство

$$\frac{dy}{dz}=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i(a)}{z-a_i}\,y \tag{2}$$

такое, чтобы $B_i(a_0) = B_i^0$ и чтобы при всяком фиксированном $a = a^*$ монодромия получающейся фуксовой системы совпадала с монодромией системы (1).

С изомонодромными деформациями линейных систем тесно связаны системы пфаффова вида. Пфаффовы системы являются ярким примером, иллюстрирующим важный феномен специального вида связи нелинейных задач с линейными задачами в большей размерности или с большим числом параметров. То есть они являются примером связи, при которой нелинейные задачи предлагается рассматривать как результат ограничения или предельного перехода некоторых больших линейных систем. В частности, условие изомонодромности семейства деформации равносильно условию совместности некоторой системы линейных уравнений в частных производных.

Говоря подробнее, начальную фуксову систему (1) можно представить в виде $dy = \omega_0 y$, где ω_0 – матричная 1-форма по переменной z. Семейство же (2) представляется ограничением на сферу некоторой матричной 1-формы ω, зависящей как от z, так и от параметров деформации. Следующее утверждение показывает эквивалентность изомонодромности семейства (2) вполне интегрируемости переопределенной пфаффовой системы $dy = \omega y$. Обозначим через Z прямое произведение сферы Римана с координатой z на шар с центром в точке a_0 в пространстве параметров деформации. Обычно за параметры деформации берут набор $(a_1, \dots, a_n)$ и $Z = \mathbb{CP}^1 \times (D(a_0) \setminus \bigcup_{i=1}^n \{z = a_i\})$.

Теорема 1 [5]. *Семейство* (2) *фуксовых систем является изомонодромным тогда и только тогда, когда на* Z *существует дифференциальная* 1*-форма* ω, *обладающая следующими свойствами*:

1) $d\omega = \omega \wedge \omega$;
2) $\omega|_{a=a^*} = \sum_{i=1}^n B_i(a^*)/(z - a_i^*)\, dz$ *для всех* $a^* \in D(a_0)$.

Иными словами, изомонодромная деформация линейной системы – это деформация погружения сферы в некоторое многомерное пространство с вполне интегрируемым распределением.

Одним из наиболее известных видов изомонодромных деформаций является шлезингеровская изомонодромная деформация. Соответствующая ей форма ω имеет вид

$$\omega_s = \sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i}\, d(z - a_i). \tag{3}$$

Условие интегрируемости распределения $dy = \omega_s y$ имеет вид

$$dB_i = -\sum_{j \neq i} \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j). \tag{4}$$

Полученное соотношение называется *уравнением Шлезингера*. Данное уравнение давно служит предметом активного изучения. Исследование его было начато еще Д. Биркгофом и Л. Шлезингером в начале 20-го века.

Известно [6], [7], что уравнение Шлезингера интегрируемо, т.е. для любой исходной фуксовой системы существует ее шлезингеровская изомонодромная деформация.

Помимо шлезингеровских известны и другие деформации.

Теорема 2 [8]. *Всякая матричная* 1*-форма на*

$$Z = \mathbb{CP}^1 \times \left(D(a_0) \setminus \bigcup_{i=1}^n \{z - a_i = 0\} \right),$$

обладающая свойствами, описанными в теореме 1, имеет вид

$$\omega = \omega_s + \omega_n + \omega_{\text{res}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\, d(z - a_i) + \sum_{l=1}^{n} c_l(a)\, da_l + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{\gamma_{ijk}(a)}{(z - a_i)^k}\, da_j. \quad (5)$$

Через r_i в третьем слагаемом обозначен максимальный i-резонанс системы, т.е. максимальная из существующих натуральных разностей, между всеми возможными парами нормирований в точке a_i. Из данной теоремы вытекают несколько важных утверждений.

Следствие 1. *Если все матрицы B_i семейства (2) нерезонансны, то задающая деформацию форма является шлезингеровской либо ненормализованной шлезингеровской.*

Этот факт следует непосредственно из того, что в нерезонансном случае $r_i = 0$ при всех i. Таким образом, $\omega_{\text{res}} = 0$ и, следовательно, $\omega = \omega_s + \omega_n$, т.е. ω связана с ω_s не зависящей от z калибровкой.

Стоит также заметить, что, как и в случае фуксовых систем, единственность изомонодромной деформации нерезонансной системы не переносится на резонансный случай. Если в нерезонансном случае не существует других изомонодромных деформаций, кроме шлезингеровской, и изомонодромное семейство однозначно определено своими начальными данными, в резонансном случае могут иметься существенно различные изомонодромные семейства с одинаковыми начальными условиями. Данное свойство объясняется тем, что в резонансном случае существует возможность деформировать распределение асимптотик по пространству решений, в то время как в нерезонансном случае асимптотики жестко связаны с данными монодромии. Другими словами, в резонансном случае возникают дополнительные возможности деформации левелевской фильтрации с сохранением структуры монодромии.

2. Калибровочные преобразования фуксовых систем и их изомонодромных семейств

Калибровочные преобразования являются важным инструментом исследования линейных систем дифференциальных уравнений. Известны многие успешные примеры их применения. В частности, с их помощью были вычислены многие группы симметрий уравнений и показана разрешимость проблемы Римана–Гильберта в размерности 2.

Под *калибровочным преобразованием* Γ будем понимать переход от системы линейных дифференциальных уравнений

$$dy = \omega y \qquad (6)$$

к системе

$$d\widetilde{y} = \widetilde{\omega}\widetilde{y} \qquad (7)$$

с помощью преобразования

$$y \mapsto \widetilde{y} = \Gamma y, \qquad \omega \mapsto \widetilde{y} = d\Gamma\Gamma^{-1} + \Gamma\omega\Gamma^{-1}. \qquad (8)$$

Легко заметить, что данное преобразование отвечает замене базиса в сечениях расслоения. Если матрица Γ мероморфна и голоморфно обратима вне особых точек $a_1, \dots, a_n$, а система (6) регулярна, то система (7) также будет иметь лишь регулярные особые точки и ту же самую монодромию. В то же время, фуксовость системы при подобных преобразованиях может нарушаться. Этот вопрос требует более тонкого исследования и будет рассмотрен ниже.

Мы будем использовать калибровочные преобразования для изменения левелевских нормирований пространства решений. В следующих пунктах данного раздела будут рассмотрены калибровки, повышающие некоторое выбранное нормирование, понижающие его, а также условия сохранения фуксовости при калибровочных преобразованиях системы.

2.1. Повышение нормирования. Пусть задана фуксова система

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z-a_i}\, y. \tag{9}$$

Построим калибровку, увеличивающую на единицу собственное значение β_i^j матрицы B_i. Рассмотрим левелевский в точке a_i базис пространства решений системы

$$Y_{\mathrm{lev}} = U_i(z)(z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{E_i}. \tag{10}$$

В данном пункте мы покажем, что простейшей калибровкой, увеличивающей на единицу нормирование k-го столбца матрицы Y_{lev}, является преобразование

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ & & z-a_i & & \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} U_i^{-1}(a_i). \tag{11}$$

Здесь $z-a_i$ стоит на k-м месте, где k – номер столбца Y, являющегося собственным вектором оператора монодромии, отвечающим собственному значению $e^{2\pi\sqrt{-1}\,\beta_i^j}$. Существенным свойством базиса $U_i^{-1}(a_i)Y$ является то, что каждый столбец голоморфно обратимой части левелевского разложения имеет лишь один ненулевой элемент и, следовательно, для увеличения нормирования достаточно умножить этот единственный элемент на $z-a_i$. Если ненулевых элементов было бы несколько, то умножение одного из них на $z-a_i$ не приводит к увеличению нормирования всего столбца в целом. Подробнее это рассуждение выглядит так. Пусть k-й столбец матрицы Y_{lev} является собственным вектором оператора монодромии G_i с собственным значением $e^{2\pi\imath\beta_i^j}$ и имеет вид

$$\begin{pmatrix} {}^1a_1 + {}^1a_2(z-a_i) + \cdots \\ \vdots \\ {}^ka_1 + {}^ka_2(z-a_i) + \cdots \\ \vdots \\ {}^pa_1 + {}^pa_2(z-a_i) + \cdots \end{pmatrix} (z-a_i)^{\varphi_i^j}(z-a_i)^{\rho_i^j}, \tag{12}$$

где φ_i^j – нормирование столбца, а ρ_i^j – нормализованный логарифм его монодромии. После умножения Y_{lev} на $U_i^{-1}(a_i)$ у полученной матрицы k-й столбец остается собственным вектором и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 + {}^1\widetilde{a}_2(z-a_i) + \cdots \\ \vdots \\ 1 + {}^2\widetilde{a}_k(z-a_i) + \cdots \\ \vdots \\ 0 + {}^p\widetilde{a}_2(z-a_i) + \cdots \end{pmatrix} (z-a_i)^{\varphi_i^j}(z-a_i)^{\rho_i^j}. \tag{13}$$

Теперь видно, что после умножения Y_{lev} на Γ у матрицы произведения k-й столбец будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 + {}^1\widetilde{a}_2(z-a_i) + \cdots \\ \vdots \\ (z-a_i) + {}^2\widetilde{a}_k(z-a_i)^2 + \cdots \\ \vdots \\ 0 + {}^p\widetilde{a}_2(z-a_i) + \cdots \end{pmatrix} (z-a_i)^{\varphi_i^j}(z-a_i)^{\rho_i^j} = \begin{pmatrix} {}^1\widetilde{a}_2 + \cdots \\ \vdots \\ 1 + \cdots \\ \vdots \\ {}^p\widetilde{a}_2 + \cdots \end{pmatrix} (z-a_i)^{\varphi_i^j+1}(z-a_i)^{\rho_i^j}. \tag{14}$$

Видно, что нормирование k-го столбца в результате проделанного преобразования увеличилось на единицу. Проведя аналогичное рассмотрение для прочих столбцов Y_{lev}, легко проверить, что их нормирования при преобразовании не изменяются.

Опишем подобную калибровку с точки зрения матрицы коэффициентов системы. Как несложно заметить, при сопряжении матрицы (a_{ij}) на матрицу $\operatorname{diag}(z^{k_1},\dots,z^{k_2})$ получается матрица с элементами вида $(a_{ij}z^{k_i-k_j})$. Следовательно, для того чтобы после сопряжения на $\operatorname{diag}(1,\dots,z-a_i,\dots,1)$ матрица $B=\sum B_k/(z-a_k)$ не имела полюсов второго порядка, матрица вычета B_i не должна иметь в своем k-м столбце ненулевых элементов, за исключением k-го, равного β_i^j. Этого всегда можно добиться сопряжением $B(z)$ на некоторую постоянную матрицу C. Действительно, достаточно выбрать k-м столбцом C^{-1} собственный вектор оператора B_i с собственным значением β_i^j. Очевидно, без ограничения общности можно полагать $k=1$. Таким образом, общим видом мероморфного калибровочного преобразования, увеличивающего собственное значение β_i^j матрицы B_i на единицу, является

$$\Gamma = \operatorname{diag}(z-a_i,1,\dots,1)C, \tag{15}$$

где C таково, что

$$CB_iC^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_i^j & * & & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & * & & * \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Заметим также, что рассматриваемое преобразование голоморфно-обратимо во всех прочих особых точках системы. Итак, в данном пункте доказаны следующие свойства преобразования Γ.

Утверждение 3. *Описанное калибровочное преобразование Γ увеличивает на единицу ровно один наперед выбранный показатель системы и сохраняет фуксовость системы во всех ее особых точках.*

Полученная калибровка не является для нас окончательно удовлетворительной. Ее важным недостатком является возникновение при ее применении ложной особой точки в бесконечности. Данной проблемы и следовало ожидать в виду нарушения равенства Фукса. После изменения ровно одного показателя для компенсации возникшей разницы потребовалась дополнительная особая точка. Ниже будет рассмотрен способ решения этой проблемы.

2.2. Понижение нормирования. Метод уменьшения некоторого выбранного показателя системы аналогичен уже рассмотренному способу увеличения нормирования. Тем не менее, есть и некоторые отличия.

Для левелевского базиса Y_{lev} с дополнительным свойством $U_i(a_i)=I$ искомой калибровкой, очевидно, является $\operatorname{diag}(1,\dots,(z-a_i)^{-1},\dots,1)$, где $(z-a_i)^{-1}$ опять стоит на месте, соответствующем столбцу, являющемуся собственным вектором монодромии с собственным значением β_i^j. Существенным здесь является отсутствие ненулевых элементов в k-й строке голоморфно обратимой части левелевского разложения, за исключением k-го. Нарушение этого свойства ведет к уменьшению не одного нормирования, а нескольких, отвечающих ненулевым элементам строки. Данное несовпадение (требование к строке, а не к столбцу) со случаем повышения нормирования объясняется тем, что правильно понимать повышение нормирования как повышение в некотором собственном направлении, а понижение как понижение “поперек” некоторой собственной гиперплоскости оператора B_i.

Наблюдая эту калибровку с точки зрения вычетов системы, аналогично предыдущему пункту видим, что

$$\Gamma = \operatorname{diag}((z-a_i)^{-1}, 1, \dots, 1)C, \tag{17}$$

где C выбирается так, чтобы выполнялось

$$CB_iC^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_i^j & 0 & \dots & 0 \\ * & & & * \\ & & & \\ * & & \dots & * \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Очевидно, такой выбор C всегда возможен. Достаточно взять в качестве столбцов со второго по n-й произвольную комбинацию собственных векторов B_i с собственными значениями не равными β_i^j. В случае, если значению β_i^j отвечает одна жорданова клетка, первым столбцом следует взять младший присоединенный вектор. Это соответствует тому факту, что левелевская фильтрация пространства решений связана с жордановой, нормирования элементов жорданова базиса упорядочены по убыванию внутри каждой клетки.

Утверждение 4. *Калибровочное преобразование* Γ *уменьшает на единицу ровно один наперед выбранный показатель системы и сохраняет фуксовость системы во всех ее особых точках.*

Как и при повышении нормирования, применение данной калибровки приводит к возникновению ложной особой точки в бесконечности. Способ компенсировать этот эффект приведен в следующем пункте.

2.3. Калибровки, сохраняющие фуксов вид системы. Как следует из соотношения Фукса на показатели системы, невозможно изменить ровно одно нормирование системы так, чтобы она осталась фуксовой и не имела дополнительных особых точек. Следовательно, увеличив какое-либо нормирование системы, для того чтобы не добавлять новых особых точек, необходимо понизить какое-нибудь из нормирований системы, в той же или другой точке. Соответствующая калибровка будет являться композицией уже известных нам понижающей и повышающей калибровок. Для удобства записи и вычислений рассмотрим случай системы ранга 2. Данное ограничение не является существенным. На системы прочих размерностей данная техника переносится без изменений.

Итак, построим калибровку, уменьшающую на единицу выбранный нами показатель в точке a_j и повышающую некоторый выбранный показатель в точке a_i. В соответствии с результатами предыдущих пунктов такое преобразование можно построить в следующей форме:

$$\Gamma_1(z) = \begin{pmatrix} z-a_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-a_j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь $(-s,1)$ являются координатами собственного вектора матрицы B_j с собственным значением, дополнительным к тому показателю, который мы хотим уменьшить. То есть для преобразования $\beta_j^2 \mapsto \beta_j^2 - 1$ необходимо потребовать, чтобы $(-s,1)$ был собственным вектором B_j с собственным значением β_j^1. В случае, когда B_j – жорданова клетка, $(-s,1)$ следует выбрать в собственном направлении B_j. Иными словами, s выбирается так, чтобы выполнялось

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_j \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_j^2 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Аналогично и вектор $(1,-t)$ следует выбрать в собственном направлении $\widetilde{B}_i$ со значением, равным показателю, который мы хотим повысить. Через $\widetilde{B}_i$ мы обозначили вычет в фуксовой особой точке a_i системы, получающейся после промежуточной калибровки

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-a_j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Калибровка $\Gamma_1(z)$ не меняет характера системы в особых точках a_k при $k \neq i,j$ и оставляет систему фуксовой в точках a_i, a_j, изменяя соответствующим образом по одному из нормирований в этих точках. Для отсутствия после такой калибровки ложной особой точки в бесконечности необходимо и достаточно голоморфной обратимости $\Gamma_1(z)$ при $z=\infty$. Перемножив компоненты Γ_1, легко увидеть, что

$$\Gamma_1(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{z-a_i}{z-a_j} & \dfrac{s(z-a_i)}{z-a_j} \\ \dfrac{t}{z-a_j} & 1+\dfrac{st}{z-a_j} \end{pmatrix} \tag{22}$$

действительно является голоморфно обратимой в точке $z=\infty$ матрицей. Таким образом, нами построено калибровочное преобразование, сохраняющее монодромию системы, множество ее особых точек, фуксов вид системы и меняющее ровно два наперед выбранных показателя, отвечающих разным особым точкам системы.

Рассмотрим теперь случай, когда оба изменяемых показателя – и повышающийся, и понижающийся – отвечают одной особой точке a_i. В этом случае искомая калибровка будет иметь вид

$$\Gamma_2(z) = \begin{pmatrix} z-a_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-a_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Относительно калибровки $\Gamma_2(z)$ следует заметить, что, хотя ее вид во многом похож на Γ_1, некоторые их свойства существенно различны. Так, например, входящий в матрицу коэффициентов преобразованной системы член $d\Gamma_2\Gamma_2^{-1}$ будет иметь в точке a_i полюс второго порядка. Тем не менее, сама система останется фуксовой, так как данный полюс сократится с членами $\Gamma_2 B\Gamma_2^{-1}$, имеющими полюса второго порядка. Данное свойство обеспечивается правильным выбором параметра t. Прямая подстановка калибровки Γ_2 в преобразования (8) дает следующее условие на t:

$$t = \left(\sum_{j\neq i} \frac{b_{12}^j}{a_i - a_j} \right)^{-1}, \tag{24}$$

где b_{12}^j – верхние правые элементы матриц B_i семейства, полученного калибровкой на два правых множителя, входящих в состав Γ_2. Можно заметить, что в точках, где

$$\sum_{j\neq i}\frac{b_{12}^j}{a_i-a_j}=0,$$

данная система будет иметь особенности. Некоторые отличия будут видны и при использовании построенной калибровки для порождения резонансов в изомонодромных семействах. Тем не менее, калибровка $\Gamma_2(z)$ будет переводить фуксову систему в фуксову с той же монодромией, особыми точками и показателями, кроме двух показателей в точке a_i. Отсутствие ложной особой точки в бесконечности следует из голоморфной обратимости Γ_2 в точке $z=\infty$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} z-a_i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-a_i} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ \dfrac{t}{z-a_i} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{25}$$

является матрицей, голоморфно обратимой в бесконечности.

2.4. Калибровочные преобразования изомонодромных семейств. Построенные калибровочные преобразования практически без изменений можно распространить с фуксовых систем на их изомонодромные семейства. При этом в общем случае входившие в преобразования постоянные матрицы станут зависеть от a. Действительно, эти матрицы строились с помощью собственных и присоединенных векторов матриц вычетов B_i и B_j. Все построения калибровок переносятся без изменений, только теперь собственные векторы $(-s,1)$ и $(1,-t)$ становятся зависящими от a. Кроме того, применительно к изомонодромным семействам принято рассматривать калибровочные преобразования, нормированные на бесконечности условием $\Gamma(\infty,a)\equiv 1$. Очевидным способом нормировать $\Gamma(z,a)$ является переход $\Gamma(z,a)\mapsto\Gamma^{-1}(\infty,a)\Gamma(z,a)$. Поправленные таким образом калибровки Γ_1 и Γ_2 будут иметь вид

$$\Gamma_1(z,a)=\begin{pmatrix} 1 & -s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z-a_i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-a_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{26}$$

или

$$\Gamma_1(z,a)=\begin{pmatrix} \dfrac{z-a_i}{z-a_j}-\dfrac{st}{z-a_j} & \dfrac{s(a_i-a_j)}{z-a_j}-\dfrac{s^2t}{z-a_j}\\ \dfrac{t}{z-a_j} & 1+\dfrac{st}{z-a_j}\end{pmatrix} \tag{27}$$

и

$$\Gamma_2(z,a)=\begin{pmatrix} 1 & -s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z-a_i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-a_i} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{28}$$

или

$$\Gamma_2(z,a)=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{st}{z-a_i} & -\dfrac{s^2t}{z-a_i}\\ \dfrac{t}{z-a_i} & 1+\dfrac{st}{z-a_i}\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Итак, нами построены калибровки, переводящие изомонодромные семейства фуксовых систем в изомонодромные семейства с двумя измененными показателями.

Один из наперед заданных показателей повышается, другой понижается. Фундаментальная матрица останется нормализованной на бесконечности, $(\Gamma_i Y)(\infty, a) \equiv I$. Иными словами, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *При определенном выше выборе параметров s, t калибровки вида $\Gamma_{1,2}$ переводят изомонодромное фуксово семейство ω в изомонодромное фуксово семейство $\widetilde{\omega}$ с той же монодромией и теми же показателями, за исключением двух*:

$$\widetilde{\beta}_i^k = \beta_i^k + 1, \qquad \widetilde{\beta}_j^l = \beta_j^l - 1$$

для калибровок вида Γ_1 и

$$\widetilde{\beta}_i^k = \beta_i^k + 1, \qquad \widetilde{\beta}_i^l = \beta_i^l - 1$$

для калибровок вида Γ_2, для выбранных i, j, k, l.

3. Резонансные изомонодромные деформации

В данном разделе будем предполагать, что ранг рассматриваемых систем равен 2. Данное ограничение не является существенным, все рассуждения и результаты без труда можно перенести на системы больших рангов. Однако проводить вычисления и исследовать явный вид систем удобнее в размерности 2.

Итак, пусть задано некоторое изомонодромное семейство. Запишем его в пфаффовом виде

$$dy = \omega y \tag{30}$$

и рассмотрим возможности применения калибровочных преобразований $\Gamma_{1,2}(z, a)$, описанных в предыдущем разделе к выбранному изомонодромному семейству в точке a_i.

Как известно (см. теорему 2), если особая точка a_i нерезонансна, то особая на $\{z - a_i = 0\}$ часть ω имеет вид $B_i(a)/(z - a_i)$. Рассмотрим ее изменение под действием калибровки $\Gamma_2(a, z)$. Если в результате калибровки точка остается нерезонансной, то по все той же теореме, сохраняется и вид соответствующего слагаемого в форме ω. Иначе обстоит дело при порождении с помощью калибровки Γ_2 резонанса в точке a_i.

Итак, пусть вычет B_i системы в точке a_i равен λI. Применим калибровку

$$\Gamma_2(z, a) = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - a_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z - a_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

изменяющую показатели в этой точке на $\lambda - 1$, $\lambda + 1$. Очевидно, что параметр s может быть выбран абсолютно произвольным образом. Он отвечает за выбор направления собственных векторов матрицы B_i', являющейся вычетом системы, получаемой калибровкой исходной системы на два правых множителя Γ_2. Так как матрица B_i' перестает быть скалярной, то при выборе параметра t мы уже не имеем никакой свободы. Он жестко определяется выбором s и коэффициентами исходной системы с помощью уже упомянутого соотношения фуксовости результирующей системы, что эквивалентно правильному выбору собственного направления.

Таким образом, мы пришли к следующему факту.

Теорема 4. *Калибровка вида Γ_2, применяемая в точке a_i с диагональным скалярным вычетом, добавляет к изомонодромному семейству еще один параметр – s, отвечающий за изменение матрицы связи левелевского базиса в a_i с некоторым* *фиксированным базисом. Соответствующий s член в пфаффовой форме полученного таким образом изомонодромного семейства имеет вид*

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma_2\right)\Gamma_2^{-1}\,ds = \begin{pmatrix} \dfrac{-t}{z-a_i}+\dfrac{st^2}{(z-a_i)^2} & \dfrac{-2st}{z-a_i}+\dfrac{st^2}{(z-a_i)^2} \\ \dfrac{-t^2}{(z-a_i)^2} & \dfrac{t}{z-a_i}-\dfrac{st^2}{(z-a_i)^2} \end{pmatrix} ds. \tag{31}$$

Следствие 2. *Если наложить на s ограничения вида $s=s(a)$, т.е. задать s как функцию от набора $a_1,\dots,a_n$, то член $(\partial/\partial s(\Gamma_2))\Gamma_2^{-1}\,ds$ перейдет в сумму вида*

$$\omega_{\mathrm{res}}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\frac{\gamma_{jk}(a)}{(z-a_i)^k}\,da_j,$$

т.е. примет описанный нами ранее общий вид изомонодромной нешлезингеровской деформации в точке с порядком резонанса 2.

Следствие 3. *С помощью описанной процедуры, возможно повторенной несколько раз, можно получить все возможные фуксовы системы и (при условии, что все остальные точки нерезонансные) изомонодромные семейства с исходной монодромией и показателями в точках a_j для $j\neq i$.*

Действительно, единственный произвол в выборе фуксовой системы с одной резонансной точкой лежит в матрице связи соответствующего левелевского базиса с каноническим левелевским базисом в какой-нибудь точке с недиагональной монодромией или резонансными показателями. Это соответствует выбору некоторого выделенного направления в слое над точкой a_i, в котором система имеет максимальное нормирование. Но по построению Γ_2 мы имеем возможность получить любое возможное собственное направление. Следовательно, таким образом можно получить все возможные фуксовы системы с заданной монодромией и данным набором показателей. Остающийся произвол в определении динамики выбранного нами выделенного направления соответствует перепараметризации $s=s(\tau)$. По модулю этой перепараметризации мы описали все возможные изомонодромные семейства с заданными начальными условиями.

Следствие 4. *При порождении резонанса в точке, где вычет не скалярен, но является жордановой клеткой, не происходит добавления нового параметра деформации и произвола в выборе s нет.*

Следствие 5. *Прямым вычислением проверяется, что условие сокращения полюсов второго порядка в сумме $d\Gamma_2\Gamma_2^{-1}+\Gamma_2\omega\Gamma_2^{-1}$ имеет вид*

$$\left(\sum_{j\neq i}\frac{b_{12}^j}{a_i-a_j}\right)t^2=t,$$

где b_{12}^j – верхние правые элементы матриц B_i семейства, полученного калибровкой на крайний правый множитель калибровки Γ_2. Следовательно, в точках, где

$$\sum_{j\neq i}\frac{b_{12}^j}{a_i-a_j}=0,$$

значение t не определено, калибровочное преобразование и результирующее семейство имеют особенности. Это соответствует тому, что точки, удовлетворяющие указанному соотношению, лежат на тэта-дивизоре результирующей системы.

Действительно, уравнение

$$\sum_{j\neq i}\frac{b_{12}^j}{a_i-a_j}=0$$

в точности совпадает с уравнением струи первого порядка тэта-дивизора, описанным в работах [9], [10].

Для калибровок Γ_1 также можно изучить результат применения такой калибровки к некоторой паре точек a_i, a_j и получающийся вид пфаффовой 1-формы. Аналогично уже рассмотренному случаю, после проведения калибровки Γ_1 к семейству прибавится одна или две, в зависимости от того одна или обе точки из a_i, a_j имели скалярный диагональный вычет, степени свободы, отвечающие произволу в выборе s, t, определяющих направления, в которых порождаются резонансы. Действительно, предположим, что вычет B_i равен λI. В этом случае, фуксовость результирующей системы не зависит от выбора параметра t. Аналогичная картина и для скалярной точки a_j, в этом случае фуксовы и голоморфные свойства калибровки не зависят от выбора параметра s. Если же обе точки скалярны, очевидно свободными являются оба параметра. Как и в уже рассмотренном случае калибровки Γ_2, имеем аналогичное утверждение.

Теорема 5. *Калибровка вида Γ_1, примененная к паре точек a_i, a_j изомонодромного семейства таких, что хотя бы в одной точке вычет семейства диагонален, добавляет в изомонодромное семейство еще один или два параметра деформации в зависимости от того, в одной или в двух точках вычеты семейства были скалярны. Данные новые параметры отвечают за изменение матриц связи левелевских базисов в резонансных особых точках с каноническим левелевским базисом. Соответствующие динамике по новым параметрам члены в пфаффовой форме семейства будут иметь следующий вид*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma_1\right)\Gamma_1^{-1}\,ds = \begin{pmatrix} \dfrac{-t}{z-a_j}+\dfrac{st^2}{(z-a_i)(z-a_j)} & \dfrac{s^2t^2}{(z-a_i)(z-a_j)}-\dfrac{2st}{z-a_j}+\dfrac{a_j-a_i}{z-a_j} \\ \dfrac{-t^2}{(z-a_i)(z-a_j)} & \dfrac{-t}{z-a_j}-\dfrac{st^2}{(z-a_i)(z-a_j)} \end{pmatrix} ds, \tag{32}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_1\right)\Gamma_1^{-1}\,dt = \begin{pmatrix} \dfrac{-s}{(z-a_i)(z-a_j)} & \dfrac{-s^2}{z-a_i} \\ \dfrac{1}{(z-a_i)(z-a_j)} & \dfrac{s}{z-a_i} \end{pmatrix} dt. \tag{33}$$

Следствие 6. *Предполагая s, t функциями от $a_1, \dots, a_n$, получаем, как и предсказывалось теоремой 2 об общем виде пфаффовой формы изомонодромного семейства, зависящего лишь от набора a, резонансную добавку к шлезингеровской части пфаффовой системы*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_1\right)\Gamma_1^{-1}\,dt = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_{ik}}{z-a_i}+\frac{\alpha_{jk}}{z-a_j}\right)da_k, \tag{34}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma_1\right)\Gamma_1^{-1}\,ds = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\gamma_{ik}}{z-a_i}+\frac{\gamma_{jk}}{z-a_j}\right)da_k. \tag{35}$$

Следствие 7. *Аналогично уже рассмотренному случаю калибровки Γ_2 можно показать, что с помощью калибровок типа Γ_1 можно получить с точностью до замены $s = s(\phi)$, $t = t(\psi)$ все существующие системы и соответственно семейства с заданной монодромией и измененными на единицу в соответствующую сторону показателями $\widetilde{\beta}_i^1 = \beta_i^1 + 1$, $\widetilde{\beta}_j^2 = \beta_j^2 - 1$.*

Доказательство дословно повторяет рассуждения, проделанные применительно к калибровке Γ_2.

Основным результатом данной работы является следующий факт, вытекающий из теорем 1 и 2.

Теорема 6. *Всякая непрерывная изомонодромная деформация фуксовой системы ранга 2 задается пфаффовой формой вида*

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_s + \omega_n + \omega_{\mathrm{res}} + \omega_{\mathrm{add}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a,s)}{z-a_i}\, d(z-a_i) + \sum_{l=1}^{n} c_l(a,s)da_l \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\gamma_{ijk}(a,s)}{(z-a_i)^k}\, da_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j:a_j\in\widetilde{\mathscr{D}}}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\widetilde{\gamma}_{ijk}}{(z-a_i)^k}\, ds_j, \end{aligned} \tag{36}$$

где $\widetilde{\mathscr{D}}$ – множество резонансных точек со скалярной монодромией, r_i – максимальный i-резонанс системы, s_j – параметр, отвечающий за выбор и динамику направления максимального нормирования в точке со скалярной монодромией. Форму полагаем заданной на $Z \times \mathbb{C}^r$, где r – число точек $\widetilde{\mathscr{D}}$, а

$$Z = \mathbb{CP}^1 \times \biggl(D(a_0) \setminus \bigcup_{i\neq j}\{z-a_i=0\}\biggr).$$

Доказательство. Действительно, всякую резонансную точку a_i исходной фуксовой системы можно представить как результат применения калибровок вида Γ_1 и Γ_2 к семейству, не имевшему в a_i резонанса. Но для таких систем по теореме 2 известен вид соответствующего $z - a_i$ слагаемого в 1-форме ω. Проверяя теперь на каждом шаге изменение вида коэффициентов системы под действием построенных нами калибровок, получаем вследствие теорем 1 и 2 утверждение теоремы.

Изучив механизм порождения резонансов в точках с различным типом монодромии, можно дать некоторые комментарии относительно полученных результатов. Как уже отмечалось, феномен возникновения дополнительных параметров непрерывной изомонодромной деформации связан с тем фактом, что в резонансном случае приведение фундаментальной матрицы системы к виду, когда монодромия имеет жорданов вид, еще не гарантирует, в отличие от нерезонансного случая, что такой базис будет левелевским. Такая возможность существует, если левелевская фильтрация не определяется однозначно жордановой фильтрацией. Для систем ранга 2 это равносильно скалярности монодромии в рассматриваемой особой точке. С помощью построенных нами калибровочных преобразований была явно показана эта неоднозначность и возможность независимой от положения других точек деформации левелевской фильтрации в резонансной точке с диагональной монодромией. Это дает пример деформации левелевской фильтрации, "независимой" от деформации жордановой фильтрации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян, "Об уравнении Лиувилля, акцессорных параметрах и геометрии пространства Тейхмюллера для римановых поверхностей рода 0", *Матем. сб.*, **132**:2 (1987), 147–166.

[2] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980.

[3] A. H. M. Levelt, *Hypergeometric Functions*, Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A, **64**, Amsterdam, 1961.

[4] А. А. Болибрух, 21-*я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем*, Тр. МИАН, **206**, Наука, М., 1994.

[5] A. Its, V. Novokshenov, *The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations*, Lecture Notes in Math., **1191**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[6] B. Malgrange, "Sur les déformations isomonodromiques. I", *Mathematics and Physics* (Paris, 1979/1982), Progr. Math., **37**, Birkhäuser, Boston, 1983, 401–426.

[7] L. Fuchs, "Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten", *J. Reine Angew. Math.*, **68** (1868), 354–385.

[8] А. А. Болибрух, "Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей", *Локальные и глобальные задачи теории особенностей*, Тр. МИАН, **221**, 1998, 127–142.

[9] A. Bolibruch, "On orders of movable poles of the Schlesinger equation", *J. Dynam. Control Systems*, **6**:1 (2000), 57–73.

[10] А. А. Болибрух, "О τ-функции уравнения изомонодромных деформаций Шлезингера", *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 184–191.

В. А. Побережный
Институт теоретической и экспериментальной физики
E-mail: poberezh@itep.ru

Поступило
04.10.2006