1999. Т.35, № 6. С. 822 — 830

УДК 517.968.7

ОБ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ С НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К. А. Касымов, М. К. Дауылбаев

1. Постановка задачи. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(t)y' + A_n(t)y =$$

$$= F(t) + \int_0^1 [K_0(t,x)y(x,\varepsilon) + K_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + \ldots + K_{m+1}(t,x)y^{(m+1)}(x,\varepsilon)]\,dx \qquad (1)$$

с начальными условиями в точке $t = 1$

$$y(1,\varepsilon) = \alpha_0, \quad y'(1,\varepsilon) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(1,\varepsilon) = \alpha_{n-1}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, α_i — известные постоянные, $m = \overline{0, n-2}$.

Пусть выполнены следующие условия.

I. Функции $A_i(t)$, $F(t)$ являются достаточно гладкими на $[0,1]$, а $K_i(t,x)$, $i = \overline{0, m+1}$, — в области $\mathcal{D} = (0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1)$.

II. Справедливо неравенство $A_1(t) \ge \overline{\gamma} = \text{const} > 0,\ 0 \le t \le 1$.

III. Функция $\overline{\lambda}_k(t)$ удовлетворяет неравенству $\overline{\lambda}_k(t) \ne \overline{\lambda}_j(t)$, $k \ne j$, $k = \overline{1, n-1}$, где $\overline{\lambda}_k(t)$ — корни уравнения $A_1(t)\overline{\lambda}^{n-1}(t) + \ldots + A_{n-1}(t)\overline{\lambda}(t) + A_n(t) = 0$.

2. Фундаментальная система решений. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (1):

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(t)y' + A_n(t)y = 0, \qquad (3)$$

характеристическое уравнение которого имеет вид

$$\varepsilon\lambda^n(t) + A_1(t)\lambda^{n-1}(t) + \ldots + A_{n-1}(t)\lambda(t) + A_n(t) = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде [1]

$$\lambda(t,\varepsilon) = \overline{\lambda}(t) + \varepsilon\lambda_1(t) + \ldots \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнение

$$A_1(t)\overline{\lambda}^{n-1}(t) + \ldots + A_{n-1}(t)\overline{\lambda}(t) + A_n(t) = 0, \qquad (6)$$

решения которого обозначим через $\overline{\lambda}_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$. Чтобы найти последний корень уравнения (4), сделаем замену $\lambda(t) = \mu(t)/\varepsilon$, которая приводит к уравнению

$$\mu^n(t) + A_1(t)\mu^{n-1}(t) + \varepsilon A_2(t)\mu^{n-2}(t) + \ldots + \varepsilon^{n-2}A_{n-1}(t)\mu(t) + \varepsilon^{n-1}A_n(t) = 0. \qquad (7)$$

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$\mu(t,\varepsilon) = \overline{\mu}(t) + \varepsilon\mu_1(t) + \ldots \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7), имеем $\overline{\mu}(t) = -A_1(t)$. Тем самым для корней характеристического уравнения (4) получаем асимптотические представления $\lambda_i(t,\varepsilon) = \overline{\lambda}_i(t) + O(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\lambda_n(t,\varepsilon) = (\overline{\mu}(t) + O(\varepsilon))/\varepsilon$.

Согласно условию III, по теореме Шлезингера — Биркгофа [2] для фундаментальной системы решений однородного уравнения (3) справедливы следующие асимптотические представления:

$$y_i(t,\varepsilon) = \exp\left(\int_0^t \overline{\lambda}_i(x)\,dx\right)(y_{i0}(t) + \varepsilon y_{i1}(t) + \ldots + \varepsilon^{n-2-m} y_{i\;n-2-m}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m})), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$y_n(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \overline{\mu}(x)\,dx\right)(y_{n0}(t) + \varepsilon y_{n1}(t) + \ldots + \varepsilon^{n-2-m} y_{n\;n-2-m}(t) +$$

$$+ O(\varepsilon^{n-1-m})), \quad \overline{\mu}(t) = -A_1(t), \tag{9}$$

$$y_n^{(j)}(t,\varepsilon) = \exp\left(\int_0^t \overline{\lambda}_i(x)\,dx\right)(u_{i0}^{(j)}(t) + \varepsilon u_{i1}^{(j)}(t) + \ldots + \varepsilon^{n-2-m} u_{i\,n-2-m}^{(j)}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m})), \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$y_n^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \overline{\mu}(x)\,dx\right)(u_{n0}^{(j)}(t) + \varepsilon u_{n1}^{(j)}(t) + \ldots + \varepsilon^{n-2-m} u_{n\,n-2-m}^{(j)}(t) +$$

$$+ O(\varepsilon^{n-1-m})), \quad j = \overline{1, n-1};$$

здесь и далее используется обозначение $E(\varepsilon; s, t) = \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_s^t \overline{\mu}(x)\,dx\right)$; $y_{ik}(t)$ является решением задачи

$$B_{i1}(t) y_{ik}^{(n-1)}(t) + B_{i2}(t) y_{ik}^{(n-2)}(t) + \ldots + B_{in}(t) y_{ik}(t) = F_{ik}(t),$$

$$y_{ik}(0) = 1, \quad y'_{ik}(0) = 0, \quad \ldots, \quad y_{ik}^{(n-2)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

а $y_{nk}(t)$ определяется из задачи

$$y'_{nk}(t) + ((n-1)A'_1(t) - A_2(t))/(A_1(t)) y_{nk}(t) = \Phi_{nk}(t), \quad y_{nk}(0) = 1,$$

причем $F_{i0}(t) \equiv \Phi_{n0}(t) \equiv 0$, $F_{ik}(t)$, $\Phi_{nk}(t)$, $k = \overline{1, n-2-m}$, — известные функции, зависящие от $y_{i\,k-1}(t)$ и $y_{n\,k-1(t)}$ соответственно, и

$$B_{ik}(t) = \sum_{l=1}^{k} C_{n-l}^{k-l} A_l(t) h_i^{k-l}(t), \quad k = \overline{1, n},$$

$$h_i^l(t) = \overline{\lambda_i}(t) h_i^{l-1}(t) + dh_i^{l-1}(t)/dt, \quad l = \overline{1, n-1}, \quad h_i^0(t) \equiv 1,$$

$$u_{ik}^{(j)}(t) = \sum_{l=0}^{j} C_j^l h_i^l(t) y_{ik}^{(j-l)}(t), \quad k = \overline{0, n-2-m}, \quad u_{nk}^{(i)}(t) = \sum_{l=0}^{j} C_j^{j-l} \sum_{i=0}^{k-l} y_{ni}^{(l)}(t) q_{k-l-i}^{j-l}(t),$$

$$q_0^s(t) = \overline{\mu}^s(t), \quad q_i^s(t) = \sum_{l=0}^{s-1-i} \overline{\mu}^l(t) \frac{d}{dt} q_{i-1}^{s-1-l}(t), \quad i = \overline{1, s-1}, \quad q_i^s(t) = 0, \quad i \geq s.$$

Для вронскиана справедлива формула $W(t,\varepsilon) = W(0,\varepsilon)E(\varepsilon; 0, t)$, где $W(0,\varepsilon)$ с учетом (9) имеет асимптотическое представление

$$W(0,\varepsilon) = \varepsilon^{-n+1}(\eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \ldots + \varepsilon^{n-2-m}\eta_{n-2-m} + O(\varepsilon^{n-1-m})),$$

в котором коэффициенты $\eta_k = \sum_{i=0}^{k} C_{n-2+i}^i u_{n\,k-i}^{(n-1)}(0)\overline{W}(0)$, а $W(0) \neq 0$ — главная часть минора элемента $y_n^{(n-1)}(0,\varepsilon)$ вронскиана $W(0,\varepsilon)$.

3. Функция Коши. Пусть функции $K_{i\varepsilon}(t,s)$, $i=\overline{0,n-1}$, при $0\le s\le t\le 1$ являются решениями следующей сингулярно возмущенной дифференциальной задачи:

$$L_\varepsilon K_{i\varepsilon}(t,s)=0,\quad K^{(j)}_{i\varepsilon}(s,s)=\delta_{ij}, \tag{10}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Решения $K_{i\varepsilon}(t,s)$ задачи (10) называются функциями Коши и их можно представить в виде [3]

$$K^{(j)}_{i\varepsilon}(t,s)=W^{(j)}_{i+1}(t,s,\varepsilon)W^{-1}(s,\varepsilon),\quad i=\overline{0,n-1}, \tag{11}$$

где $W^{(j)}_{i+1}(t,s,\varepsilon)$ — определитель, получаемый из вронскиана $W(s,\varepsilon)$ заменой $(i+1)$-й строки фундаментальной системой решений $y^{(j)}_1(t,\varepsilon),y^{(j)}_2(t,\varepsilon),\dots,y^{(j)}_n(t,\varepsilon)$.

Лемма. *Для функции Коши $K_{i\varepsilon}(t,s)$ при $0\le s\le t\le 1$ справедливы асимптотические представления*

$$K^{(j)}_{i\varepsilon}(t,s)=\sum_{k=0}^{n-2-m}\varepsilon^k\overline{K}^{(j)}_{ik}(t,s)-E(\varepsilon;s,t)\sum_{k=0}^{n-2-m}\varepsilon^{k+n-1-j}\widetilde{K}^{(j)}_{ik}(t,s)+O(\varepsilon^{n-1-m}),\quad i=\overline{0,n-2},$$

$$\begin{aligned}K^{(j)}_{n-1\varepsilon}(t,s)=-\sum_{k=0}^{n-2-m}\varepsilon^{k+1}\overline{K}^{(j)}_{n-1\ k}(t,s)+E(\varepsilon;s,t)\sum_{k=0}^{n-2-m}\varepsilon^{k+n-1-j}\widetilde{K}^{(j)}_{n-1\ k}(t,s)+\\ +O(\varepsilon^{n-m}+\varepsilon^{2n-2-m-j}E(\varepsilon;s,t));\end{aligned} \tag{12}$$

здесь использованы обозначения

$$\overline{K}^{(j)}_{ik}(t,s)=\sum_{l=0}^{k}M^{n-1j}_{il}(t,s)\Delta_{k-l\,n-1}(s)-\sum_{l=0}^{k-1}M^{n-2j}_{il}(t,s)\Delta_{k-1-l\,n-2}(s)+\dots$$

$$\dots+(-1)^{n-2-m}\sum_{l=0}^{k-n+2+m}M^{m+1\ j}_{il}(t,s)\Delta_{k-n+2+m-l\,m+1}(s),\quad i=\overline{0,n-2},$$

$$\overline{K}^{(j)}_{n-1k}(t,s)=\sum_{l=0}^{k}M^{n-2j}_{n-1\,l}(t,s)\Delta_{k-l\,n-2}(s)-\sum_{l=0}^{k-1}M^{n-3j}_{n-1\,l}(t,s)\Delta_{k-1-l\,n-3}(s)+\dots$$

$$\dots+(-1)^{n-2-m}\sum_{l=0}^{k-n+2+m}M^{mj}_{n-1\,l}(t,s)\Delta_{k-n+2+m-l\,m}(s), \tag{13}$$

$$\widetilde{K}^{(j)}_{ik}(t,s)=\sum_{l=0}^{k}M^{n-1\,n-1}_{i\,l}(s,s)\Delta_{k-l\,j}(t),\quad i=\overline{0,n-2},$$

$$\widetilde{K}^{(j)}_{n-1\,k}(t,s)=\sum_{l=0}^{k}M^{n-2\,n-2}_{n-1\,l}(s,s)\Delta_{k-l\,j}(t),$$

где $M^{pj}_{il}(t,s)$, $p=\overline{m,n-1}$, — коэффициенты разложения в ряд по степеням ε минора $M^{pj}_{i\varepsilon}(t,s)$ элемента $y^{(p)}_n(s,\varepsilon)$ определителя $W^{(j)}_{i+1}(t,s,\varepsilon)$. Коэффициенты $\Delta_{ip}(t)$, $p=\overline{m,n-1}$, определяются последовательно из равенств

$$\begin{aligned}&\Delta_{0p}(t)=\eta_0^{-1}u^{(p)}_{n0}(t)\equiv\eta_0^{-1}\bar\mu^p(t)y_{n0}(t),\\ &\Delta_{kp}(t)=\eta_0^{-1}\left[u^{(p)}_{nk}(t)-\sum_{i=0}^{k-1}\eta_{k-i}\Delta_{ip}(t)\right],\quad k=\overline{1,n-2-m}.\end{aligned} \tag{14}$$

Для $\Delta_{0p}(t)$ справедливо соотношение $\Delta_{0p}(t)=\bar\mu(t)\Delta_{0p-1}(t)$, $p\ge 1$. Заметим, что для миноров $M^{pj}_{il}(t,s)$ имеет место тождество

$$M^{pj}_{il}(t,s)\equiv(-1)^{i-1-p}M^{ij}_{pl}(t,s),\quad i\ne p,\quad M^{pj}_{il}(t,s)\equiv 0,\quad i=p. \tag{15}$$

4. Оценка решения. С помощью функции Коши решение задачи (1), (2) представимо в виде

$$y(t,\varepsilon)=y(0,\varepsilon)K_{0\varepsilon}(t,0)+y'(0,\varepsilon)K_{1\varepsilon}(t,0)+\ldots+y^{(n-1)}(0,\varepsilon)K_{n-1\,\varepsilon}(t,0)+\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t K_{n-1\,\varepsilon}(t,s)z(s,\varepsilon)\,ds, \tag{16}$$

где через $z(t,\varepsilon)$ обозначена правая часть уравнения (1):

$$z(t,\varepsilon)=F(t)+\int\limits_0^1[K_0(t,x)y(x,\varepsilon)+\ldots+K_{m+1}(t,x)y^{(m+1)}(x,\varepsilon)]\,dx. \tag{17}$$

Подставляя (16) в (17), получаем относительно $z(t,\varepsilon)$ интегральное уравнение

$$z(t,\varepsilon)=F(t)+y(0,\varepsilon)\alpha_{0\varepsilon}(t,0)+y'(0,\varepsilon)\alpha_{1\varepsilon}(t,0)+\ldots+y^{(n-1)}(0,\varepsilon)\alpha_{n-1\,\varepsilon}(t,0)+\int\limits_0^1 U_\varepsilon(t,s)z(s,\varepsilon)\,ds, \tag{18}$$

где

$$U_\varepsilon(t,s)=\varepsilon^{-1}\alpha_{n-1\,\varepsilon}(t,s), \tag{19}$$

$$\alpha_{i\varepsilon}(t,s)=\int\limits_s^1[K_0(t,x)K_{i\varepsilon}(x,s)+K_1(t,x)K'_{i\varepsilon}(x,s)+\ldots+K_{m+1}(t,x)K_{i\varepsilon}^{(m+1)}(x,s)]\,dx,\quad i=\overline{0,n-1}.$$

Для $\alpha_{n-1\,\varepsilon}(t,s)$ справедливо асимптотическое представление

$$\alpha_{n-1\,\varepsilon}(t,s)=-\sum_{k=0}^{n-2-m}\varepsilon^{k+1}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\sum_{l=0}^{k-p}\Delta_{k-p-l\;n-2-p}(s)\mathcal{D}_{n-1\,l}^{n-2-p}(t,s)+$$

$$+\varepsilon^{n-1-m}[\bar\mu^{-1}(1)K_{m+1}(t,1)\widetilde{K}_{n-1\,0}^{(m+1)}(1,s)E(\varepsilon;s,1)-\bar\mu^{-1}(s)K_{m+1}(t,s)\widetilde{K}_{n-1\,0}^{(m+1)}(s,s)]+O(\varepsilon^{n-m}), \tag{20}$$

где $\mathcal{D}_{n-1\,l}^{i}(t,s)=\sum\limits_{j=0}^{m+1}\int\limits_s^1 K_j(t,x)M_{n-1\,l}^{ij}(x,s)\,dx$. Ядро $U_\varepsilon(t,s)$, выражаемое формулой (19), с учетом представления (20) является ограниченным.

Пусть выполнено условие

IV. Число 1 не является собственным значением ядра $U_\varepsilon(t,s)$.

Тогда интегральное уравнение (18) имеет единственное решение, представимое в виде

$$z(t,\varepsilon)=F(t)+y(0,\varepsilon)\alpha_{0\varepsilon}(t,0)+\ldots+y^{(n-1)}(0,\varepsilon)\alpha_{n-1\,\varepsilon}(t,0)+$$

$$+\int\limits_0^1 R_\varepsilon(t,s)[F(s)+y(0,\varepsilon)\alpha_{0\varepsilon}(s,0)+\ldots+y^{(n-1)}(0,\varepsilon)\alpha_{n-1\,\varepsilon}(s,0)]\,ds, \tag{21}$$

где $R_\varepsilon(t,s)$ — резольвента ядра $U_\varepsilon(t,s)$. Подставляя (21) в правую часть (16), получим решение задачи (1), (2) в виде

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n-1}y^{(i)}(0,\varepsilon)Q_{i\varepsilon}(t)+P_\varepsilon(t), \tag{22}$$

где

$$Q_{i\varepsilon}(t)=K_{i\varepsilon}(t,0)+\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t K_{n-1\,\varepsilon}(t,s)\left[\alpha_{i\varepsilon}(s,0)+\int\limits_0^1 R_\varepsilon(s,p)\alpha_{i\varepsilon}(p,0)\,dp\right]ds,$$

$$P_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t K_{n-1\,\varepsilon}(t,s)\left[F(s)+\int\limits_0^1 R_\varepsilon(s,p)F(p)\,dp\right]ds. \tag{23}$$

Подставляя (22) в начальные условия (2), получаем систему алгебраических уравнений относительно $y^{(i)}(0,\varepsilon)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(0,\varepsilon)Q_{i\varepsilon}^{(j)}(1) = \alpha_j - P_\varepsilon^{(j)}(1), \quad j=\overline{0,n-1}, \tag{24}$$

где $Q_{i\varepsilon}(t)$, $P_\varepsilon(t)$ определяются формулой (23). Подставляя в (23) асимптотические представления (12) с учетом (13), (19), получаем асимптотические представления

$$Q_{i\varepsilon}^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{n-2-m} \varepsilon^k \Bigg[\sum_{l=0}^{k} \Delta_{k-l\,n-1}(0)(T_{il}^{n-1j}(t) - \varepsilon^{n-1-j}S_{il}^{n-1j}(t)) -$$

$$- \sum_{l=0}^{k-1} \Delta_{k-l-1\,n-2}(0)(T_{il}^{n-2j}(t) - \varepsilon^{n-1-j}S_{il}^{n-2j}(t)) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2-m} \sum_{l=0}^{k-n+2+m} \Delta_{k-n+2+m-l\,m+1}(0)(T_{il}^{m+1j}(t) - \varepsilon^{n-1-j}S_{il}^{m+1j}(t))\Bigg] -$$

$$- E(\varepsilon;0,t)\sum_{k=0}^{n-2-m} \varepsilon^{k+n-1-j}\sum_{l=0}^{k} M_{il}^{n-1\,n-1}(0,0)\Delta_{k-lj}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m}), \quad i=\overline{0,n-2}, \tag{25}$$

$$Q_{n-1\,\varepsilon}^{(j)}(t) = -\sum_{k=0}^{n-2-m} \varepsilon^{k+1}\Bigg[\sum_{l=0}^{k} \Delta_{k-l\,n-2}(0)(T_{n-1\,l}^{n-2j}(t) - \varepsilon^{n-1-j}S_{n-1\,l}^{n-2j}(t)) -$$

$$- \sum_{l=0}^{k-1} \Delta_{k-l-1\,n-3}(0)(T_{n-1\,l}^{n-3j}(t) - \varepsilon^{n-1-j}S_{n-1\,l}^{n-3j}(t)) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2-m} \sum_{l=0}^{k-n+2+m} \Delta_{k-n+2+m-l\,m}(0)(T_{n-1\,l}^{mj}(t) - \varepsilon^{n-1-j}S_{n-1\,l}^{mj}(t))\Bigg] +$$

$$+ \varepsilon^{n-1-m}\Delta_{0m}(0)[\bar{H}_{m+1}^{(j)}(t) + \varepsilon^{n-1-j}\bar{N}_{m+1}^{(j)}(t)] + E(\varepsilon;0,t)\sum_{k=0}^{n-2-m} \varepsilon^{k+n-1-j}\sum_{l=0}^{k} M_{n-1\,l}^{n-2\,n-2}(0,0)\Delta_{k-lj}(t) +$$

$$+ O(\varepsilon^{n-m} + \varepsilon^{2n-m-2-j}E(\varepsilon;0,t)), \tag{26}$$

где $\Delta_{ip}(t)$ определяются формулой (14), а

$$T_{il}^{kj}(t) = M_{il}^{kj}(t,0) - \sum_{p=0}^{l}\int_0^t \overline{K}_{n-1\,l-p}^{(j)}(t,s)\mathcal{D}_{ip}^k(s)\,ds, \quad i=\overline{0,n-1}; \quad k=\overline{m,n-1},$$

$$\mathcal{D}_{il}^k(t) = \sum_{j=0}^{m+1}\int_0^1 \overline{K}_j(t,x)M_{il}^{kj}(x,0)\,dx, \quad i=\overline{0,n-1},$$

$$G_{l0}^{kij}(t,s) = \frac{1}{\bar{\mu}(s)}\sum_{p=0}^{l} \widetilde{K}_{n-1\,l-p}^{(j)}(t,s)\mathcal{D}_{ip}^k(s),$$

$$G_{lp}^{kij}(t,s) = \bar{\mu}^{-1}(s)(d/ds)G_{lp-1}^{kij}(t,s), \quad p=\overline{1,n-2-m},$$

$$S_{il}^{kj}(t) = \sum_{p=0}^{l} G_{l-p\,p}^{kij}(t,t),$$

$$\overline{H}_{m+1}^{(j)}(t) = M_{n-1\,0}^{n-2\,n-2}(0,0)\int_0^t M_{n-1\,0}^{n-2j}(t,s)\Delta_{0\,n-2}(s)\overline{K}_{m+1}(s,0)\,ds,$$

$$\overline{N}_{m+1}^{(j)}(t) = \bar{\mu}^{-1}(t)M_{n-1\,0}^{n-2\,n-2}(0,0)M_{n-1\,0}^{n-2\,n-2}(t,t)\Delta_{0j}(t)\overline{K}_{m+1}(t,0),$$

$$\overline{K}_i(t,x) \equiv K_i(t,x) + \int\limits_0^1 R_\varepsilon(t,s) K_i(s,x)\, ds, \quad i = \overline{0, m+1}.$$

Заметим, что $\overline{H}^{(j)}_{m+1}(t)$, $\overline{N}^{(j)}_{m+1}(t)$ зависят только от $K_{m+1}(t,0)$ и для $T^{kj}_{il}(t)$, $\mathcal{D}^k_{ip}(t)$, $S^{kj}_{il}(t)$ справедливо тождество (15). Аналогично находим асимптотическое представление для $\alpha_j - P^{(j)}_\varepsilon(t)$, $j = \overline{0, n-1}$:

$$\alpha_j - P^{(j)}_\varepsilon(t) = \alpha_j + P^{(j)}(t) + \sum_{k=1}^{n-2-m} \varepsilon^k P^{(j)}_k(t) + O(\varepsilon^{n-1-m}), \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{27}$$

где

$$P^{(j)}(t) = \int\limits_0^t \overline{K}^{(j)}_{n-1\,0}(t,s) \bar{F}(s)\, ds, \quad j = \overline{0, n-2},$$

$$P^{(j)}_k(t) = \int\limits_0^t \overline{K}^{(j)}_{n-1\,k}(t,s)\bar{F}(s)\, ds + \psi^{(j)}_{k-n+1+j}(t) - \psi^{(j)}_{k-n+1+j}(t,0) E(\varepsilon; 0, t), \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{28}$$

$$P^{(n-1)}(t) = \int\limits_0^t \overline{K}^{(n-1)}_{n-1\,0}(t,s) \bar{F}(s)\, ds + \psi^{(n-1)}_0(t) - \psi^{(n-1)}_0(t,0) E(\varepsilon; 0, t), \tag{29}$$

Выражения $\psi^{(j)}_k(t)$, $\psi^{(j)}_k(t,0)$, входящие в (28), (29), определяются следующим образом:

$$\psi^{(j)}_k(t,s) = \sum_{i=0}^{k} \varphi^{(j)}_{k-i\,i}(t,s), \quad \psi^{(j)}_k(t) \equiv \psi^{(j)}_k(t,t), \quad \varphi^{(j)}_{k0}(t,s) = \bar{\mu}^{-1}(s) \widetilde{K}^{(j)}_{n-1\,k}(t,s) \overline{F}(s),$$

$$\varphi^{(j)}_{kp}(t,s) = \bar{\mu}^{-1}(s) d\varphi^{(j)}_{k\,p-1}(t,s)/ds, \quad p = \overline{1, n-2-m}, \quad \overline{F}(s) \equiv F(s) + \int\limits_0^1 R_\varepsilon(s,p) F(p)\, dp.$$

Составим теперь главный определитель системы (24):

$$\omega_\varepsilon(1) = \det\left((Q^{(i-1)}_{j\,\varepsilon}(1)) \right), \tag{30}$$

где $i = \overline{1, n}$ — номер строки, $j = \overline{0, n-1}$ — номер столбца.

Вместо элементов этого определителя подставим их асимптотические представления (25), (26) и с учетом тождества (15) для $T^{pj}_{il}(t,s)$, $S^{pj}_{il}(t,s)$, преобразуем (30) следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n-2-m} (-1)^k \sum_{l=0}^{n-2-m-k} \varepsilon^{n-1-m-l} Q^{(j)}_{m+k+l\,\varepsilon}(1) \delta_{k\,m+k+l}(0) + Q^{(j)}_{n-1\,\varepsilon}(1), \quad j = \overline{0, n-1},$$

где

$$\delta_{ki}(0) = \frac{1}{\Delta_{0\,n-1}(0)} \left[\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Delta_{j\,n-1}(0) \delta_{k-j\,i}(0) + (-1)^k \Delta_{ki}(0) \right], \quad k = \overline{0, n-2-m}.$$

Тогда последний столбец определителя (30) будет состоять только из элементов вида

$$\varepsilon^{n-1-m} \Delta_{0\,m}(0) (\overline{H}^{(j)}_{m+1}(1) + \varepsilon^{n-1-j} \overline{N}^{(j)}_{m+1}(1)) + O(\varepsilon^{n-m}), \quad j = \overline{0, n-1},$$

поэтому вынося за знак определителя $\omega_\varepsilon(1)$ из последнего столбца $\varepsilon^{n-1-m}\Delta_{0m}(0)$, а из остальных столбцов $\Delta_{0\,n-1}(0)$, имеем

$$\omega_\varepsilon(1) = \varepsilon^{n-1-m} (\Delta_{0\,n-1}(0))^{n-1} \Delta_{0m}(0) (\bar{\omega}_0(1) + O(\varepsilon)),$$

где

$$\bar{\omega}_0(1) = \begin{vmatrix} T_{00}^{n-1\,0}(1) & \ldots & T_{n-2\,0}^{n-1\,0}(1) & \overline{H}_{m+1}(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{00}^{n-1\,n-2}(1) & \ldots & T_{n-2\,0}^{n-1\,n-2}(1) & \overline{H}_{m+1}^{(n-2)}(1) \\ \widetilde{T}_{00}^{n-1\,n-1}(1) & \ldots & \widetilde{T}_{n-2\,0}^{n-1\,n-1}(1) & \widetilde{H}_{m+1}^{(n-1)}(1) \end{vmatrix},$$

где $\widetilde{T}_{i0}^{n-1\,n-1}(1) \equiv T_{i0}^{n-1\,n-1}(1) - S_{i0}^{n-1\,n-1}(1)$, $i = \overline{0, n-2}$, $\widetilde{H}_{m+1}^{(n-1)}(1) \equiv \overline{H}_{m+1}^{(n-1)}(1) + \overline{N}_{m+1}^{(n-1)}(1)$.

V. Пусть $\bar{\omega}_0(1) \neq 0$.

Теперь решение системы (24) представим в виде

$$y^{(i)}(0,\varepsilon) = \frac{\omega_\varepsilon^{i+1}(1)}{\omega_\varepsilon(1)}, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{31}$$

где $\omega_\varepsilon^{i+1}(1)$ — определитель, полученный из определителя $\omega_\varepsilon(1)$ заменой $(i+1)$-го столбца столбцом из свободных членов $\alpha_j - P_\varepsilon^{(j)}(1)$. Подставляя в правую часть (31) вместо элементов определителей $\omega_\varepsilon(1)$, $\omega_\varepsilon^{i+1}(1)$ их асимптотические представления, имеем

$$\begin{gathered} y^{(i)}(0,\varepsilon) = \bar{\omega}_0^{i+1}(1)/(\Delta_{0\,n-1}(0)\bar{\omega}_0(1)) + O(\varepsilon), \quad i = \overline{0, m}, \\ y^{(m+1)}(0,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(\bar{\omega}_0^{m+2}(1)/(\Delta_{0\,n-2}(0)\bar{\omega}_0(1)) + O(\varepsilon)), \quad \ldots, \\ y^{(n-1)}(0,\varepsilon) = \varepsilon^{-n+1+m}(\overline{\omega}_0^{n}(1)/(\Delta_{0\,m}(0)\overline{\omega}_0(1)) + O(\varepsilon)), \end{gathered} \tag{32}$$

где $\bar{\omega}_0^{i+1}(1)$, $i = \overline{0, m-1}$, — определители, получаемые из определителя $\bar{\omega}_0(1)$ заменой $(i+1)$-го столбца столбцом из элементов $\alpha_j + P^j(1)$, являющихся главной частью свободных членов $\alpha_j - P_\varepsilon^{(j)}(1)$, а $\overline{\omega}_0^{m+1}(1) = \overline{\omega}_0^{n}(1) + \overline{\overline{\omega}}_0^{n+1}(1)$, $\overline{\omega}_0^{m+2}(1) = \overline{\omega}_0^{m+3}(1) = \ldots = \overline{\omega}_0^{n-1}(1) = \overline{\omega}_0^{n}(1)$, причем $\overline{\overline{\omega}}_0^{m+1}(1)$, $\overline{\omega}_0^{n}(1)$ — также определители, получаемые из $\overline{\omega}_0(1)$ заменой соответственно $(m+1)$-го и n-го столбцов столбцом из элементов $\alpha_j + P^j(1)$. Теперь подставляя (32) с учетом (25), (26) в (22), получим

$$\begin{gathered} y^{(j)}(t,\varepsilon) = \overline{\omega}_0^{-1}(1)[\overline{\omega}_0^{1}(1)T_{00}^{n-1\,j}(t) + \ldots + \overline{\omega}_0^{m}(1)T_{m-1\,0}^{n-1\,j}(t) + (\overline{\omega}_0^{n}(1) + \overline{\overline{\omega}}_0^{m+1}(1))T_{m0}^{n-1\,j}(t) + \\ + \overline{\overline{\omega}}_0^{m+2}(1)T_{m+1\,0}^{n-1\,j}(t) + \ldots + \overline{\overline{\omega}}_0^{n-2}(1)T_{n-3\,0}^{n-1\,j}(t) + \overline{\overline{\omega}}_0^{n-1}(1)T_{n-2\,0}^{n-1\,j}(t) + \overline{\omega}_0^{n}(1)\overline{H}_{m+1}^{(j)}(t)] - \\ - P^{(j)}(t) + O(\varepsilon), \quad j = \overline{0, m-1}, \\ y^{(m)}(t,\varepsilon) = \overline{\omega}_0^{-1}(1)[\overline{\omega}_0^{1}(1)T_{00}^{n-1\,m}(t) + \ldots + \overline{\omega}_0^{m}(1)T_{m-1\,0}^{n-1\,m}(t) + (\overline{\omega}_0^{n}(1) + \overline{\overline{\omega}}_0^{m+1}(1))T_{m0}^{n-1\,m}(t) + \\ + \overline{\overline{\omega}}_0^{m+2}(1)T_{m+1\,0}^{n-1\,m}(t) + \ldots + \overline{\overline{\omega}}_0^{n-1}(1)T_{n-2\,0}^{n-1\,m}(t) + \overline{\omega}_0^{n}(1)\overline{H}_{m+1}^{(m)}(t)] - P^{(m)}(t) + \\ + \overline{\omega}_0^{-1}(1)(\overline{\omega}_0^{n}(1)\Delta_{0m}(t)/\Delta_{0m}(0))M_{n-1\,0}^{n-2\,n-2}(0,0)E(\varepsilon;0,t) + O(\varepsilon), \\ y^{(m+1)}(t,\varepsilon) = \overline{\omega}_0^{-1}(1)[\overline{\omega}_0^{1}(1)T_{00}^{n-1\,m+1}(t) + \ldots + \overline{\omega}_0^{m}(1)T_{m-1\,0}^{n-1\,m+1}(t) + (\overline{\omega}_0^{n}(1) + \overline{\overline{\omega}}_0^{m+1}(1))T_{m0}^{n-1\,m+1}(t) + \\ + \overline{\overline{\omega}}_0^{m+2}(1)T_{m+1\,0}^{n-1\,m+1}(t) + \ldots + \overline{\overline{\omega}}_0^{n-1}(1)T_{n-2\,0}^{n-1\,m+1}(t) + \overline{\omega}_0^{n}(1)\overline{H}_{m+1}^{(m+1)}(t)] - P^{(m+1)}(t) + \\ + \varepsilon^{-1}\overline{\omega}_0^{-1}(1)(\overline{\omega}_0^{n}(1)\Delta_{0m+1}(t)/\Delta_{0m}(0))M_{n-1\,0}^{n-2\,n-2}(0,0)E(\varepsilon;0,t) + O(\varepsilon + E(\varepsilon;0,t)), \quad \ldots, \\ y^{(n-2)}(t,\varepsilon) = \overline{\omega}_0^{-1}[\overline{\omega}_0^{1}(1)T_{00}^{n-1\,n-2}(t) + \ldots + \overline{\omega}_0^{n}(1)\overline{H}_{m+1}^{(n-2)}(t)] - P^{(n-2)}(t) + \\ + \varepsilon^{m+2-n}\overline{\omega}_0^{-1}(1)(\overline{\omega}_0^{n}(1)\Delta_{0\,n-2}(t)/\Delta_{0\,m}(0))M_{n-1\,0}^{n-2\,n-2}(0,0)E(\varepsilon;0,t) + O(\varepsilon + \varepsilon^{-n+3+m}E(\varepsilon;0,t)), \\ y^{(n-1)}(t,\varepsilon) = \overline{\omega}_0^{-1}(1)[\overline{\omega}_0^{1}(1)(T_{00}^{n-1\,n-1}(t) - S_{00}^{n-1\,n-1}(t)) + \ldots + \overline{\omega}_0^{n}(1)(\overline{H}_{m+1}^{(n-1)}(t) + \overline{N}_{m+1}^{(n-1)}(t))] - \\ - P^{(n-1)}(t) + \varepsilon^{m+1-n}\overline{\omega}_0^{-1}(1)(\overline{\omega}_0^{n}(1)\Delta_{0\,n-1}(t)/\Delta_{0\,m}(0))M_{n-1\,0}^{n-2\,n-2}(0,0)E(\varepsilon;0,t) + \\ + O(\varepsilon + \varepsilon^{m+2-n}E(\varepsilon;0,t)), \end{gathered} \tag{33}$$

где $\overline{\overline{\omega}}_0^{i+1}(1)$, $i = \overline{m+1, n-2}$, — определители, получаемые из определителя $\overline{\omega}_0(1)$ заменой $(i+1)$-го столбца столбцом из элементов $\alpha_j + P^{(j)}(1)$.

Для определителей $\overline{\omega}_0^i(1)$, $i = \overline{1,m}$, $\overline{\overline{\omega}}_0^i(1)$, $i = \overline{m+1, n-1}$, $\overline{\omega}_0^n(1)$ справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
|\overline{\omega}_0^i(1)| &\le K(|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \quad i = \overline{1,m}; \quad i = n, \\
|\overline{\overline{\omega}}_0^i(1)| &\le K(|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \quad i = \overline{m+1, n-1}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Оценивая (33) и учитывая (34), получаем следующую теорему.

Теорема. *Пусть выполнены условия* I — V. *Тогда для решения задачи (1), (2) справедливы оценки*

$$
\begin{aligned}
|y^{(i)}(t,\varepsilon)| &\le K\overline{\omega}_0^{-1}(1)(|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \quad i = \overline{0, m-1}, \\
|y^{(m)}(t,\varepsilon)| &\le K\overline{\omega}_0^{-1}(1)(1 + \exp(-\gamma\varepsilon^{-1}t))(|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \\
|y^{(m+1)}(t,\varepsilon)| &\le K\overline{\omega}_0^{-1}(1)(1 + \varepsilon^{-1}\exp(-\gamma\varepsilon^{-1}t))(|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \quad \ldots, \\
|y^{(n-1)}(t,\varepsilon)| &\le K\overline{\omega}_0^{-1}(1)(1 + \varepsilon^{m+1-n}\exp(-\gamma\varepsilon^{-1}t))(|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|),
\end{aligned}
\tag{35}
$$

где $K > 0$, $\gamma > 0$ *— некоторые постоянные, не зависящие от* t *и* ε.

Из теоремы видно, что в точке $t = 0$ $y^{(m+1)}(0,\varepsilon), \ldots, y^{(n-1)}(0,\varepsilon)$ не ограничены при $\varepsilon \to 0$, т. е. имеет место явление начального скачка m-го порядка $(m = \overline{0, n-2})$.

В заключение рассмотрим простой пример, иллюстрирующий указанное выше явление начального скачка.

5. Пример. Рассмотрим уравнение

$$
\varepsilon y''' + y'' = 2\int_0^1 y''(x,\varepsilon)\,dx \tag{36}
$$

с начальными условиями

$$
y(1,\varepsilon) = \alpha, \quad y'(1,\varepsilon) = \beta, \quad y''(1,\varepsilon) = \gamma. \tag{37}
$$

Сравнивая (36) с уравнением (1), получаем: $n = 3$, $m = 1$, $A_1(t) = 1 > 0$, $A_2(t) = A_3(t) = 0$, $K_0(t,x) = K_1(t,x) = 0$, $K_2(t,x) = 2$, $F(t) = 0$ и покажем, что в данном случае имеет место явление начального скачка первого порядка.

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (36) однородного уравнения

$$
\varepsilon y''' + y'' = 0, \tag{38}
$$

имеет вид

$$
\varepsilon\lambda^3 + \lambda^2 = 0. \tag{39}
$$

Находим его корни $\bar\lambda_1(t) = \bar\lambda_2(t) = 0$, $\bar\lambda_3(t) = \bar\mu(t)/\varepsilon$, $\bar\mu(t) = -1$. Так как уравнение (36) является уравнением с постоянными коэффициентами, то условие III опускается и фундаментальная система решений однородного уравнения (38) имеет вид $y_1(t,\varepsilon) = 1$, $y_2(t,\varepsilon) = t$, $y_3(t,\varepsilon) = \exp(-t/\varepsilon)$. Для вронскиана справедлива формула

$$
W(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\exp(-t/\varepsilon).
$$

Теперь построим функции Коши по формуле (11):

$$
K_{0\varepsilon}(t,s) = 1, \quad K_{1\varepsilon}(t,s) = t - s, \quad K_{2\varepsilon}(t,s) = \varepsilon^2[\exp(-(t-s)/\varepsilon) - 1] + \varepsilon(t-s).
$$

Из (19) получаем

$$
\alpha_{0\varepsilon}(t,0) = 0, \quad \alpha_{1\varepsilon}(t,0) = 0, \quad \alpha_{2\varepsilon}(t,0) = 2\varepsilon[1 - \exp(-1/\varepsilon)],
$$

$$\alpha_{2\varepsilon}(t,s) = 2\varepsilon[1-\exp(-(1-s)/\varepsilon)], \quad U_\varepsilon(t,s) = 2[1-\exp(-(1-s)/\varepsilon)],$$

Пусть ядро $U_\varepsilon(t,s)$ не находится на собственном значении. Тогда интегральное уравнение (18) разрешимо, и мы имеем

$$z(t,\varepsilon) = y''(0,\varepsilon)\alpha_{2\varepsilon}(t,0) + \int\limits_0^1 R_\varepsilon(t,s)y''(0,\varepsilon)\alpha_{2\varepsilon}(s,0)\,ds; \tag{40}$$

здесь $R_\varepsilon(t,s)$ — резольвента ядра $U_\varepsilon(t,s)$, которая определяется через итерированные ядра формулой

$$R_\varepsilon(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{n\varepsilon}(t,s), \tag{41}$$

где

$$U_{1\varepsilon}(t,s) = U_\varepsilon(t,s), \quad U_{n\varepsilon}(t,s) = \int\limits_0^1 U_\varepsilon(t,x)U_{n-1\varepsilon}(x,s)\,dx, \quad n \geq 2. \tag{42}$$

Вычисляя итерированные ядра по формуле (42), из (41) находим резольвенту $R_\varepsilon(t,s) = 2[1-\exp(-(1-s)\varepsilon^{-1})]/\alpha_1(\varepsilon)$, где $\alpha_1(\varepsilon) \equiv 2\varepsilon[1-\exp(-\varepsilon^{-1})]-1$. Подставляя значение резольвенты в (40), получим $z(t,\varepsilon) = 2\varepsilon y''(0,\varepsilon)[1-\exp(-\varepsilon^{-1})]/\alpha_1(\varepsilon)$. Подставляя найденное значение $z(t,\varepsilon)$ в (16), получим решение задачи (36), (37) в виде (22):

$$\begin{aligned} y(t,\varepsilon) &= y(0,\varepsilon)Q_{0\varepsilon}(t) + y'(0,\varepsilon)Q_{1\varepsilon}(t) + y''(0,\varepsilon)Q_{2\varepsilon}(t) + P_\varepsilon(t) = \\ &= y(0,\varepsilon) + ty'(0,\varepsilon) + y''(0,\varepsilon)\{\varepsilon^2[1-\exp(-t\varepsilon^{-1})] - \varepsilon t + \varepsilon t^2[1-\exp(-\varepsilon^{-1})]\}/\alpha_1(\varepsilon). \end{aligned} \tag{43}$$

Подставим $y^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,2}$, в начальные условия (37). Тогда получим систему алгебраических уравнений относительно $y^{(i)}(0,\varepsilon)$, $i=\overline{0,2}$:

$$\alpha = y(0,\varepsilon) + y'(0,\varepsilon) + y''(0,\varepsilon)\{\varepsilon^2[1-\exp(-\varepsilon^{-1})] - \varepsilon\exp(-\varepsilon^{-1})\}/\alpha_1(\varepsilon),$$

$$\beta = y'(0,\varepsilon) + y''(0,\varepsilon)\varepsilon[1-\exp(-\varepsilon^{-1})]/\alpha_1(\varepsilon),$$

$$\gamma = y''(0,\varepsilon)\{2\varepsilon[1-\exp(-\varepsilon^{-1})] - \exp(-\varepsilon^{-1})\}/\alpha_1(\varepsilon).$$

Решая эту систему, имеем

$$\begin{aligned} &y(0,\varepsilon) = \alpha - \beta + \gamma[1-\varepsilon+\varepsilon\exp(-\varepsilon^{-1})]/\alpha_2(\varepsilon), \\ &y'(0,\varepsilon) = \beta - \gamma[1-\exp(-\varepsilon^{-1})]/\alpha_2(\varepsilon), \quad y''(0,\varepsilon) = \gamma\alpha_1(\varepsilon)/\varepsilon\alpha_2(\varepsilon), \end{aligned} \tag{44}$$

где $\alpha_2(\varepsilon) \equiv 2-(2+\varepsilon^{-1})\exp(-\varepsilon^{-1})$. Из (44) видно, что $y(0,\varepsilon) = O(1)$, $y'(0,\varepsilon) = O(1)$, $y''(0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$, т.е. имеет место явление начального скачка первого порядка.

Подставляя эти найденные значения в (43), получим точное решение задачи (36), (37)

$$\begin{aligned} y(t,\varepsilon) = \alpha - \beta &+ \gamma[1+\varepsilon\exp(-\varepsilon^{-1})]/\alpha_2(\varepsilon) + [\beta - \gamma(2-\exp(-\varepsilon^{-1}))/\alpha_2(\varepsilon)]t + \\ &+ \gamma[1-\exp(-\varepsilon^{-1})]t^2/\alpha_2(\varepsilon) - \gamma\varepsilon\exp(-t\varepsilon^{-1})/\alpha_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Литература

1. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3 — 122.
2. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
3. *Касымов К. А.* Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. Алматы, 1997.

Казахский государственный национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Поступила в редакцию 15 апреля 1998 г.