Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Колесниченко, Термодинамическое описание развитой турбулентности при учете когерентных вихревых структур, *Матем. моделирование*, 2004, том 16, номер 9, 92–126

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
20 марта 2025 г., 17:54:28

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2004г., том 16, номер 9, стр. 92-126

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ УЧЕТЕ КОГЕРЕНТНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

© *А.В. Колесниченко*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 03-01-00032; № 02-02-16165)

Обсуждается термодинамический подход к построению феноменологической макроскопической модели развитой турбулентности в сжимаемой жидкости при учете происходящих в ней нелинейных кооперативных процессов. Включение в модель набора случайных переменных в качестве внутренних параметров подсистемы турбулентного хаоса, дало возможность получить методами статистической неравновесной термодинамики кинетическое уравнение Фоккера-Планка в конфигурационном пространстве. Это уравнение предназначено для определения временной эволюции плотности распределения условной вероятности структурных параметров, относящихся к каскадному процессу дробления крупномасштабных вихрей и температурных неоднородностей, а также для анализа марковских стохастических процессов перехода из одного стационарно-неравновесного состояния в другое в результате последовательной потери устойчивости при изменении управляющих параметров. Одновременно рассмотрен альтернативный метод к исследованию механизмов подобного перехода, основанный на стохастическом уравнении ланжевеновского типа, тесно связанном с выведенным кинетическим уравнением (и данная связь прослеживается в работе). Проанализирована кардинальная проблема развиваемого подхода – возможность существования асимптотически устойчивых стационарно-неравновесных состояний подсистемы турбулентного хаоса. Предложен неравновесный термодинамический потенциал для внутренних координат, обобщающий известное соотношение Больцмана-Планка для равновесных состояний на стационарно-неравновесные состояния представляющего ансамбля, и показано, что он является функцией Ляпунова для таких состояний. Рассмотрена связь между внутренней перемежаемостью в инерционном интервале масштабов и флуктуациями энергии диссипации.

THERMODYNAMIC DESCRIPTION OF A DEVELOPED TURBULENCE AT THE REGISTRATION OF COHERENT VORTEX STRUCTURES

A.V. Kolesnichenko

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia Academy of Sciences

The thermodynamic approach to build-up of phenomenological macroscopic model of a developed turbulence in compressible fluid is considered at the registration of nonlinear cooperative processes, happening in her. The insert in model of a gang of variates as interior parameters of a subsystem of turbulent chaos, has enabled to receive by methods of statistical nonequilibrium thermodynamics the Fokker-Planck equation in configurational space. This equation is intended for definition of time changes of a density function of conditional probability of structural parameters concerning to cascade process of bucking of widescale vortexes and temperature inhomogeneities, and also for the analysis of Markovian stochastic processes of transition from one stationary disequilibriums in other as a result of series loss of stability at change of driving parameters. The alternate method to examination of mechanisms of similar transition, founded on the stochastic differential equation simultaneously surveyed, intimately bound with the output kinetic equation (and the given connection is traced in paper). The cardinal problem of the developed approach is parsed – an opportunity of existence asymptotically of inconvertible stationary - disequilibrium of a subsystem of turbulent chaos. The nonequilibrium thermodynamic potential for interior coordinates extending a known relation Boltzmann-Planck for equilibrium states on stationary-disequilibrium of representing band is offered and is rotined, that he is Lyapunov function for such states. The connection between an interior alternation in an inertial interval of gauges and fluctuations of energy of a dissipation was surveyed.

Введение. Турбулентность без преувеличения является самым распространенным видом движения «космической жидкости» во Вселенной и, вместе с тем, принадлежит к числу наиболее сложных природных явлений, связанных с возникновением и развитием многомасштабных пространственно-временных когерентных структур при определенных режимах течения в существенно неравновесной открытой системе. Процессы самоорганизации на фоне турбулентного движения являются важнейшим механизмом, формирующим свойства астро- и геофизических объектов на разных стадиях их эволюции, включая возникновение галактик и галактических скоплений, рождение звезд из диффузной среды газопылевых облаков, образование протопланетных дисков и последующую аккумуляцию планетных систем, формирование газовых оболочек планет (атмосфер), динамику больших вихрей в атмосферах и околопланетной плазме и т.д. К сожалению, прямое численное моделирование нестационарных турбулентных движений на основе точных (мгновенных) гидродинамических уравнений сопряжено обычно со значительными математическими трудностями[1)], а построение общей теории турбулентности, из-за чрезвычайной сложности механизмов возникновения и эволюции взаимодействующих диссипативных разномасштабных структур при больших числах Рейнольдса, вряд ли вообще возможно в обозримом будущем. Все это требует развития новых модельных подходов к описанию предельно развитой турбулентности, которые, несмотря на все упрощения «реального мира», отражают в главном гидродинамические свойства турбулизованного течения (при минимуме необходимых вычислительных усилий). На наш взгляд, именно на пути создания феноменологических макроскопических моделей структурированной турбулентности открываются реальные возможности эффективного преодоления математических проблем, с которыми, в частности, связаны постановки и численные реализации разнообразных задач астро- и геофизики (см., например, [1-2])[2)].

В [3-4] в рамках синергетического подхода к моделированию турбулентных движений однородной сжимаемой жидкости было проведено макроскопическое рассмотрение режима развитой трехмерной (по пространственным переменным) турбулентности с учетом процессов образования разнообразных пространственно-временных турбулентных структур при переходе от одного режима турбулентного движения к другому. К ним относятся, в частности, совокупности неупорядоченных вихрей с разными размерами и скоростями, вихревых колец, вихревых трубок и иных компактных мелкомасштабных структур в физическом или в конфигурационном пространстве. Турбулизованное течение жидкости можно представить в виде термогидродинамического комплекса, состоящего из двух взаимодействующих континуумов (подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства непрерывно — подсистемы осредненного движения (которая получается в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений и предназначена для исследования динамики осредненных крупномасштабных образований) и стационарно-неравновесной подсистемы турбулентного хаоса (связанной с флуктуационным (вихревым) движением жидкости и моделируемой, в соответствии с точкой зрения Пригожина [5] на турбулентность, как на течение макроскопически высокоорганизованное, континуумом с внут-

---

1) Спектр изменения волновых чисел в реальных турбулентных потоках может достигать 4-5 порядков.

2) Новые результаты исследований российских ученых в области построения конструктивных моделей структурированной крупномасштабной турбулентности и разработки соответствующих численных алгоритмов содержатся в монографии [7].

ренней структурой). Такой подход использован в монографиях [2],[6]. Это позволяет использовать при моделировании процессов переноса и кинетики в подобной среде обобщенную теорию Онзагера, описывающую не только линейную релаксацию осредненных значений экстенсивных термодинамических параметров к их стационарным значениям, но и особенности поведения турбулентных флуктуаций в окрестности стационарно-неравновесных состояний. Для каждого из континуумов[3)] вводились локальные (для физически бесконечно малых областей $d\mathbf{x}$) термодинамические параметры, такие как плотность, давление, термодинамическая температура, внутренняя энергия, энтропия и т.д., причем для описания квазистационарной «мезоструктуры» турбулентного хаоса, помимо обобщенных термодинамических переменных [8], вводились дополнительные внутренние переменные, отвечающие, в конечном счете, возбужденным коллективным (макроскопическим) степеням свободы турбулизованной жидкости[4)]. Поля гидродинамических скоростей для указанных подсистем предполагались совпадающими, поскольку в процессе эволюции реального турбулизованного континуума не происходит разделения соответствующих лагранжевых объемов (эффекта диффузии) — подсистема турбулентного хаоса не имеет диффузионной скорости относительно подсистемы осредненного движения. Кроме этого, предполагалось, что обобщенные термодинамические параметры состояния, характеризующие стационарно-неравновесную вихревую структуру хаоса («собственно» турбулентность), связаны обычными для локально-равновесной термодинамики соотношениями типа тождеств Гиббса, Гиббса-Дюгема и т.п. Другими словами считалось, что подобного рода соотношения остаются справедливыми и вдали от локального равновесия[5)], если, тем не менее, подсистема находится в устойчивом стационарно-неравновесном состоянии. Это ключевое предположение явилось своего рода "новым" постулатом, на котором и основывается термодинамический подход к модельному описанию развитой турбулентности. При данных допущениях, методы неравновесной статистической термодинамики позволили получить для линейного режима осредненной турбулентности определяющие соотношения для термодинамических потоков и сил в виде, наиболее полно описывающем процессы переноса и кинетики в турбулизованной среде. Одновременно, оказалось возможным использовать в качестве дополнительных макроскопических параметров турбулентного хаоса внутренние координаты, связанные, в частности, с набором мелкомасштабных статистических характеристик флуктуирующих полей скорости и температуры в случайном каскадном процессе Ричардсона-Колмогорова. При учете центрального для данного подхода постулата Пригожина, касающегося направления протекания необратимых процессов в каком-либо локальном объеме пространства внутренних координат (см. [9]; гл.3, § 11), это дало возможность вывести термодинамическим путем эволюционные уравнения Фоккера-Планка в пространстве конфигураций. Подобные кинетические уравнения предназначены для определения временной эволюции плотностей распределения условных вероятностей различных стохастических мелкомасштабных характеристик структурированной турбулентности, и, кроме этого, позволяют исследовать

[3)] Абстрактные термины "жидкий континуум", "среда", "подсистема турбулентного хаоса" и т.п. интерпретируются далее в соответствии с физическим смыслом модели.

[4)] Заметим, что, согласно Онзагеру [10], для описания системы из точечных вихрей, в которой вихри хорошо перемешаны, можно использовать методы статистической термодинамики. Вместе с тем, проблема построения вихревой статистической механики в трехмерном случае все еще остается до конца не решенной.

[5)] Поскольку энергия турбулентных движений благодаря вязкости непрерывно рассеивается, то ситуация, при которой достигается локальное статистически равновесное состояние турбулентного хаоса, оказывается, в общем случае, невозможной. Вместе с тем, в случае стационарного течения турбулизованной жидкости, когда вязкая диссипация энергии за большое время в среднем компенсируется энергией от стационарного источника неравновесности, стохастические процессы в подсистеме турбулентного хаоса в принципе не отличаются от случайных процессов в какой-либо бездиссипативной системе.

процессы перехода из одного устойчивого стационарно-неравновесного состояния в другое, вызванные последовательной потерей устойчивости гидродинамической системой при изменении управляющих режимом турбулентного движения в целом параметров, например, чисел Рейнольдса и Пекле.

В настоящей статье, развивающей указанные концепции автора, рассмотрен альтернативный подход к исследованию механизмов перехода подобного рода вблизи критических точек самоорганизующейся подсистемы турбулентного хаоса. Этот подход, базирующийся на стохастических уравнениях ланжевеновского типа и/или детерминистских уравнениях переноса для условных средних, тесно связан с подходом, опирающимся на кинетическое уравнение Фоккера-Планка, что и прослеживается в работе. Его преимущество при изучении стохастических процессов в окрестности стационарных состояний проявляется, в частности, в возможности использования существующих математических методов теории устойчивости движения, теории нелинейной динамики хаотических и стохастических систем и т.п. В связи с этим уместно отметить, что только за последнее время на проблеме моделирования структурированной турбулентности (в рамках синергетического подхода) произошло сближение таких наук, как гидродинамическая устойчивость, статистическая термодинамика неравновесных процессов, теория бифуркаций нелинейных динамических систем и т.п. Между тем, уже давно было ясно, что любая адекватная макротеория развитой турбулентности не может быть построена без явного моделирования когерентных диссипативных структур и описания их какими-то макроскопическими параметрами [11-13], поскольку именно мелкомасштабные пространственно-временные вихревые структуры являются в известном смысле «молекулами» такой теории.

В литературе известны четыре «сценария» начального этапа зарождения турбулентности в гидродинамических системах[6)], которые практически целиком относятся к анализу неравновесных нестационарных состояний с нелинейными переходными режимами, периодическими траекториями и ограниченными апериодическими движениями (см., например, [14-15]). Временную эволюцию неравновесных нестационарных динамических систем принято изучать с помощью нелинейных (стохастических) дифференциальных уравнений – обыкновенных или в частных производных, или уравнений эволюции с дискретными временными интервалами (например, логистического уравнения). Решить подобные динамические уравнения в явном виде в общем случае не представляется возможным. Вместе с тем, их численные реализации обладают гораздо более сложным поведением, по сравнению с особенностями поведения отдельных решений стационарных систем. В частности, здесь могут существовать изолированные замкнутые траектории, являющиеся образами периодических движений в фазовом пространстве, – так называемые предельные циклы, к которым стремятся траектории, начинающиеся в области их притяжения; квазипериодические движения на торах с бифуркациями; траектории, являющиеся хаотическими аттракторами, которые непрерывно плотно заполняют компактное пространство и соответствуют непериодическим решениям, а также различные переходы между подобными структурами в критических точках со своей локальной бифуркацией, где происходит потеря устойчивости и т.д. Вся эта огромная совокупность численных решений, с разнообразными типами поведения (от детерминированного к стохастическому), чрезвычайно существенна для понимания механизмов возникновения турбулентности[7)].

[6)] Три из этих сценариев целиком относятся к начальному этапу зарождения турбулентности, когда число возбужденных макроскопических (коллективных) степеней свободы все еще невелико. Данная работа придерживается в основном сценария Ландау-Хопфа, согласно которому непрерывный переход к полностью развитой турбулентности осуществляется через каскад бифуркаций, связанный с последовательным возбуждением все новых и новых степени свободы.

[7)] Следует отметить, что теория динамических систем пока еще не оказала значительного влияния на количественный аспект изучения развитых турбулентных течений при больших числах Рейнольдса.

Мы не будем, однако, касаться здесь этих важных проблем, а сосредоточимся преимущественно на макроскопическом описании предельно развитой структурированной турбулентности, включая некоторые аспекты теории марковских флуктуаций применительно к стационарно-неравновесным состояниям турбулентного хаоса, используя для данной цели статистические методы в неравновесной термодинамике. В предыдущих статьях автора [3,4] остался открытым следующий вопрос: являются ли стационарные состояния турбулентного хаоса действительно устойчивыми, подобно термодинамически равновесным состояниям в классической термодинамике? Для ответа на этот ключевой для развиваемого термодинамического подхода вопрос необходимо, прежде всего, иметь принципиальную возможность «приготовить» исходный стационарный статистический ансамбль, отвечающий макроскопической подсистеме турбулентного хаоса. Ясно, что возможность сформировать подобный ансамбль появляется, например, при наличии асимптотически устойчивых стационарных состояний, имеющих конечные области притяжения. В случае среды с молекулярными флуктуациями, когда стационарное состояние является статистически равновесным, асимптотическую устойчивость равновесного состояния обеспечивает существование соответствующей термодинамической функции Ляпунова. Ниже показано, что аналогичная связь с термодинамикой существует и для стационарных состояний континуума с турбулентными флуктуациями. В частности, предложен в явном виде неравновесный термодинамический потенциал, обобщающий известное соотношение Больцмана-Планка для функции распределения равновесного состояния на стационарные состояния ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса, и показано, что он является функцией Ляпунова для асимптотически устойчивых стационарных состояний.

Проанализирована взаимосвязь между динамическими свойствами турбулентных флуктуаций в стационарно-неравновесных состояниях и устойчивостью бифурцирующих состояний в пространстве конфигураций. Качественно[8)] рассмотрено динамическое поведение крупномасштабных флуктуаций в окрестности критических точек перехода, приводящее к появлению простейших типов аттракторов – притягивающих периодических движений (предельных циклов). Проанализирована связь внутренней перемежаемости в инерционном интервале масштабов с флуктуациями скорости диссипации турбулентной энергии. Закономерности, устанавливаемые в процессе исследования марковских флуктуаций диссипации энергии или родственных ей положительных мелкомасштабных характеристик структурированной турбулентности, важны, на наш взгляд, и для понимания эволюции немарковских случайных полей скорости и температуры в условиях реального турбулентного движения жидкости, и, кроме того, они могут оказаться полезными при создании так называемых подсеточных моделей турбулентности с учетом перемежаемости.

Обсудим теперь более детально обоснование ряда постулатов, а также физических и математических предположений, на которых основан развиваемый подход.

1. Моделирование структурированной турбулентности методами статистической термодинамики

1.1. Подсистема турбулентного хаоса. Проблема осреднения, тесно связанная с теорией турбулентности, является одной из центральных в механике сплошных сред, а в случае такой сложной системы, как турбулизованная температурно-неоднородная сжимаемая жидкость[9)], именно от способа осреднения зависит само построение макроскопической модели (см., на-

---

[8)] Исследованию движения системы на предельных циклах (связанных с мезомасштабными когерентными структурами вихревого континуума) будет посвящена следующая работа автора.

[9)] Имея ввиду разнообразные астрофизические приложения модели, когда отношение характерной скорости жидкости к осредненной скорости звука (мера значимости флуктуаций плотности) намного больше единицы, далее будем предполагать переменность массовой плотности.

пример, [16]). В классических теориях турбулентности, обычно для всех без исключения гидродинамических параметров, осреднения вводятся некоторым одинаковым образом, причем, как правило, без весовых коэффициентов. Вместе с тем, подобное идентичное для всех параметров осреднение в общем случае жидкости с переменной массовой плотностью $\rho(\mathbf{x},t)$ (где $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки в декартовой прямоугольной системе координат) приводит не только к громоздким уравнениям масштаба среднего движения, но и к затруднениям физической интерпретации некоторых отдельных членов в них. Поэтому при построении макроскопической модели развитой турбулентности в сжимаемой среде удобно пользоваться, наряду с теоретико-вероятностным средним[10)] значением $\bar{f}(\mathbf{x},t)$ какого-либо гидродинамического параметра $f(\mathbf{x},t)$, так называемым, средневзвешенным значением этого параметра (осредненным по Фавру), задаваемым соотношением $\langle f(\mathbf{x},t)\rangle = \overline{\rho f(\mathbf{x},t)}/\bar{\rho}$; ; при этом: $f=\bar{f}+f'$, $\overline{f'}=0$; $f=\langle f\rangle+f''$, $\overline{f''}\neq 0$; f', f'' – соответствующие турбулентные пульсации.

При модельном описании турбулизованной среды разделение реального течения жидкости на воображаемые осредненное и турбулентное зависит, вообще говоря, от выбора пространственно-временной области, для которой установлены средние значения локальных физических переменных, являющиеся непрерывными функциями координат $\mathbf{x}$ и времени t, т.е. имеет до некоторой степени условный характер. Гидродинамический масштаб осредненного движения Λ (масштаб наблюдения по Обухову [17], или шаг разрешения разностной сетки), лежащий в инерционном интервале $\eta<\Lambda<<L$ и определяемый размером $d\mathbf{x}\sim\Lambda^3$ области осреднения G, предполагается далее таким, что подсистема турбулентного хаоса содержит всю совокупность вихрей, размер которых меньше области осреднения[11)]. В этом случае воздействие турбулентного хаоса (флуктуаций с пространственными масштабами меньшими Λ) проявляется в появлении дополнительного турбулентного переноса масштаба среднего движения, что требует привлечения полуэмпирических моделей замыкания и моделирования соответствующих коэффициентов турбулентного обмена. Здесь $\eta=(\nu^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}$ – колмогоровский масштаб длины, который характеризует влияние вязкой диссипации на структуру мелкомасштабной турбулентности; L – внешний, или интегральный пространственный масштаб, характеризующий механизм возникновения турбулентности; $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ – важнейшая характеристика развитой турбулентности (каскадного процесса), представляющая собой среднюю скорость передачи кинетической энергии пульсационного движения по иерархии вихрей и одновременно (в равновесных условиях) равная скорости диссипации турбулентной энергии в единице массы жидкости в единицу времени.

В [3] исследован стационарно-неравновесный режим полностью развитой турбулентности в жидкости, при котором процесс последовательного дробления крупных вихрей создает непрерывный поток энергии вдоль иерархии вихрей различных размеров через инерционный интервал от энергетического к вязкому, где и происходит ее диссипация в тепло (на масштабе η). Поскольку турбулентность сопровождается диссипацией кинетической энергии, то для поддержания ее стационарного режима (когда накачка и диссипация энергии взаимно уравновешиваются) необходим постоянно действующий внешний (по отношению к среде) источник. При этом предполагалось, что непрерывный процесс перекачки кинетической энергии осредненного движения от крупномасштабных вихрей к малым может быть адекватно описан в рамках случайного каскада Ричардсона-Колмогорова. Кроме этого использовалась концепция

[10)] Будем также использовать средние по пространству и/или времени при учете обычного для статистической физики предположения об эргодичности.

[11)] Согласно существующим оценкам (см., например, [7]), чтобы осредненному потоку содержать основную долю (80% или 90%) полной энергии турбулизованного течения нужно, чтобы масштаб осреднения Λ был в десять-двадцать раз меньше интегрального масштаба L.

теории Колмогорова [21][12)], согласно которой в пределе очень больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = Lu_0/\nu$ и Пекле $\mathrm{Pe} = L_T u_{T0}/\chi$, соответствующих крупномасштабным движениям в потоке, несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного течения, случайный характер дробления вихрей (или макроструктурных неоднородностей температуры) и хаотичность передачи их энергии по каскаду вниз приводят к тому, что статистический режим турбулентных флуктуаций в границах небольшой пространственно-временной области осреднения G мгновенных гидродинамических уравнений, является почти[13)] локально изотропным – однородным, изотропным и квазистационарным, т.е. изменяющимся в зависимости лишь от управляющих параметров, и прежде всего от числа Рейнольдса Re, определяющего, в конечном счете, число каскадов в иерархии вихрей различных порядков. Здесь u_0 и u_{T0} – типичные изменения средней скорости на расстояниях соответственно L и L_T; χ, ν – коэффициенты молекулярной температуропроводности и кинематической вязкости; L_T – расстояние, на котором заметно меняется средняя температура[14)].

С учетом сделанных предположений было показано [4], что для континуума, отвечающего флуктуирующему хаосу, устанавливается такое «квазилокальное равновесие», при котором производство энтропии турбулизации (из-за внутренних диссипативных процессов) компенсируется ее оттоком, так что суммарное возникновение энтропии хаоса отсутствует. Поддержание подобного стационарно-неравновесного состояния в подсистеме хаоса осуществляется благодаря притоку отрицательной энтропии (негэнтропии) от «внешней среды» (в нашем случае от подсистемы осредненного движения). Как известно, такой обмен энтропией между двумя взаимооткрытыми системами часто является достаточным условием возникновения новых когерентных структур в одной из них [20].

При макроскопическом описании структуры турбулентного хаоса в цитируемых работах был применен альтернативный статистическому термодинамический формализм, основанный на включении в модель, помимо обобщенных экстенсивных термодинамических переменных типа внутренней энергии $U_{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ и удельного объема $1/\bar{\rho}(\mathbf{x},t)$, некоторой бесконечной последовательности внутренних переменных $n(q_k,\mathbf{x},t)$, где параметры q_k изменяются непрерывно. Внутренние переменные $n(q_k,\mathbf{x},t)$ представляют собой концентрации мелкомасштабных вихревых структур[15)] и температурных неоднородностей в состоянии, характеризуемом данными значениями параметров q_k (внутренних координат). При этом предполагается, что подобные когерентные структуры каким-то образом локализованы, как в координатном пространстве $\mathbf{x}$, так и в пространстве конфигураций q_k. Таким образом, внутренние координаты $q_k(\mathbf{x},t)$ ($k=1,2,\ldots,n$) (рассматриваемые характеристики ансамбля вихревых и температурных структур, отвечающие мелкомасштабным турбулентным пульсациям) могут быть, вообще говоря, случайными функциями, флуктуирующими около своих стационарных (средних) значений q_k^{ss}. В качестве внутренних координат хаоса могут фигурировать, в частности, следующие положительные величины (являющиеся четными функциями флуктуирующих скоростей, температур или концентраций) или их логарифмы: кинетическая энергия вихрей, $e(\mathbf{x}) = \mathbf{u}''^2/2$; скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязко-

---

[12)] Теории Колмогорова [17-18] 1941 года и 1961 года, вслед за Фришем [19], для краткости будем соответственно обозначать через аббревиатуру K41 и K61.

[13)] Полной локальной изотропии из-за наличия мелкомасштабных структур естественно быть не может.

[14)] Далее будем для простоты предполагать, что число Прандтля $\mathrm{Pr}=\nu/\chi$ имеет порядок единицы и $L \approx L_T$; в этом случае границы инерционного и конвективного интервалов, в которых существенны эффекты молекулярной вязкости и молекулярной теплопроводности можно считать совпадающими.

[15)] Плотность вероятности $W_1(\mathbf{q},t)$ можно рассматривать как концентрацию (относительное число) частиц в точке $\mathbf{q}$ в момент времени t.

сти, $\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\nu}{2}\sum_{i,j}(\partial u_i''/\partial x_j + \partial u_j''/\partial x_i)^2$; скалярная диссипация температурных неоднородностей, $\varepsilon_T(\mathbf{x}) = \chi\sum_j(\partial T''/\partial x_j)^2$; скорость смешения до молекулярного уровня вещества с концентрацией $\theta(\mathbf{x},t)$, не влияющего на динамику течения, $\varepsilon_\theta(\mathbf{x}) = \chi\sum_j(\partial\theta''/\partial x_j)^2$ и т.п. Заметим, что величина ε_θ определяет меру неоднородности концентрационного поля, исчезающей в единицу времени за счет молекулярной диффузии $D \approx \chi$.

Очевидно, чисто термодинамическое описание стационарно-неравновесной вихревой структуры подсистемы турбулентного хаоса, сжатое по необходимости, является до известной степени неполным, поскольку любые две подобные подсистемы с одинаковым набором экстенсивных термодинамических параметров состояния не могут быть (как и в классической термодинамике) тождественными во всех отношениях. Происходит это, в частности, от того, что такие подсистемы, находящиеся в том или ином стационарном состоянии вдали от локального термодинамического равновесия, при определенных значениях управляющих параметров могут приближаться к стационарным состояниям с нейтральной устойчивостью (так называемым критическим точкам потери устойчивости), и вслед за тем скачкообразно переходить к другим асимптотически устойчивым стационарным образованиям, соответствующим той или иной форме надмолекулярного когерентного поведения огромного числа частиц, например, осцилляциям разномасштабных вихрей. Причиной этого являются возникающие статистические крупномасштабные (турбулентные[16)]) флуктуации внутренних координат состояния хаоса. Они и служат мерой различий в любом множестве термодинамически одинаковых систем, которые представляют собой множество подсистем хаоса, обладающих одними и теми же термодинамическими параметрами. Эти турбулентные флуктуации не подавляются в сильно неравновесных условиях, а напротив, усиливаются при определенных обстоятельствах внутренними необратимыми процессами в точках бифуркации, в которых подсистема «может выбирать» между различными состояниями, что и приводит, в конечном счете, к образованию разнообразных когерентных структур.

Напомним, что, согласно Пригожину, подобная способность осуществлять «порядок через флуктуации» является фундаментальным свойством любых открытых сильно неравновесных динамических систем. Таким образом, из-за постоянно происходящих турбулентных флуктуаций любое стационарно-неравновесное состояние подсистемы турбулентного хаоса следует представлять себе, как состояние не одной отдельной подсистемы, а физического ансамбля – множества подсистем, тождественно «приготовленных» с точки зрения их сжатого описания. Для адекватного моделирования подобного физического ансамбля необходимо привлекать, в общем случае, формализм обобщенной статистической термодинамики, или статистические методы в неравновесной термодинамике.

Будем далее предполагать, что для полного статистического описания стохастического векторного процесса $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ в турбулизованном континууме (набора структурных мелкомасштабных характеристик хаоса $q_k(\mathbf{x},t)$, где $k=1,2,\ldots,n$, который удобно собрать в один вектор-столбец в n-мерном пространстве конфигураций) достаточно знать одноточечную плотность вероятности $W_1(\mathbf{q},t)$ и совместную двухточечную плотность распределения вероятности $W_2(\mathbf{q}_0,t_0;\mathbf{q},t)$. Как известно, случайные процессы, полностью описываемые только этими двумя функциями, являются марковскими процессами[17)]. Будем также использовать двухточечную

[16)] Крупномасштабные турбулентные флуктуации следует отличать от статистических молекулярных флуктуаций, обусловленных атомной структурой системы.

[17)] Можно сказать, что это кардинальное предположение определяет класс случайных процессов (турбулентных флуктуаций), к которому применима рассматриваемая стохастико-термодинамическая модель развитой турбулентности.

плотность условной вероятности, $P_2(\mathbf{q}_0,t_0|\mathbf{q},t)$, которая позволяет найти вероятное значение параметра $\mathbf{q}$ в момент времени t, если в момент времени t_0, с вероятностью равной единице, $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0$. Эти плотности вероятности будем употреблять для получения средних значений функций $f(\mathbf{q}(t))$ от случайного вектора состояния $\mathbf{q}(t)$: в частности, формула $\overline{f(\mathbf{q}(t))} \equiv$ $\equiv \int f(\mathbf{q}(t))\,W_1(\mathbf{q},t)d\mathbf{q}$ определяет безусловное среднее величины $f(\mathbf{q}(t))$, а формула $\overline{f(\mathbf{q}(t))}^0 \equiv$ $\equiv \int f(\mathbf{q})P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)d\mathbf{q}$ вводит среднее значение $f(\mathbf{q}(t))$ в момент времени t при условии, что $\mathbf{q}(t_0)=\mathbf{q}_0$ (условное среднее). Связь между этими средними значениями по условному подансамблю $\overline{f(\mathbf{q}(t))}^0$ и всему физическому ансамблю $\overline{f(\mathbf{q}(t))}$ неявно содержится в соотношении $P_2(\mathbf{q}_0,t_0|\mathbf{q},t)=W_2(\mathbf{q}_0,t_0;\mathbf{q},t)/W_1(\mathbf{q}_0,t_0)$, которое, собственно, и определяет, так называемую вероятность перехода P_2. Далее мы будем, в основном, рассматривать, так называемый, стационарный физический ансамбль турбулентного хаоса, состоящий из адекватных в указанном выше смысле подсистем, поддерживаемых непрерывно действующими внешними источниками турбулентности в таком состоянии, при котором случайные переменные $\mathbf{q}(t)$ являются инвариантными относительно сдвига по оси времени, т.е. $\mathbf{q}(t_p+\tau)=\mathbf{q}(t_p)$ при всех p и τ. Ясно, что в этом случае одновременная плотность вероятности $W_1(\mathbf{q})$ не зависит от времени, а плотности совместных вероятностей зависят лишь от попарных разностей $(t-t_0)$, например, $P_2(\mathbf{q}_0,t_0|\mathbf{q},t)=P_2(\mathbf{q}_0,0|\mathbf{q},t-t_0)$. Имея это ввиду, далее везде будем опускать в выражениях для W_2 и P_2 начальный момент времени и записывать их сокращенно: $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)$ и т.д.

Наконец, введем в рассмотрение гауссовский стохастический процесс $\mathbf{q}(t)$ в пространстве конфигураций, для которого все совместные и условные плотности вероятности имеют гауссовскую форму. Как будет ясно из дальнейшего, можно считать, что стационарные, гауссовские и марковские процессы (так называемые процессы Орштейна-Уленбека) представляют собой неплохое приближение при описании локальной структуры модельной макроскопической подсистемы турбулентного хаоса, отвечающей случайному каскадному процессу непрерывного дробления вихрей и температурных неоднородностей. Важно при этом иметь в виду, что статистика сильно нелинейных случайных полей скорости и температуры в реальной турбулизованной жидкости не носит ни гауссовского, ни марковского характера, особенно на больших масштабах (см., например, [21]). Тем не менее, преимущество подобного приближения состоит, в частности, в том, что мы приобретаем возможность, на уровне теории случайных функций, исследовать свойства и поведение тех стационарно-необратимых диссипативных процессов в подсистеме хаоса, которые связаны с флуктуациями, устойчивостью и бифуркационными изменениями отдельных стационарных состояний в конфигурационном пространстве. Многомерное обобщение кривой Гаусса $G(\mathbf{q})=\left((2\pi)^n\det\sigma\right)^{-1/2}$ $\exp\left[-\sigma^{-1}:(\mathbf{q}-\overline{\mathbf{q}})(\mathbf{q}-\overline{\mathbf{q}})/2\right]$ определяется двумя матричными величинами: средним значением $\overline{\mathbf{q}}=\int \mathbf{q}G(\mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q}$ и тензорной дисперсией $\sigma=\int(\mathbf{q}-\overline{\mathbf{q}})(\mathbf{q}-\overline{\mathbf{q}})G(\mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q}$ (здесь σ^{-1} – матрица, обратная к положительно определенной матрице n-го порядка σ). Отметим, что для стационарного гауссовского процесса только условные средние $\overline{f(\mathbf{q}(t))}^0$ и соответствующие дисперсии зависят от времени и, именно, с этими величинами связаны детерминистские уравнения переноса, описывающие линейную релаксацию средних к их стационарным значениям.

Ранее [3] для непрерывного марковского диффузионного стационарно-неравновесного стохастического процесса $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$, описывающего эволюцию внутренних параметров турбулентного хаоса, включая временную эволюцию статистических характеристик вихревых структур в случайном каскаде Ричардсона-Колмогорова, нами было термодинамически выведено кинетическое уравнение Фоккера-Планка для описания эволюции плотности условной вероятности $P_2 \equiv P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)$ для вектора состояния $\mathbf{q}$ по отношению к начальным параметрам t_0,$\mathbf{q}_0$. В матричных обозначениях оно имеет вид

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot [\mathbf{K}(\mathbf{q}, T_{\text{turb}})P_2] + \frac{1}{2} RT_{\text{turb}} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} : [\mathbf{Q}(\mathbf{q})P_2]. \tag{1}$$

Здесь вектор $\mathbf{K}(\mathbf{q}, T_{\text{turb}})$ [18)] и тензор второго ранга $\frac{1}{2}RT_{\text{turb}}\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ в правой части определяют соответственно дрейфовую и диффузионную части потока вероятности, причем P_2 – положительная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\int P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)d\mathbf{q} = 1\,, \quad \int W_1(\mathbf{q}_0)P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)d\mathbf{q}_0 = W_1(\mathbf{q})\,, \quad \lim_{t\to\infty} P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) = W_1(\mathbf{q})\,. \tag{2}$$

Последнее соотношение означает, что для стационарных процессов условная плотность асимптотически со временем перестает зависеть от начального условия. Параметр $RT_{\text{turb}} \equiv \omega$ отражает интенсивность естественного (внутреннего) источника флуктуаций переменных $\mathbf{q}$, связанного с собственным нелинейным возмущающим механизмом системы – с «тепловой» структурой турбулентного хаоса. Предельному случаю $\omega \to 0$ отвечает детерминированное поведение вектора состояния $\mathbf{q}(t)$, удовлетворяющего детерминистскому дифференциальному уравнению

$$\partial \mathbf{q} / \partial t = \mathbf{K}(\mathbf{q},0) \tag{3}$$

(см. ниже формулу (24)). Уравнение (1) удобно для изучения стохастических процессов, связанных с начальными условиями вида $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},0) = \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)$, которые соответствуют дельтаобразной плотности вероятности, сосредоточенной в точке $\mathbf{q}=\mathbf{q}_0$. Другими словами, предполагается, что в момент t=0 из точки $\mathbf{q}_0$ конфигурационного пространства выходит большое число (ансамбль) траекторий, движущихся независимо друг от друга, и при этом ищется плотность их распределения в какой-либо области $\mathbf{q}$-пространства в момент времени t. Сверх этого, на функцию $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)$ могут быть наложены те или иные граничные условия по $\mathbf{q}$, которые должны быть специально сформулированы для анализа конкретных задач. Если в начальный момент времени t=0 задано не начальное состояние $\mathbf{q}(0)$=$\mathbf{q}_0$, а начальное распределение $W(\mathbf{q})$, то удобно искать решение уравнения Фоккера-Планка для плотности вероятности $W_1(\mathbf{q},t)$с начальным условием $W_1(\mathbf{q},0)$=$W(\mathbf{q})$. Заметим, что при использовании второго соотношения (2), легко можно убедиться в том, что одномерная плотность вероятности $W_1(\mathbf{q},t)$ также удовлетворяет уравнению (1).

1.2. Термодинамический вывод кинетического уравнения. Для удобства читателя, для которого недоступна работа [4], повторим здесь частично (но с необходимыми модификациями, учитывающими многомерность пространства конфигураций, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса) термодинамический вывод кинетического уравнения (1). Уравнение (1) – это просто уравнение неразрывности $\partial P_2 / \partial t = -\partial \mathbf{J}(\mathbf{q},t) / \partial \mathbf{q}$ для нормированного к единице числа вихревых структур $n(\mathbf{q},t)$ в единице объема $\mathbf{q}$-пространства (так называемое основное кинетическое уравнение), в котором

[18)] Матрица $\mathbf{K}$ не образует, вообще говоря, вектора, если не ограничиваться только линейными преобразованиями координат.

$$\mathbf{J}(\mathbf{q},t) \equiv \left[\mathbf{K}(\mathbf{q},\omega)P_2\right] - \frac{1}{2}\omega\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\cdot\left[\mathbf{Q}(\mathbf{q})P_2\right] \quad (4)$$

– поток вероятности состояния $\mathbf{q}$, принимающего в начальный момент времени t=0 значение $\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0$. Здесь $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) \equiv \mathrm{n}(\mathbf{q}(\mathbf{q}_0,t))/\mathrm{n}_\Sigma$; $n_\Sigma(\mathbf{x},t) = \int n(\mathbf{q}(\mathbf{x}),t)d\mathbf{q}$ – полное число вихревых структур в элементарном объеме среды.

Для термодинамического вывода уравнения Фоккера-Планка (1) может быть использована глубокая аналогия между консекутивными химическими реакциями ($s_1 \to s_2 \to s_3 \to_{...}$) и каскадным процессом Ричардсона-Колмогорова, который будем далее рассматривать как своего рода химические превращения с соответствующими химическим потенциалом $\mu_{\text{turb}}(\mathbf{q})$ для внутренних степеней свободы $\mathbf{q}$ и химическим сродством де Донде $\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q}) = -\partial\mu_{\text{turb}}/\partial\mathbf{q}$, представляющим собой движущую силу каскадного процесса и отвечающим протеканию одного эквивалента $n(\mathbf{q}) \to n(\mathbf{q}+\partial\mathbf{q})$ процесса дробления вихрей.

Следует отметить, что понятие химического потенциала отличается большой общностью: оно применимо почти к любой сплошной модельной среде, если для нее возможно ввести понятие термодинамической температуры. Ранее [2] формализм химического потенциала был распространен на стационарно-неравновесный турбулентный хаос, для которого интенсивные термодинамические параметры, такие как обобщенные температура T_{turb} (не сводящаяся в общем случае к абсолютной температуре) и давление p_{turb} турбулизации, а также химический потенциал $\mu_{\text{turb}}(\mathbf{q})$ для внутренних степеней свободы $\mathbf{q}$, определялись из фундаментального соотношения Гиббса для обобщенной энтропии S_{turb} (заданной *a priori* в виде характеристической функции $S_{\text{turb}} = S_{\text{turb}}\left(U_{\text{turb}},\, 1/\bar{\rho},\, n(\mathbf{q})/\bar{\rho}\right)$ (см., например, [22]) с помощью обычных соотношений

$$\frac{1}{T_{\text{turb}}} = \left(\frac{\partial S_{\text{turb}}}{\partial U_{\text{turb}}}\right)_{1/\bar{\rho},\,n/\bar{\rho}}; \quad \frac{p_{\text{turb}}}{T_{\text{turb}}} = \left(\frac{\partial S_{\text{turb}}}{\partial(1/\bar{\rho})}\right)_{U_{\text{turb}},\,n/\bar{\rho}}; \quad \frac{\mu_{\text{turb}}(\mathbf{q})}{T_{\text{turb}}} = -\left(\frac{\partial S_{\text{turb}}}{\partial\,(n(\mathbf{q})/\bar{\rho})}\right)_{1/\bar{\rho},\,U_{\text{turb}}},$$

в которых, однако, химический потенциал $\mu_{\text{turb}}(\mathbf{q})$ для внутренних степеней свободы определяется, как функциональная производная. По предположению, введенная таким образом энтропия турбулизации S_{turb} содержит все термодинамические сведения о подсистеме стационарно-неравновесного турбулентного хаоса, т.е. связана с устойчивостью, флуктуациями и динамическими изменениями в квазистационарном состоянии так же, как локальная равновесная энтропия в квазиравновесном состоянии [23]. Тогда дифференциальная форма фундаментального соотношения Гиббса для энтропии турбулизации S_{turb}, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объема $d\mathbf{x}$, принимает следующий вид [4]:

$$\frac{dS_{\text{turb}}}{dt} = \frac{1}{T_{\text{turb}}}\frac{dU_{\text{turb}}}{dt} + \frac{p_{\text{turb}}}{T_{\text{turb}}}\frac{d(1/\bar{\rho})}{dt} + \frac{1}{T_{\text{turb}}}\int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q})d\mathbf{q},$$

где $d(..)/dt \equiv \partial(..)/\partial t + \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla(..)$ – полная субстанциональная производная по времени относительно осредненного поля скоростей; ∇ – оператор Гамильтона; $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t) \equiv \overline{\rho\mathbf{u}}/\bar{\rho}$ – осредненная по Фавру гидродинамическая скорость сжимаемой среды. При отождествлении «внутренней энергии» U_{turb} хаоса с энергией турбулентности $\langle e\rangle \equiv \overline{\rho(\mathbf{u}'')^2}/2\bar{\rho}$ (осредненной по Фавру удельной пульсационной кинетической энергии течения жидкости) и в предположении, что подсистема турбулентного хаоса в термодинамическом смысле является идеальным классическим газом с тремя степенями свободы, по которым энергия распределена равномерно, будем иметь

$$\bar{\rho} U_{\text{turb}} = \tfrac{3}{2} R \bar{\rho} T_{\text{turb}} = \tfrac{3}{2} p_{\text{turb}}, \qquad \mu_{\text{turb}}(\mathbf{q},t) = RT_{\text{turb}} \ln\left[n(\mathbf{q},t)/n_\Sigma\right] + \Phi(\mathbf{q}, T_{\text{turb}}), \tag{5}$$

где $R \equiv k_B / m$; k_B – постоянная Больцмана; $m\,(=\bar{\rho}/n_\Sigma)$ – масса вихревого моля; $\Phi(\mathbf{q}, T_{\text{turb}})$ – так называемая потенциальная энергия (на единицу массы) по внутренней координате $\mathbf{q}$, которая может зависеть от обобщенной температуры T_{turb}. Это одно из ключевых допущений модели [3,23].

Определяющие соотношения для турбулентных термодинамических потоков и сил, замыкающие систему осредненных гидродинамических уравнений сжимаемой жидкости (приведенную, например, в монографии [2]), могут быть получены из балансового уравнения для энтропии суммарного континуума $S_\Sigma = \langle S \rangle + S_{\text{turb}}$ (для так называемой сигма-функции Σ), которое в случае стационарно-неравновесного состояния подсистемы турбулентного хаоса, принимает вид [4]

$$\bar{\rho}\frac{dS_\Sigma}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}^\Sigma}{\langle T \rangle} + \frac{\mathbf{J}_e^{\text{turb}}}{T_{\text{turb}}} \right) \cong \frac{1}{\langle T \rangle} \left(-\mathbf{j}^\Sigma \cdot \frac{\nabla \langle T \rangle}{\langle T \rangle} + \overset{\circ}{\mathbf{R}} : \overset{\circ}{\mathbf{E}} + \bar{\rho} \int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \right) \geq 0. \tag{6}$$

Здесь $\langle S \rangle$ и $\langle T \rangle$ – осредненные по Фавру удельная энтропия и абсолютная температура подсистемы осредненного движения;

$$\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q},t) \equiv -\frac{\partial \mu_{\text{turb}}(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{RT_{\text{turb}}}{n(\mathbf{q},t)} \frac{\partial n(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, T_{\text{turb}})}{\partial \mathbf{q}}$$

– обобщенное химическое сродство для состояния $\mathbf{q}$ (функция состояния подсистемы турбулентного хаоса); $\mathbf{j}^\Sigma(\mathbf{x},t) \equiv (\bar{\mathbf{j}} + \mathbf{j}^{\text{turb}} - \overline{p'\mathbf{u}''})$ — полный поток тепла в подсистеме среднего движения; $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{j}^{\text{turb}}(\mathbf{x},t) \equiv \overline{\rho h'' \mathbf{u}''}$ — соответственно осредненный молекулярный и турбулентный поток тепла ($h \equiv U + p/\rho$ — мгновенное значение удельной энтальпии среды); $\mathbf{J}_e^{\text{turb}}(\mathbf{x},t) \equiv \overline{\rho(\mathbf{u}''^2/2 + p'/\rho)\mathbf{u}''}$ —“диффузионный” поток турбулентной энергии; $\mathbf{R}(\mathbf{x},t) \equiv -\overline{\rho \mathbf{u}'' \mathbf{u}''}$ и $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \equiv \tfrac{1}{2}(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla^T \langle \mathbf{u} \rangle)$ — соответственно тензор рейнольдсовых напряжений и тензор скоростей деформации для осредненного континуума, а $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(\mathbf{x},t)$ и $\overset{\circ}{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$ – их части с нулевым следом, определяемые соотношениями: $\overset{\circ}{\mathbf{E}} \equiv \mathbf{E} - \tfrac{1}{3}(\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle)\mathbf{I}$, $\overset{\circ}{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R} + \tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle e \rangle \mathbf{I}$; $\mathbf{I}$ – единичный тензор; символы $\mathbf{A}:\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ (∇A) означают соответственно внутреннее произведение двух тензоров и внешнее произведение двух векторов (диада); символ $\nabla \cdot \mathbf{A}$ означает обобщенную дивергенцию, поскольку A не всегда является вектором; индекс «T» означает транспонирование.

Исходя из (6), для изотропного[19)] осредненного течения можно записать следующие обобщенные определяющие (реологические) соотношения для турбулентных потоков и сопряженных им термодинамических сил:

$$\mathbf{j}^\Sigma(\mathbf{x},t) = -\lambda^{\text{turb}}\, \nabla(\ln \langle T \rangle),$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{x},t) = -\tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle e \rangle \mathbf{I} + \bar{\rho}\nu^{\text{turb}}\left(\tfrac{1}{2}(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla^T \langle \mathbf{u} \rangle) - \tfrac{1}{3}(\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle)\mathbf{I}\right),$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q},\mathbf{x},t) = \int_{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{L}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{q}},\mathbf{x},t) d\tilde{\mathbf{q}}, \tag{7}$$

[19)] Эти соотношения могут быть обобщены и на неизотропный случай (см., например, [6]).

отвечающие линейному режиму[20] осредненной стационарно-неравновесной турбулентности. Здесь $\lambda^{\text{turb}}(\mathbf{x})$ и $\nu^{\text{turb}}(\mathbf{x})$ – скалярные (положительные) коэффициенты турбулентного обмена, а $\mathbf{L}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},\mathbf{x})$ – матрица кинетических коэффициентов в интегральном феноменологическом соотношении для термодинамического потока $\mathbf{J}(\mathbf{q})$. Разумеется, эти коэффициенты, в отличие от коэффициентов молекулярного обмена, не являются материальными константами. Это связано с тем, что для осредненного турбулизованного континуума процессы переноса вещества, импульса и энергии определяются коллективными движениями молекул (вихревыми образованиями малых масштабов, типа вихревых колец или нитей), и поэтому сильно зависят от параметров интенсивности турбулентного поля, в частности, от ключевых параметров турбулентности, таких, как $<\varepsilon>$ и $<e>$. Так, например, в инерциальном интервале масштабов $\eta<\Lambda<L$, коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb}, может быть рассчитан по формуле типа $\nu^{\text{turb}} \sim <\varepsilon_r>^{1/3}\Lambda^{4/3} \sim <e>^2/<\varepsilon_r>$, отвечающей эмпирическому «закону четырех третей» Ричардсона-Обухова (этот закон следует также из анализа размерности). Таким образом, при моделировании стационарно-неравновесной турбулентности в тех приложениях, когда существенны энергетические процессы в системе, необходимо привлекать к рассмотрению уравнение переноса тепла (6) для осредненного движения; это уравнение должно быть дополнено определяющими соотношениями (7).

Вместе с тем, согласно принципу Пригожина необратимые процессы, связанные с образованием вихревых структур, должны протекать таким образом, чтобы положительными были, не только соответствующий глобальный рост суммарной энтропии системы $d_iS_\Sigma/dt \equiv \equiv (1/<T>)\int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q})d\mathbf{q}$, но и локальная величина $d_iS_\Sigma(\mathbf{q})/dt \equiv \equiv (1/<T>)\mathbf{J}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q}) \geq 0$, относящаяся к приращению сигма-функции Σ в каждом элементарном объеме $d\mathbf{q}$ пространства внутренней координаты. Поэтому при использовании данного принципа можно установить более простое локальное феноменологическое соотношение

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{q}) &= \mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{A}_{\text{turb}}(\mathbf{q}) = -\mathbf{L}(\mathbf{q})\cdot\left(\frac{RT_{\text{turb}}}{n(\mathbf{q},t)}\frac{\partial n(\mathbf{q},t)}{\partial\mathbf{q}} + \frac{\partial\Phi(\mathbf{q},T_{\text{turb}})}{\partial\mathbf{q}}\right) = \\ &= -\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q})\cdot\left(RT_{\text{turb}}\frac{\partial P_2(\mathbf{q},t)}{\partial\mathbf{q}} - P_2(\mathbf{q},t)\mathbf{f}(\mathbf{q},T_{\text{turb}})\right),\end{aligned} \tag{8}$$

отвечающее протеканию одного эквивалента процесса распада турбулентных вихрей. Здесь $\mathbf{L}(\mathbf{q})$ – положительно определенная локальная матрица коэффициентов переноса, удовлетворяющая соотношению взаимности Онзагера-Каземира, $\mathbf{L}^T$=$\mathbf{L}$; $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{L}(\mathbf{q})n_\Sigma/n(\mathbf{q})$ – так называемый тензор подвижности в $\mathbf{q}$-пространстве (не зависящий в первом приближении от n); $\mathbf{f}(\mathbf{q},T_{\text{turb}}) \equiv -\partial\Phi(\mathbf{q},T_{\text{turb}})/\partial\mathbf{q}$ – «сила трения» в пространстве конфигураций $\mathbf{q}$, порожденная потенциальным полем $\Phi(\mathbf{q},T_{\text{turb}})$. При написании второй строки формулы (8) была использована «термодинамическая» интерпретация плотности вероятности $P_2(\mathbf{q},t)$, как величины, пропорциональной числу вихревых частиц $n(\mathbf{q},t)$ в единице объема $\mathbf{q}$-пространства.

Сравнение (8) с (4) дает следующие выражения для тензора коэффициентов диффузии $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ и вектора дрейфа $\mathbf{K}(\mathbf{q},T_{\text{turb}})$ в кинетическом уравнении (1), описывающем временную

---

[20]) Это условие не настолько сильно, чтобы лишить рассматриваемый случай практического значения; оценивая состояние проблемы замыкания в целом, следует признать, что в настоящее время почти все полуэмпирические модели турбулентности в той или иной степени основаны на градиентных соотношениях.

эволюцию турбулентного хаоса

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}) + \hat{\mathbf{L}}^T(\mathbf{q}), \qquad \mathbf{K}(\mathbf{q}, T_{\text{turb}}) = \hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}, T_{\text{turb}}) = -\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, T_{\text{turb}})}{\partial \mathbf{q}}. \tag{9}$$

Из этих соотношений следует, в частности, обобщенная формула Нернста-Эйнштейна: $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = 2\mathbf{K}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q})$, которая может рассматриваться как пример флуктуационно-диссипационной теоремы для "квазилокального равновесия" турбулизованной жидкости.

Заметим, что в некоторых случаях можно исключить из выражения (8) для потока вероятности потенциальную энергию Φ, используя для этого известное равновесное распределение внутренних координат **q**, например $W_1^{ss}(\mathbf{q})$, соответствующее отдельному асимптотически устойчивому стационарному состоянию (см. ниже) турбулентного хаоса. Действительно, известно (см., например, [24]), что по мере перехода химически активного молекулярного континуума к устойчивому стационарному, хотя и достаточно близкому к равновесному, состоянию, характеризуемому минимальным производством энтропии, уменьшается величина и самой энтропии. Поэтому, в случае стационарного состояния подсистемы турбулентного хаоса, когда числовая плотность вихревых образований $n(\mathbf{q})$ может флуктуировать около некоторого устойчивого стационарного значения n^{ss} при определенных (для данного элементарного объема $d\mathbf{x}$) внутренней энергии и удельном объеме, энтропия турбулизации $S_{\text{turb}}|^{ss}$, по аналогии с химическими реагирующими системами, должна быть минимальной среди всех других состояний с теми же значениями U_{turb} и $1/\bar{\rho}$. Соответственно справедливо условие[21)]

$$\delta S_{\text{turb}} = -(\delta t / T_{\text{turb}}) \int_{\mathbf{q}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mu_{\text{turb}}^{ss}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = (\delta t / T_{\text{turb}}) \int_{\mathbf{q}} \mu_{\text{turb}}^{ss} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} =$$

$$= -(1/T_{\text{turb}}) \int_{\mathbf{q}} \mu_{\text{turb}}^{ss} \cdot \frac{\partial n(\mathbf{q})}{\partial t} \delta t d\mathbf{q} = -(1/T_{\text{turb}}) \int \mu_{\text{turb}}^{ss} \, \delta n(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 0,$$

где $\delta n \equiv n(\mathbf{q}) - n^{ss}$. Поскольку полное число вихревых молей n_Σ постоянно, имеем также $\int \delta n(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 0$. Из этих двух условий следует, что для устойчивого стационарного состояния турбулентного хаоса химический потенциал $\mu_{\text{turb}}^{ss}(\mathbf{q})$ по внутренним координатам не зависит от вектора состояния **q** ($\mu_{\text{turb}}^{ss} = \text{const}$). С использованием этого факта, получим

$$\mu_{\text{turb}}(\mathbf{q}, t) = R T_{\text{turb}} \ln \left(\frac{P_2(\mathbf{q}_0 | \mathbf{q}, t)}{W_1^{ss}(\mathbf{q})} \right) + \mu_{\text{turb}}^{ss}, \tag{10}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, 0) \equiv -\frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, T_{\text{turb}})}{\partial \mathbf{q}} = R T_{\text{turb}} \frac{\partial \ln W_1^{ss}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \qquad W_1^{ss}(\mathbf{q}) = \text{const} \cdot \exp\left\{ -\frac{\Phi(\mathbf{q}, T_{\text{turb}})}{R T_{\text{turb}}} \right\}, \tag{11}$$

где функция $W_1^{ss}(\mathbf{q})$ определяет максимальную вероятность устойчивого стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$, когда флуктуирующие внутренние координаты **q** остаются неизменными, а функ-

---

[21)] Здесь и далее для простоты предполагается, что флуктуации потенциала и других термодинамических параметров пространственно локальны, т.е. зависят только от флуктуаций $\delta\mathbf{q}$ в той же самой точке **q**-пространства. Вместе с тем, в пространственно распределенной системе турбулентного хаоса набор всех термодинамических параметров следует трактовать, вообще говоря, как векторнозначное поле плотностей экстенсивных параметров с пространственной вариацией. Необходимая модификация проста: суммы надлежит интерпретировать, как и интегралы, а частные производные – как функциональные производные.

ция $\Phi(\mathbf{q},T_{\text{turb}})$ играет роль термодинамического потенциала для стационарного состояния. Напомним, что в равновесной термодинамике не делается различия между двумя концепциями равновесия – равновесным состоянием, отвечающим максимальной энтропии, и равновесным распределением по возможным состояниям, которые физически почти эквиваленты [25]. Аналогичная ситуация справедлива и для стационарных состояний в термодинамике неравновесных процессов. Это связано с тем, что асимптотические плотности вероятности (см. формулу (18)) сосредоточены в чрезвычайно узкой области по сравнению с характерным размером среднего и в термодинамическом пределе эти гауссовские величины переходят в дельта-функции, сосредоточенные на $\mathbf{q}^{ss}$. Формулы (9) и (11) позволяют записать уравнение Фоккера-Планка (1) в другом эквивалентном виде

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)}{\partial t}=\frac{1}{2}RT_{\text{turb}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\cdot\left[\mathbf{Q}(\mathbf{q}):P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\ln\left(\frac{P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)}{W_1^{ss}(\mathbf{q})}\right)\right], \qquad (1^*)$$

удобном при исследовании системы в локальной окрестности единственного асимптотически устойчивого стационарного состояния.

Поясним теперь почему иногда удобно выбрать в качестве внутренних координат логарифмы положительных стохастических характеристик турбулентности, типа скорости диссипации энергии. Пусть $\varepsilon^*(\mathbf{x},t)$ – некоторая положительная локальная характеристика турбулентного поля, определяемая турбулентными пульсациями (например, скорость диссипации турбулентной энергии $\varepsilon(\mathbf{x},t)$, или скорость вырождения дисперсии температуры $\varepsilon_T(\mathbf{x},t)$ и т.п.). Тогда в случае полностью развитой турбулентности, согласно уточненным гипотезам подобия Колмогорова [18], диссипация $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ (или родственные ей величины) асимптотически удовлетворяет логарифмически нормальному распределению вероятностей, т.е. случайная переменная $\ln\varepsilon^*$ распределена по гауссовскому закону

$$W_1(\ln\varepsilon^*)=(\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\ln\varepsilon^*})^{-1}\exp[-(\ln\varepsilon^*-m^*)^2/2\sigma^2_{\ln\varepsilon^*}], \qquad (12)$$

и кроме этого, в теории предполагается зависимость

$$\sigma^2_{\ln\varepsilon^*}=\mu^*\ln\frac{L}{\eta}+B(\mathbf{x},t), \qquad m^*\equiv\overline{\ln\varepsilon^*}=-\sigma^2_{\ln\varepsilon^*}/2+\overline{\ln\varepsilon^*}. \qquad (13)$$

Здесь $\sigma^2_{\ln\varepsilon^*}$ и m^* суть дисперсия и среднее (стационарное) значение случайной переменной $\ln\varepsilon^*$; $B(\mathbf{x},t)$ — слагаемое, зависящее от характеристик крупномасштабного движения; μ^*— универсальная постоянная, принимающая, однако, различные значения для разных переменных ε^*; $L/\eta\approx\mathrm{Re}^{3/4}$. Распределение (12) уточненной теории K61 может быть оправдано тем обстоятельством, что модель случайного каскада подобна процессу дробления пылевых частиц, которому, как известно, асимптотически отвечает логарифмически нормальное распределение по размерам. Помимо этого, имеются многочисленные экспериментальные подтверждения логнормального распределения вероятностей диссипации энергии и связанных с ней положительных мелкомасштабных характеристик турбулентности в широком интервале умеренных значений аргумента[22)]. Основательный обзор соответствующих работ приведен, например, в книге [21], к которому и отсылаем читателя. Однако во всех случаях было обнаружено, что на «хвостах», т.е. при очень малых или очень больших значениях аргумента, эмпирическое распределение вероятностей все же отклоняется от логарифмически нормального. С этим фактом

---

22) В ряде публикаций справедливость логнормального распределения для подобных величин подвергнута сомнению, поскольку она предполагает, в частности, появление сверхзвуковых скоростей при очень больших числах Рейнольдса (см., например, [19]).

связано, в частности, то обстоятельство, что высшие моменты ε^* уже не могут быть аккуратно вычислены с помощью распределения (12).

Второй аргумент в пользу использования переменных $q^* \equiv \ln\varepsilon^*$ состоит в том, что величина $\ln\varepsilon^*$ флуктуирует гораздо слабее, чем ε^*, и потому ее среднее значение имеет больший физический смысл: значительные флуктуации случайной переменной ε^*, возникающие, например, в критической точке, искажают статистику $\ln\varepsilon^*$ гораздо меньше, чем статистику ε^*. Кроме того, в случае больших флуктуаций ε^* экспонента от среднего значения $\ln\varepsilon^*$ дает наиболее вероятное значение самой величины ε^*.

При подстановке многомерного гауссовского распределения $W_1^{ss}(\mathbf{q}^*)$ для подобных мелкомасштабных характеристик $\mathbf{q}^* = \{\ln\varepsilon_1^*, \ln\varepsilon_2^*, ...\}$ в (11), получим:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}^*, T_{\text{turb}}) = RT_{\text{turb}} \frac{\partial \ln W_1^{ss}(\mathbf{q}^*)}{\partial \mathbf{q}^*} = -RT_{\text{turb}}(\sigma^*)^{-1} \cdot (\mathbf{q}^* - \mathbf{q}^{*ss}), \tag{14}$$

где $\sigma^* \cong RT_{\text{turb}}(\mathbf{x}) + \frac{3}{4}\mu^* \ln\text{Re}$. Таким образом, «сила трения» в пространстве конфигураций зависит, например, от глобального числа Рейнольдса Re, управляющего режимом турбулентного движения в целом, что и определяет, в конечном счете, возможность перестройки структуры ассоциированного с турбулентным хаосом ансамбля, позволяя выявить те критические значения Re_{cr}, при которых происходит, например, его скачкообразный переход из состояния $\mathbf{q}^{*ss}$ к новому моностабильному стационарному состоянию.

2. Стохастический подход к изучению эволюции турбулентного хаоса. Гауссовский процесс

2.1. Фундаментальное решение уравнения Фоккера-Планка. Известно, что получить аналитическое решение уравнения (1) в явном виде удается лишь в немногих редких случаях, в частности, если дрейфовая матрица $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q})$ линейна по переменным $\mathbf{q}$: $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{q}$, а матрица коэффициентов диффузии $\mathbf{Q} = 2\hat{\mathbf{L}}$ не зависит от $\mathbf{q}$. Именно этот случай, представляющий наибольший интерес для термодинамических ансамблей (см., например, [26]), будет рассмотрен в данной статье. При этом стохастический процесс $\mathbf{q}(t)$ будет заведомо ограничен, если дополнительно принять (что и предполагается далее), что квадратичная матрица n-го порядка (по числу внутренних координат хаоса) $\mathbf{H}$ является сильно связанной. Сильная связанность означает, что матрица $\mathbf{H}$ имеет одно нулевое собственное значение, а действительные части всех остальных собственных значений $\lambda_p(\mathbf{H})$ ($p=1,...,n-1$) отрицательны, $\text{Re}\lambda_p(\mathbf{H})<0$. С учетом этих предположений фундаментальное решение (упрощенного соответствующим образом) кинетического уравнения (1),

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)}{\partial t} = -\mathbf{H}^T : \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{q}\, P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)\right) + RT_{\text{turb}} \frac{\mathbf{Q}}{2} : \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}} P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t), \tag{15}$$

удовлетворяющее начальному условию $P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},0) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$, будет представлять собой гауссовское распределение (в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой)

$$P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) = \left((2\pi)^n \det\boldsymbol{\sigma}(t)\right)^{-1/2} \exp\left[-\boldsymbol{\sigma}^{-1}(t) : \left(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0,t)\right)\left(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0,t)\right)/2\right], \tag{16}$$

в котором условное среднее $\overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0,t) \equiv \int \mathbf{q}(t) P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t)d\mathbf{q}$ для стохастического процесса $\mathbf{q}(t)$, если $\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0$, может быть записано в виде $\overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0,t) = \exp(\mathbf{H}t) \cdot \mathbf{q}_0$ (здесь под экспоненциалом $\exp(\mathbf{H}t)$ квадратной матрицы $\mathbf{H}$ понимается абсолютно сходящийся матричный ряд $\exp(\mathbf{H}t) \equiv$

$\equiv \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(\mathbf{H}t)^p$), а матричная дисперсия $\sigma(t) \equiv \overline{\delta\mathbf{q}(t)\delta\mathbf{q}^T(t)}^0 = RT_{\text{turb}}\int_0^t \exp(\mathbf{H}s)\cdot\mathbf{Q}\cdot\exp(\mathbf{H}^T s)ds$ условной флуктуации $\delta\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(t) - \overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial\sigma(t)/\partial t = \mathbf{H}\cdot\sigma(t) + \sigma(t)\cdot\mathbf{H}^T + RT_{\text{turb}}\mathbf{Q} \tag{17}$$

с начальным условием $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ [25].

Забегая несколько вперед, покажем, что асимптотически устойчивому стационарному состоянию $\mathbf{q}^{ss}$ (состоянию-аттрактору, для которого $\lim_{t\to\infty}\overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0, t) = \mathbf{q}^{ss}$), в случае, если представленные физическим ансамблем начальные значения вектора $\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0$ сосредоточены в области его притяжения[23)], отвечает стационарный гауссовский марковский процесс. Действительно, если воспользоваться третьим соотношением (2), устанавливающим асимптотическое равенство P_2 и W_1, то выражение (16) при $t\to\infty$ переходит в гауссовское распределение для одновременной функции распределения

$$\lim_{t\to\infty} P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q}, t) = W_1(\mathbf{q}) = \left((2\pi)^n \det\sigma(\mathbf{q}^{ss})\right)^{-1/2}\exp\left[-\sigma^{-1}(\mathbf{q}^{ss}) : (\mathbf{q}-\mathbf{q}^{ss})(\mathbf{q}-\mathbf{q}^{ss})/2\right], \tag{18}$$

характеризующей одновременные средние в стационарном ансамбле, а стационарная дисперсионная матрица $\sigma(\mathbf{q}^{ss}) \equiv \overline{(\mathbf{q}-\mathbf{q}^{ss})(\mathbf{q}-\mathbf{q}^{ss})^T}^0$, в силу того, что существует предел $\lim_{t\to\infty}\sigma(t) = \sigma$, а значит и предел $\lim_{t\to\infty} d\sigma/dt = 0$, удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}^{ss})\cdot\sigma(\mathbf{q}^{ss}) + \sigma(\mathbf{q}^{ss})\cdot\mathbf{H}^T(\mathbf{q}^{ss}) = -RT_{\text{turb}}\mathbf{Q}\,, \tag{19}$$

выражающему обобщенную флуктуационно-диссипационную теорему для стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$. Напомним, что по предположению $\operatorname{Re}\lambda_p(\mathbf{H}) < 0$.

При известных $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{H}$ уравнение (19) можно рассматривать как линейное, решением которого служит искомая стационарная дисперсия $\sigma(\mathbf{q}^{ss})$. Так как матрица σ^{ss} симметрична, можно найти $n(n+1)/2$ независимых элементов $\sigma_{\text{ij}}^{\text{ss}}$ $(1 \le i \le j \le n)$. Например, в случае двух переменных независимыми элементами матрицы $\boldsymbol{\sigma}$ являются σ_{11}^{ss}, σ_{12}^{ss} и σ_{22}^{ss}. Как следует из соотношения (19), они удовлетворяют линейным уравнениям

$$2\mathrm{H}_{11}\sigma_{11}^{ss} + 2\mathrm{H}_{12}\sigma_{12}^{ss} = -RT_{\text{turb}}\mathrm{Q}_{11}\,, \qquad 2\mathrm{H}_{21}\sigma_{12}^{ss} + 2\mathrm{H}_{22}\sigma_{22}^{ss} = -RT_{\text{turb}}\mathrm{Q}_{22}\,,$$

$$\mathrm{H}_{21}\sigma_{12}^{ss} + (\mathrm{H}_{11} + \mathrm{H}_{22})\sigma_{12}^{ss} + \mathrm{H}_{12}\sigma_{22}^{ss} = -RT_{\text{turb}}\mathrm{Q}_{12}\,,$$

имеющим единственное решение, когда матрица $\mathbf{H}$ имеет собственные значения с отрицательными действительными частями. Немаловажен и альтернативный вариант, когда из (19) определяется явный вид диффузионной матрицы $\mathbf{Q}$ (интенсивности случайных сил Ланжевена, см. формулу (23)) по известным дисперсионной $\sigma(\mathbf{q}^{ss})$ и релаксационной $\mathbf{H}(\mathbf{q}^{ss})$ матрицам. Этот вариант существен, когда явный вид матрицы $\boldsymbol{\sigma}$ для стационарного состояния известен, например, выражен через надлежащий термодинамический потенциал (см. ниже).

2.2. Стохастические уравнения в пространстве внутренних координат. Если умножить (15) на $\mathbf{q}^p$ и проинтегрировать по $\mathbf{q}$ от $-\infty$ до $+\infty$, то в предположении, что проинтегриро-

---

[23)] Подробнее об этом говорится в следующем разделе.

ванные по частям выражения с **H** и **Q** исчезают на границах, легко получить следующую бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{q}^p}^0}{\partial t} = p\mathbf{H}\cdot\overline{\mathbf{q}^p}^0 + \frac{p(p-1)}{2}RT_{\text{turb}}\mathbf{Q}\cdot\overline{\mathbf{q}^{p-2}}^0, \qquad p = 1,2,\ldots, \tag{20}$$

содержащую условные моменты разных порядков. Исключением является только первое детерминистское уравнение системы (получаемое при p=1), которое отщепляется и является замкнутым:

$$\partial\overline{\mathbf{q}}^0 / \partial t = \mathbf{H}\cdot\overline{\mathbf{q}}^0 . \tag{21}$$

Здесь $\mathbf{H}(\alpha)$ – постоянная матрица релаксации, обусловливающая возвращение вектора условных средних значений внутренних переменных $\overline{\mathbf{q}}^0$ к некоторому стационарному значению и зависящая в общем случае параметрически от внешних управляющих параметров $\alpha=$ $=\{\mathrm{Re},\mathrm{Pe},\ldots\}$. Решение $\overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0,\alpha,t)$ уравнения (21) зависит также от начального условия $\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0$.

Следуя формальной структуре теории Онзагера относительно статистических флуктуаций, будем считать, что условные турбулентные флуктуации $\delta\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)-\overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0,\alpha,t)$ стохастического векторного процесса $\mathbf{q}(t)$ удовлетворяют динамическому уравнению, аналогичному уравнению (21) для условного среднего, но дополненному членом, описывающим влияние слабого «естественного шума»" подсистемы турбулентного хаоса: $\partial\delta\mathbf{q}/\partial t = \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{q} + \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)$ (аналог регрессионной гипотезы Онзагера для молекулярных флуктуаций). Отсюда следует, что $\partial\mathbf{q}/\partial t$ и $\mathbf{H}\cdot\mathbf{q}$ также могут различаться только некоторым случайным членом $\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)$, условное среднее которого равно нулю:

$$\partial\mathbf{q}/\partial t = \mathbf{H}\cdot\mathbf{q} + \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t), \quad \overline{\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)}^0 = 0 . \tag{22}$$

Стохастическое дифференциальное уравнение (22) является уравнением Ланжевена, отвечающим уравнению Фоккера-Планка вида (15). Отметим, что условие $\overline{\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)}^0 = 0$ лишь частично задает свойства так называемой случайной силы (источника) Ланжевена $\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)$, действующей в пространстве конфигураций $\mathbf{q}$. Однако статистические свойства стохастического процесса $\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)$ будут полностью определены, если задан вид его корреляционного тензора $\overline{\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q}_1,t_1):\widetilde{\mathbf{F}}^T(\mathbf{q},t)}^0$. Обычно, при решении практических задач, дополнительно предполагают, что случайная величина $\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)$ есть стационарный δ*-коррелированный* во времени гауссовский процесс (многомерный белый шум)

$$\overline{\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t_1):\widetilde{\mathbf{F}}^T(\mathbf{q},t)}^0 = RT_{\text{turb}}\mathbf{Q}\delta(t-t_1), \tag{23}$$

причем матрица интенсивностей случайной силы $\mathbf{Q}$ совпадает с тензором коэффициентов диффузии $\mathbf{Q}=2\hat{\mathbf{L}}$ в кинетическом уравнении (15).

С учетом этого ключевого предположения, как известно, оба подхода – основанный на уравнении Фоккера-Планка (15) и основанный на системе обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений первого порядка (22) для случайной функции $\mathbf{q}(t)$ – оказываются полностью равнозначными. Заметим, что процесс Орштейна-Уленбека порождается именно линейным стохастическим дифференциальным уравнением с белым шумом в качестве случайного источника. В частности, решая уравнения (22) и (23) можно получить соотношения (16) для условной плотности вероятности и (17) для дисперсии условной флуктуации, а также соответствующие асимптотические (при $t \to \infty$) выражения (18) и (19)). Для наших целей это означает, что анализ эволюционных процессов в подсистеме турбулентного хаоса (к ним относятся, например, релаксационные процессы в окрестности устойчивых пространственно-временных структур) можно проводить и на основе такого рода стохастических уравнений или их следствий, с привлечением мощных методов качественной теории дифференциальных уравнений и линейного анализа устойчивости. Одновременно отметим, что доказательство эквивалентности уравнения Фоккера-Планка общего вида (1) и соответствующего ему нелинейного уравнения Ланжевена[24)]

$$\partial \mathbf{q} / \partial t = \mathbf{K}(\mathbf{q}, T_{\text{turb}}) + \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q}, t), \quad \overline{\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q}, t_1) : \tilde{\mathbf{F}}^T(\mathbf{q}, t)}^0 = R T_{\text{turb}} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \delta(t - t_1) \tag{24}$$

для случайного векторного процесса $\mathbf{q}(t)$ (где $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)$ – распределенная нормально в пространстве параметров $(\mathbf{q},t)$ случайная величина), требующее привлечения весьма тонких математических методов, осуществлено, например, в [27].

Проанализируем теперь, с использованием уравнения (24) (точнее его детерминистского варианта), кардинальную проблему развиваемого термодинамического подхода к моделированию стационарного каскадного процесса – возможность существования асимптотически устойчивых стационарно-неравновесных состояний $\mathbf{q}^{ss}$ в подсистеме турбулентного хаоса.

3. Неравновесные стационарные состояния и их устойчивость

3.1. Стационарно-неравновесное состояние турбулентного хаоса. Рассмотрим детерминированное поведение подсистемы, при котором внутренние переменные $\mathbf{q}(t)$ удовлетворяют детерминистскому дифференциальному уравнению (3)[25)], отвечающему предельному случаю $\omega \to 0$ отсутствия влияния на движение «внутреннего шума», связанного с «тепловой» структурой турбулентного хаоса. Это динамическое уравнение является автономным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка по времени, решения которого параметрически зависят от начальных условий $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$, а также от значений управляющих параметров $\alpha = \{\mathrm{Re}, \mathrm{Pe}, \ldots\}$, изменение которых приводит, вообще говоря, к изменению самого характера движения, а значит и хода эволюции подсистемы.

Проанализируем, прежде всего, стационарные решения $\mathbf{q}^{ss}$ уравнения (3) (решения, не зависящие от времени, $\partial \mathbf{q}^{ss} / \partial t = \mathbf{K}(\mathbf{q}^{ss}) = 0$). Напомним, что образом стационарного движения в $\mathbf{q}$-пространстве служит особая (предельная) точка определенного типа (центр, устойчивый фокус, седло, неустойчивый узел и т.п.; в случае конфигурационного пространства большой размерности n число типов особых точек возрастает). Устойчивость предельной точки означает, что траектории в ее окрестности, описывающие процесс релаксации, стремятся к ней при $t \to \infty$. Другими словами, предельная точка, имеющая в пространстве конфигураций определенную область притяжения, является аттрактором. Как уже упоминалось выше, при

[24)] В зависимости от того, в каком смысле понимаются стохастические интегральные соотношения (в смысле Ито, или Стратоновича), выписанные для стохастического дифференциального уравнения, зависит вид коэффициента дрейфа в уравнении (1), а также вид регулярного члена в соответствующем уравнении Ланжевена (см., например, [23]).

[25)] Аналогичное (совпадающее до деталей при замене $\mathbf{q}$ на $\overline{\mathbf{q}}^0$) рассмотрение можно провести на основе осредненного уравнения (21), справедливого и при учете «тепловых» флуктуаций. «Внутренний шум» подсистемы турбулентного хаоса вносит некоторое усложнение, которое, однако, возможно учесть уже после того, как исследовано поведение детерминированной системы (3).

некоторых значениях управляющих параметров аттрактор может быть не единственен. Возможны ситуации, когда в пространстве внутренних координат существует несколько аттракторов, каждый из которых имеет свою область притяжения. Это связано с тем, что система уравнений $\mathbf{K}(\mathbf{q}^{ss})=0$ может иметь более одного решения, даже если $\mathbf{K}$ – линейная вектор-функция: $\mathbf{K}(\mathbf{q},0)=\mathbf{H}\cdot\mathbf{q}$; в этом частном случае $\mathbf{H}\cdot\mathbf{q}^{ss}=0$, т.е. состояния $\mathbf{q}^{ss}$ являются собственными векторами (модами) матрицы $\mathbf{H}$ с нулевыми собственными значениями.

При изучении вероятностных аспектов возможных стационарных состояний, требуется иметь исходный физический ансамбль, соответствующий подсистеме турбулентного хаоса. Если исследуется вполне конкретное стационарное состояние $\mathbf{q}^{ss}$, то необходимо, чтобы представленные ансамблем начальные условия $\mathbf{q}_0$ были сосредоточены в области именно его притяжения. Возникает вопрос: является ли данное стационарное состояние $\mathbf{q}^{ss}$ действительно устойчивым по Ляпунову при начальном условии $\mathbf{q}_0$ (или орбитально устойчивым по Пуанкаре), подобно термодинамически равновесным состояниям в классической термодинамике? В противном случае траектории $\mathbf{q}(t)$, которые начинаются вблизи $\mathbf{q}^{ss}$, не выйдут на нужное стационарное состояние. А это с высокой вероятностью означает, что неустойчивые стационарные состояния, не имеющие области притяжения, не могут быть описаны стационарным статистическим ансамблем, поскольку его невозможно даже организовать подобающим образом. Тем не менее, такую возможность, несомненно, обеспечивает так называемая асимптотическая устойчивость, являющаяся частным случаем устойчивости по Ляпунову, при которой существует некоторая окрестность стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$, такая, что все выходящие из нее траектории остаются близкими к этому состоянию-аттрактору, и со временем асимптотически стремятся к нему, т.е. когда состояние $\mathbf{q}^{ss}$ устойчиво по Ляпунову и, кроме этого, всегда можно найти ε>0, такое, что при $\left|\mathbf{q}^{ss}-\mathbf{q}_0\right|<\varepsilon$,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{q}(\mathbf{q}_0,t)=\mathbf{q}^{ss}\quad\text{(или}\quad\lim_{t\to\infty}\overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0,t)=\mathbf{q}^{ss}\text{)}.\tag{25}$$

Асимптотическая устойчивость[26)] характерна для любых систем с диссипацией, в частности, она присуща и подсистеме турбулентного хаоса, обменивающейся с подсистемой осредненного движения энергией.

В случае статистических флуктуаций, связанных с атомарной структурой среды, из второго начала термодинамики следует, что все состояния термодинамического равновесия, не являющиеся критическими точками (см. ниже), асимптотически устойчивы. Далее будет показано, что аналогичная ситуация возможна для стационарно-неравновесных состояний флуктуирующего континуума. Но прежде обсудим некоторые критерии, гарантирующие асимптотическую устойчивость отдельных стационарных состояний хаоса. Один из них основан на анализе устойчивости решения уравнения (3) по первому (линейному) приближению, другой – на существовании «функции Ляпунова»

$$\mathcal{V}(\delta\mathbf{q})\equiv\delta\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{q}\geq 0\tag{26}$$

– вещественнозначной положительно определенной квадратичной форме [27)], заданной на пространстве состояний $\mathbf{q}$ и удовлетворяющей условию $\partial\mathcal{V}(\delta\mathbf{q})/\partial t\leq 0$; при этом временная

[26)] Здесь имеется в виду не только асимптотическая устойчивость по Ляпунову, но и асимптотическая орбитальная устойчивость.

[27)] Для статистической термодинамики неравновесных процессов особый интерес представляет случай, когда функция Ляпунова – квадратичная форма.

производная берется вдоль траектории, определяемой уравнением (27). В соотношении (26) равенство достигается только при $\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}^{ss}$; $\delta\mathbf{q}=(\mathbf{q}(t)-\mathbf{q}^{ss})$ – отклонение вектора состояния $\mathbf{q}(t)$ от стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$, $\mathbf{V}$ – некоторая действительная, симметричная и положительно определенная матрица.

Рассмотрим сначала случай, когда подсистема турбулентного хаоса имеет единственное стационарное состояние $\mathbf{q}^{ss}$ ($\partial\mathbf{q}^{SS}/\partial t=\mathbf{K}(\mathbf{q}^{ss})=0$), отвечающее текущему значению числа Рейнольдса $\mathbf{Re}$. Проведем анализ по первому приближению на асимптотическую устойчивость этого изолированного стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$, который, как известно, заключается в проверке на асимптотическую устойчивость линейной системы

$$\partial\delta\mathbf{q}/\partial t=\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{q}\,, \tag{27}$$

полученной путем отбрасывания нелинейных членов разложения в ряд Тейлора правой части уравнения (3): $\partial(\mathbf{q}^{ss}+\delta\mathbf{q})/\partial t=\mathbf{K}(\mathbf{q}^{ss}+\delta\mathbf{q})=\mathbf{K}(\mathbf{q}^{ss})+\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{q}\big|^{ss}\cdot\delta\mathbf{q}+\mathcal{O}(\delta\mathbf{q})$. Здесь $\mathbf{H}(\mathbf{q}^{ss})\equiv\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{q}\big|^{ss}$ – матрица Якоби, $\mathbf{K}\equiv-\text{£}\cdot\left.\dfrac{\partial\Phi(\mathbf{q},\mathrm{Re})}{\partial\mathbf{q}}\right|^{ss}$. Используя теперь формальное решение $\delta\mathbf{q}(t)=\exp(\mathbf{H}t)\delta\mathbf{q}(0)$ уравнения (27), выясним, в каких случаях имеет место асимптотическая устойчивость его решений. Запишем для этого нормальную форму экспоненциала матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{q}^{ss})$ в виде

$$\exp(\mathbf{H}t)=S^{-1}diag\left[\exp(t\mathbf{J}_1(\lambda_1)),...,\exp(t\mathbf{J}_m(\lambda_m))\right]S\,, \tag{28}$$

где

$$\exp(t\mathbf{J}_p(\lambda_p))=\exp(\lambda_p t)\sum_{k=0}^{m_p-1}\frac{t^k}{k!}\mathbf{I}_k^{(p)},\quad (p=1,...,m).$$

Здесь S – некоторая неособенная матрица, приводящая матрицу $\mathbf{H}$ к жордановой форме, ($\det S\neq0$); $\lambda_1,...,\lambda_m$ – это m ($m\leq n$) собственных значений матрицы $\mathbf{H}$, отвечающих различным клеткам $\mathbf{J}_p(\lambda_p)$ ($\equiv\lambda_p\mathbf{I}_p+\mathbf{I}_1^{(p)}$) ее канонической формы Жордана, а m_p – соответствующие им порядки этих клеток ($\sum_{p=1}^{m}m_p=n$); $\mathbf{I}p$ – единичная матрица порядка p и $\mathbf{I}_1^{(p)}$– ее первый единичный косой ряд; $\mathbf{I}_k^{(p)}=[\mathbf{I}_1^{(p)}]^k$ (k=1,...,m_p–1) – соответствующие единичные косые ряды, $\mathbf{I}_0^{(p)}=\mathbf{I}_p$.

Из общего решения (28) линейного уравнения (27) непосредственно вытекают известные теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, которые, применительно к рассматриваемому здесь движению в пространстве конфигураций, могут быть переформулированы следующим образом:

1. Стационарное состояние турбулентного хаоса асимптотически устойчиво, тогда и только тогда, когда все характеристические корни $\lambda_p(\mathbf{H})$ ($p=1,...,n$) релаксационной матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{q}^{ss})$ (при текущем числе Рейнольдса) имеют отрицательные действительные части, т.е. все λ_p располагаются в левой полуплоскости.

2. Если среди корней векового уравнения $\det(\mathbf{H}(\mathbf{q}^{ss})-\lambda\mathbf{I}_n)=0$ имеется хотя бы один, вещественная часть которого положительна, то стационарное состояние $\mathbf{q}^{ss}$ неустойчиво.

3. Если некоторые корни векового уравнения имеют нулевые действительные части, а остальные корни имеют отрицательные действительные части, то стационарное состояние турбулентного хаоса (называемое в этом случае критическим состоянием)

а) будет устойчивым (по Ляпунову), если корням с нулевой вещественной частью отвечают простые элементарные делители (т.е. соответствующие $m_p=1$);

б) будет неустойчивым, если хотя бы один корень с нулевой вещественной частью является кратным корнем соответствующего элементарного делителя ($m_p>1$).

Важно иметь ввиду, что анализ устойчивости линеаризованной задачи (27) в окрестности стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$ позволяет также получить информацию относительно устойчивости исходного нелинейного детерминистского уравнения (3): из асимптотической устойчивости, устойчивости по Ляпунову или неустойчивости решений линейной системы (27) вытекает соответственно асимптотическая устойчивость, устойчивость по Ляпунову либо неустойчивость решений исходной системы (3)[28)].

3.2. Функция Ляпунова. Наряду с этим, из теории устойчивости движения известно, что достаточным условием асимптотической устойчивости стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$, является существование функции Ляпунова (26) для дифференциального уравнения возмущенного движения (27). С другой стороны, можно показать, что из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости вытекает существование положительно определенной квадратичной формы с отрицательно определенной производной по времени. Из этих двух результатов следует, что существование функции Ляпунова (26) является необходимым и достаточным условием устойчивости стационарного решения уравнения (3) (см., например, [28]).

Приведем здесь возможную версию доказательства существования функции Ляпунова для асимптотически устойчивого стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$ турбулентного хаоса, которому соответствует стационарный гауссовский марковский процесс (18) (детали этого доказательства будут использованы в следующем подразделе). Но сначала найдем необходимое условие, при котором, положительно определенная квадратичная форма $\mathcal{V}(\Delta\mathbf{q}) \equiv \delta\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{q} \geq 0$ имеет отрицательно определенную производную по времени. Пусть $\mathcal{V}(\delta\mathbf{q})$ – функция Ляпунова. Тогда для временной производной вдоль траектории, определяемой уравнением (27), имеем

$$d\mathcal{V}(\delta\mathbf{q})/dt \equiv (d\delta\mathbf{q}^T/dt)\cdot\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{V}\cdot(d\delta\mathbf{q}/dt) =$$

$$= \delta\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{H}^T\cdot\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{q} = \delta\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{q} \leq 0,$$

где $\mathbf{H}$ – устойчивая матрица (напомним, что $\mathrm{Re}\lambda_p(\mathbf{H}) < 0$), а $\mathbf{B} \equiv \mathbf{H}^T\cdot\mathbf{V} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{H}$ – отрицательно определенная матрица. Так как $\mathbf{V}$ – симметричная положительно определенная матрица, у нее есть обратная матрица $\mathbf{V}^{-1}$, которая также является симметричной и положительно определенной, поэтому $\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}^{-1T}$. Следовательно, выполнив над $\mathbf{B}$ ортогональное преобразование $\mathbf{V}^{-1}$, мы получим также симметричную отрицательно определенную матрицу

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}^{-1T} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{H}^T, \tag{29}$$

поскольку этим свойством обладает матрица $\mathbf{B}$. Отметим, что искомое соотношение (29), по форме тождественно уравнению (19), выражающему обобщенную флуктуационно-диссипационную теорему. Последнее является, очевидно, проявлением глубокой связи, имеющейся между динамическими свойствами флуктуаций в стационарных состояниях и их устойчивостью.

[28)] Напомним, что анализ устойчивости по первому приближению системы, находящейся в окрестности критического состояния, дает весьма ограниченную информацию относительно характера решений нелинейного уравнения (3) – необходимо рассмотреть влияние нелинейных членов.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству существования функции Ляпунова – положительно определенной квадратичной формы с отрицательно определенной производной по времени, для асимптотически устойчивого стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$ (18). Это доказательство основано на том, что, поскольку матрица $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ является устойчивой, то уравнение (19) $\mathbf{H}(\mathbf{q})\cdot\sigma(\mathbf{q})+\sigma(\mathbf{q})\cdot\mathbf{H}^T(\mathbf{q})=-RT_{\mathrm{turb}}\mathbf{Q}$ для нахождения дисперсии (в котором $\mathbf{Q}$ – положительно определенная матрица, соответствующая постоянному тензору коэффициентов диффузии) имеет единственное положительно определенное решение $\sigma(\mathbf{q})=RT_{\mathrm{turb}}\int_0^\infty \exp(\mathbf{H}s)\cdot\mathbf{Q}\cdot\exp(\mathbf{H}^T s)ds$. С другой стороны, это уравнение эквивалентно соотношению (29) (при $\mathbf{G}\equiv -RT_{\mathrm{turb}}\mathbf{Q}$, $\mathbf{V}^{-1}\equiv\sigma$), в силу чего матрица σ^{-1} (обратная дисперсионной матрице σ), порождает функцию $\mathcal{V}(\delta\mathbf{q})\equiv\delta\mathbf{q}^T\cdot\boldsymbol{\sigma}^{-1}\cdot\delta\mathbf{q}$, имеющую отрицательно определенную производную по времени. Таким образом, для всех асимптотически устойчивых стационарных состояний, характеризующихся стационарной гауссовской одновременной плотностью вероятности вида (18), существует функция Ляпунова.

В заключение этого раздела отметим следующее: асимптотическую устойчивость стационарных состояний системы (24) можно определить, исследуя собственные значения матрицы релаксационного уравнения (27) для флуктуаций. Существует утилитарный критерий (Рауса-Гурвица), дающий необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости стационарного решения системы (24) (см., например, [28]). Если записать вековое уравнение для постоянной матрицы Якоби $\mathbf{H}(\mathbf{q}^{ss})=\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{q}\big|^{ss}=[h_{jk}]$ в раскрытом виде $\lambda^n-H_1\lambda^{n-1}+H_2\lambda^{n-2}+\ldots\ +(-1)^nH_n=0$, где $H_1=Sp\mathbf{H}$, $H_2=\sum_{\alpha<\beta}\begin{vmatrix}h_{\alpha\alpha} & h_{\alpha\beta}\\ h_{\beta\alpha} & h_{\beta\beta}\end{vmatrix}$,..., $H_n=\det\mathbf{H}$ – действительные коэффициенты, то выполнение неравенств

$$\Delta_1=-H_1>0\,,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-H_1 & 1\\ -H_3 & H_2\end{vmatrix}=-H_1H_2+H_3>0\,,\ \ldots,\quad \Delta_n=(-1)^nH_n\Delta_{n-1}>0\,,$$

является необходимым и достаточным условиями, при которых алгебраическое уравнение имеет корни лишь с отрицательными вещественными частями. Этот критерий удобно использовать для исследования потери устойчивости стационарными состояниями подсистемы турбулентного хаоса (в зависимости от текущего значения числа Рейнольдса) при $n\le 3$; однако для больших n целесообразно все же перейти к численным методам решения векового уравнения, поскольку раскрытие определителя $\det(\mathbf{H}-\lambda\mathbf{I}_n)$ в этом случае представляет трудоемкую задачу.

4. Термодинамическая устойчивость и критические стационарные состояния

4.1. Термодинамическая устойчивость стационарных состояний. Выше была установлена связь, имеющаяся между динамическими свойствами флуктуаций в стационарных состояниях и их устойчивостью, и было показано, что матрица $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ (обратная одновременной дисперсионной матрице) в случае асимптотически устойчивого стационарно-неравновесного состояния турбулентного хаоса порождает функцию Ляпунова. С другой стороны, наличие функции Ляпунова является достаточным условием асимптотической устойчивости стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$. Как известно, в случае молекулярных флуктуаций, когда стационарное состояние является статистически равновесным, существует еще одна немаловажная взаимозависимость между устойчивостью и флуктуациями параметров системы, которая устанавливается вторым началом термодинамики и приводит к квадратичной функции Ляпунова $\mathcal{V}^e(\delta\mathbf{q})\equiv\ \delta\mathbf{q}^T\cdot(\boldsymbol{\sigma}^e)^{-1}\cdot\delta\mathbf{q}$ для релаксационных процессов вблизи равновесия. В частности, для замкнутых систем с молекулярными флуктуациями второй дифференциал энтропии есть отрицательно определенная функция Ляпунова, а обратная дисперсионная матрица $(\sigma^e)^{-1}$ в соотношении (18) для стационарной гауссовской одновременной плотностью вероятности $W_1^e(\mathbf{q})$, связана с матрицей вторых производных энтропии формулой Эйнштейна $(\sigma^e)^{-1} = -(1/k_B)\partial^2 S/\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}\big|^e$ (см., например, [25]). Покажем, что аналогичная связь с термодинамикой существует и для физического ансамбля, отвечающего стационарно-неравновесному состоянию турбулентного хаоса.

С этой целью сделаем следующее обобщающее предположение относительно вида одновременной плотности вероятности $W_1(\mathbf{q},T_{\text{turb}})$ для стационарно-неравновесных состояний ансамбля: по предположению будем считать, что формула (см. (11))

$$W_1(\mathbf{q},\omega) \sim \exp\left\{-\frac{\Phi_0(\mathbf{q})}{\omega}+\ldots\right\}, \quad \Phi(\mathbf{q}) = \Phi_0(\mathbf{q}) + \omega\Phi_1(\mathbf{q}) + \ldots \tag{30}$$

задает вероятность $W_1(\mathbf{q},T_{\text{turb}})$, как функцию неравновесного термодинамического глобального потенциала $\Phi(\mathbf{q})$ для стационарно-неравновесных состояний системы [29]. В показателе экспоненты (30) указана лишь главная часть функции $W_1(\mathbf{q},T_{\text{turb}})$, отвечающая предельному случаю слабого шума $\omega\to 0$, т.е. когда переменные $\mathbf{q}$ удовлетворяют детерминистскому варианту стохастического уравнения (22) – уравнению (3). Таким образом, потенциал

$$\Phi_0(\mathbf{q}) = -\lim_{\omega\to 0}\omega\ln W_1(\mathbf{q},\omega)\,. \tag{31}$$

определяет асимптотическое выражение для стационарно-неравновесной функции распределения. По предположению будем считать, что функция $\Phi_0(\mathbf{q})$ однозначна, непрерывна и по крайней мере обладает кусочной дифференцируемостью первого порядка. Соотношение (30) является в некоторой степени обобщением постулата Больцмана-Планка (для равновесного распределения флуктуаций термодинамических параметров замкнутой системы, когда $\Phi=-S$) на случай стационарно-неравновесных состояний ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса.

Если подставить (30) в уравнение (1) и перейти к детерминистскому пределу $\omega\to 0$, то в результате получим уравнение

$$0 = \mathbf{K}(\mathbf{q},0)\cdot\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{q}):\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}, \tag{32}$$

которое связывает потенциал $\Phi_0(\mathbf{q})$ с $\mathbf{K}(\mathbf{q},0)$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$. Функция $\Phi_0(\mathbf{q})$ определяется как решение уравнения (32), если граничные условия соответствуют бесконечно большим значениям $\Phi_0(\mathbf{q})$ при $\mathbf{q}\to\infty$ (для устойчивой системы).

Отметим теперь три важнейших свойства глобального потенциала $\Phi_0(\mathbf{q})$:

1) Функция $\Phi_0(\mathbf{q})$ убывает со временем вдоль траектории, определяемой детерминистским уравнением (3), так как

$$\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial t} = \mathbf{K}(\mathbf{q},0)\cdot\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_\varkappa} = -\frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{q}):\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_\varkappa}\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_\varkappa} \le 0 \tag{33}$$

(напомним, что матрица $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ является положительно определенной); следовательно, $\Phi_0(\mathbf{q})$ представляет собой функцию Ляпунова для детерминистского уравнения (3).

2) Из свойства (33) следует, что $\Phi_0(\mathbf{q})$ имеет локальный минимум для любого устойчивого аттрактора уравнения (31) в пространстве конфигураций. На любом связном подмножест-

ве аттрактора потенциал $\Phi_0(\mathbf{q})$ постоянен. Неустойчивые стационарные решения уравнения (31) соответствуют максимумам или седловым точкам функции $\Phi_0(\mathbf{q})$.

3) Потенциал $\Phi_0(\mathbf{q})$, когда он найден, содержит богатейшую информацию относительно функции распределения вероятностей в стационарных состояниях и аттракторов детерминистских уравнений.

Рассмотрим здесь частный случай моностабильного стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$, когда формула (30) существенно упрощается: процесс релаксации подсистемы флуктуирующего хаоса оказывается гауссовским. Действительно, раскладывая вблизи этого состояния функцию $\Phi_0(\mathbf{q})$ в ряд Тейлора, будем иметь

$$\Phi_0(\mathbf{q}) = \Phi_0(\mathbf{q}|^{ss}) + \left.\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}\right|^{ss} \cdot \delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}}\right|^{ss} : \delta\mathbf{q}\delta\mathbf{q} + \ldots \cong$$

$$\cong \Phi_0(\mathbf{q}|^{ss}) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}}\right|^{ss} : \delta\mathbf{q}\delta\mathbf{q} \equiv \Phi_0(\mathbf{q}|^{ss}) + \frac{RT_{\text{turb}}}{2}(\sigma^*)^{-1} : \delta\mathbf{q}\delta\mathbf{q}\,, \tag{34}$$

где $(\sigma^*)^{-1}_{ij} = (\sigma^*)^{-1}_{ji} \equiv (RT_{\text{turb}})^{-1}\partial^2\Phi_0/\partial q_i \partial q_j\big|^{ss}$ – симметричная положительно определенная матрица. Одновременно, детерминистское уравнение (3) в окрестности $\mathbf{q}^{ss}$ можно переписать в виде $\partial\mathbf{q}/\partial t = \mathbf{K}(\mathbf{q}|^{ss}+\delta\mathbf{q}) = \mathbf{K}(\mathbf{q}|^{ss}) + \partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{q}|^{ss}\cdot\delta\mathbf{q} + \ldots \cong \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{q} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{q}$, где $\mathbf{H} \equiv \partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{q}|^{ss}$; тогда уравнение (32) приобретает следующую форму:

$$0 = (\mathbf{H}\cdot\mathbf{q})\cdot\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{q}) : \frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}\,. \tag{35}$$

Подставляя (34) в (35), получаем уже известное нам алгебраическое уравнение (19)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}^{ss})\cdot\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{q}^{ss}) + \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{q}^{ss})\cdot\mathbf{H}^T(\mathbf{q}^{ss}) = -RT_{\text{turb}}\mathbf{Q} \tag{19*}$$

для определения $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{q}^{ss})$. Отсюда, независимо от глобального условия (33), при использовании флуктуационно-диссипационной теоремы (19), можно сделать вывод, что термодинамический потенциал (34) для внутренних степеней свободы $\mathbf{q}$ является функцией Ляпунова для неравновесных стационарных состояний флуктуирующего хаоса. Поскольку линеаризация уравнения переноса проводилась вблизи стационарного состояния, то потенциал $\Phi_0(\mathbf{q})$ вида (34) можно назвать локальным потенциалом; пользоваться им можно только в локальной окрестности стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$. Из (19^*) следует, что $\boldsymbol{\sigma}^*$ будет положительно определенной матрицей, если действительные части всех собственных значений матрицы $\mathbf{H}$ отрицательны, т.е. если стационарное состояние, как и предполагалось, устойчиво.

С другой стороны, независимо от условия (19^*) имеем

$$\frac{\partial\Phi_0(\mathbf{q})}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\sigma^*)^{-1}\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{q})\cdot(\sigma^*)^{-1} : \delta\mathbf{q}\delta\mathbf{q} < 0\,, \tag{36}$$

т.е. в любом случае система движется в направлении убывания потенциала $\Phi_0(\mathbf{q})$. При этом она стремится к стационарному состоянию, если последнее устойчиво, и к бесконечности, если оно не устойчиво. Критические точки возникают в тех случаях, когда члены второго порядка обращаются в нуль при малых ненулевых значениях $\delta\mathbf{q}$. Вместе с тем, принцип минимума потенциала гарантирует, что в окрестности устойчивого стационарного состояния, которое не является критической точкой, матрица $(\sigma^*)^{-1} = (RT_{\text{turb}})^{-1}\partial^2\Phi_0/\partial\mathbf{q}\partial\mathbf{q}\big|^{ss}$ строго положительна. Таким образом, для устойчивого стационарного состояния $\mathbf{q}^{ss}$, не слишком близкого к критическим точкам, из постулата (30) имеем следующее гауссовское распределение вероятностей:

$$W_1^{ss}(\mathbf{q}) = \sqrt{1/(2\pi)^n \det\sigma^*} \exp\left\{-(\sigma^*)^{-1} : \delta\mathbf{q}\delta\mathbf{q}/2\right\}, \tag{37}$$

где значение нормировочного коэффициента следует из условия нормировки (2).

4.2. Множественные стационарные состояния. Проанализируем теперь некоторые статистические аспекты конечного числа асимптотически устойчивых стационарных состояний подсистемы турбулентного хаоса, области притяжения которых заполняют практически все пространство конфигураций. Исключая на время из рассмотрения состояния вблизи критических точек, будем считать, что динамические уравнения (24) для условных средних ансамбля имеют p аттракторов $\mathbf{q}_1^{ss}$, $\mathbf{q}_2^{ss}, \ldots, \mathbf{q}_p^{ss}$, а остальные стационарные состояния неустойчивы. Найдем сначала вид одновременной стационарной плотности вероятности $W_1^{ss}(\mathbf{q})$, связанной с каким-либо из этих аттракторов. Пусть $\mathbf{q}_0$ принадлежит области притяжения вполне определенного состояния $\mathbf{q}_j^{ss}$, тогда $\lim\limits_{t\to\infty}\overline{\mathbf{q}}^0(\mathbf{q}_0,t)=\mathbf{q}_j^{ss}$. Условные флуктуации $\delta\mathbf{q}=\overline{\mathbf{q}}^0(t)-\mathbf{q}^{ss}$, согласно регрессионной гипотезе Онзагера, определяются стохастическим дифференциальным уравнением

$$\partial\delta\mathbf{q}/\partial t = \mathbf{H}(\mathbf{q}_0,t)\cdot\delta\mathbf{q} + \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t),$$

$$\overline{\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t)}^0 = 0, \qquad \overline{\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{q},t_1)\widetilde{\mathbf{F}}^T(\mathbf{q},t)}^0 = RT_{\text{turb}}\mathbf{Q}(\mathbf{q})\delta(t-t_1), \tag{38}$$

в котором

$$\mathbf{H} = \partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{q}\big|^{ss}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = 2\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{q}). \tag{39}$$

Уравнения (38) описывают стационарный ансамбль локально в окрестности асимптотически устойчивого стационарного состояния. На основании указанной выше эквивалентности уравнения (38) уравнению Фоккера-Планка (15), можно заключить, что с состоянием $\mathbf{q}_j^{ss}$ связана гауссовская плотность вероятности следующего вида:

$$\lim_{t\to\infty} P_2(\mathbf{q}_0|\mathbf{q},t) = W_1^{(j)}(\mathbf{q}) = \left((2\pi)^n \det\sigma(\mathbf{q}_j^{ss})\right)^{-1/2}\exp\left[-\sigma^{-1}(\mathbf{q}_j^{ss}) : (\mathbf{q}-\mathbf{q}_j^{ss})(\mathbf{q}-\mathbf{q}_j^{ss})/2\right], \tag{40}$$

где стационарная дисперсионная матрица $\sigma(\mathbf{q}_j^{ss})$ удовлетворяет соотношению (19). Таким образом, с каждым из асимптотически устойчивых стационарных состояний $\mathbf{q}_j^{ss}$ связана одновременная стационарная плотность распределения вероятности $W_1^{(j)}(\mathbf{q})$, к которой асимптотически стремятся все условные плотности вероятности, находящиеся в области притяжения данного стационарного состояния. Поскольку функция $W_1^{(j)}(\mathbf{q})$ сконцентрирована в весьма узкой области вокруг аттрактора $\mathbf{q}_j^{ss}$, то каждому подобному состоянию отвечает некоторый единственный процесс Орштейна-Уленбека. Отсюда следует, что если распределение $W_1^{(j)}(\mathbf{q})$ описывает начальный ансамбль, то вероятность того, что решение $\mathbf{q}(t)$ существенно отличается от решения $\mathbf{q}_j^{ss}$, или лежит вне области его притяжения, пренебрежимо мала. Следовательно, $W_1^{(j)}(\mathbf{q})$ является и одновременной плотностью вероятности для всего ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса.

Это утверждение допускает следующее обобщение: временная эволюция ансамбля с произвольно приготовленным (т.е. отличным от своей стационарной формы) начальным распределением $W_1(\mathbf{q}_0,t_0)$ и сосредоточенным в начальный момент времени внутри области притяжения p аттракторов $\mathbf{q}_1^{ss}$, $\mathbf{q}_2^{ss}$,..., $\mathbf{q}_p^{ss}$, приводит к некоторой суперпозиции локальных стационарных ансамблей. Действительно, из соотношения (40) следует, что

$$W_1(\mathbf{q}) \equiv \lim_{t\to\infty} W_1(\mathbf{q},t) = \lim_{t\to\infty} \int W_1(\mathbf{q}_0,t_0) P_2(\mathbf{q}_0,t_0|\mathbf{q},t) d\mathbf{q}_0 = \sum_{j=1}^{p} f_j^0 W_1^{(j)}(\mathbf{q}), \tag{41}$$

где $f_j^0 \equiv \int_{D_j} W_1(\mathbf{q}_0,t_0) d\mathbf{q}_0$ – доля первоначального ансамбля, приходящаяся на область притяжения D_j аттрактора $\mathbf{q}_j^{ss}$. Таким образом, со временем одновременная плотность вероятности распадается на сумму гауссовских величин, сконцентрированных в устойчивых стационарных состояниях, с весами, равными доле начальной плотности вероятности, приходящейся на каждую область притяжения.

4.3. Критические состояния с нейтральной устойчивостью. Причина, по которой локальные стационарные подансамбли ведут себя автономным образом, состоит в том, что флуктуации в окрестности асимптотически устойчивого стационарного состояния $\mathbf{q}_j^{ss}$ относительно малы. Вместе с тем, обращение в нуль действительной части одного или нескольких собственных значений релаксационной матрицы $\mathbf{H}$[29)], когда действительные части остальных корней отрицательны, приводит к так называемому критическому стационарному состоянию $(\mathbf{q}_j^{ss})_{cr}$ с нейтральной устойчивостью (критическая точка) рассматриваемой системы. Подобное критическое состояние макроскопической подсистемы турбулентного хаоса может быть связано с ростом числа Рейнольдса. Согласно третьей из приведенных выше теорем об устойчивости, критическое состояние не является асимптотически устойчивым (хотя и может быть устойчивым по Ляпунову). В критической точке существует по крайней мере одна релаксационная мода, представляющая собой решение, являющееся собственным вектором матрицы $\mathbf{H}$, которая либо постоянна, либо осциллирует с частотой, равной мнимой части собственного значения этой моды. В другом возможном случае, когда мнимую ось пересекает (с нулевой скоростью) пара комплексно-сопряженных собственных значений и тем самым приобретает положительную действительную часть, то одной из двух типичных ситуаций в критической точке является нормальная бифуркации Андронова-Хопфа, при которой стационарное состояние в момент потери устойчивости переходит в устойчивую периодическую траекторию (с частотой периодических колебаний ω_1), к которой начинают притягиваться все соседние траектории. В результате появляется предельный цикл, сначала очень маленький, но постепенно увеличивающийся в размерах, по мере превышения управляющими параметрами бифуркационных значений (см., например, [30]). В другой возможной ситуации (известной как обратная бифуркация Андронова-Хопфа) возникает неустойчивая предельная точка. Таким образом, в окрестности критических точек флуктуирующего хаоса статистический закон изменения турбулентных флуктуаций (в $\mathbf{q}$-пространстве) не может обеспечить их малости и потому формула

---

29) Соответствующее вековое уравнение имеет n корней, среди которых могут быть как действительные, так и комплексные; последние появляются комплексно сопряженными парами, поскольку все коэффициенты векового уравнения – действительные.

(41) неприменима для подобных стационарных состояний. С ними, по всей вероятности, связана негауссовская функция распределения. Для выяснения того, как действительно выглядит плотность вероятности в области нестабильности, необходимо, в общем случае, численно решать уравнение Фоккера-Планка (1) или попытаться определить неравновесный термодинамический потенциал $\Phi_0(\mathbf{q})$, решая уравнение (32).

Флуктуации, происходящие вблизи точки бифуркации $(\mathbf{q}_j^{ss})_{cr}$ непредсказуемым образом влияют на «выбор» системой дальнейшего пути эволюции[30]. В принципе можно исследовать в рамках уравнения (24) потерю устойчивости и для периодических движений, подобно стационарным состояниям и найти соответствующие бифуркации. Строгие результаты такого анализа относятся в основном к случаю бифуркаций одних стационарных решений в другие стационарные или периодические решения (см., например, [31]). В одной из типичных ситуаций, аналогичной нормальной бифуркации Андронова-Хопфа, когда при некоторых бифуркационных значениях управляющих параметров предельный цикл перестает быть притягивающим, вместо одной возбуждаются две новые моды с частотами колебаний ω_1 и ω_2, рождается квазипериодический аттрактор – притягивающий двумерный гладкий тор T^2, на котором располагаются все траектории. Таким образом, можно прийти к последовательности нормальных бифуркаций Андронова-Хопфа, т.е. к движению на поверхности некоторого тора T^k возрастающей размерности k. Движение выглядит все более и более сложным и при бесконечном числе бифуркаций – не отличается от хаотического (детерминированный хаос).

Именно таким образом, согласно гипотезе Ландау (см., например, [14], [15, (Гл. 4)]), происходит возникновение и самой турбулентности, когда после каждой нормальной бифуркации Андронова-Хопфа набор основных частот колебаний скорости течения жидкости пополняется новой несоизмеримой частотой, решение переходит на новый тор (топологическая размерность которого совпадает с числом независимых частот), поток становится еще более нерегулярным, а при возбуждении множества мод ($\sim \mathrm{Re}^{9/4}$) – турбулентным [31]. Фактически этот сценарий предполагает, что турбулентность соответствует движению по бесконечномерному тору (квазипериодическому аттрактору). Следует однако отметить, что сценарий Ландау-Хопфа не приводит к возникновению режима истинно хаотических движений, т.е. движений, обладающих статистическими свойствами случайного процесса, например, чувствительной зависимостью временной эволюции системы от начальных условий. Кроме этого, для любых диссипативных динамических систем сценарий Ландау-Хопфа структурно неустойчив, т.е. нетипичен: как правило, цепочка нормальных бифуркаций обрывается уже после первых трех шагов – либо незамкнутая намотка на трехмерном торе замыкается, превращаясь в предельный цикл (эффект взаимной синхронизации мод), либо тор разрушается и в результате такого разрушения возникает так называемый странный аттрактор. На таком многообразии, которое уже не является гладким тором, а имеет сложную топологию, реализуется настоящий динамический хаос с континуумом частот, чувствительной зависимостью от начальных условий, перемешиванием и т.д. С геометрической точки зрения странный аттрактор представляет собой, как правило, фрактальное множество, характеризуемое нецелой размерностью Хаусдорфа-Безиковича [32].

5. Эффекты перемежаемости

Обратимся теперь еще к одной причине, по которой при феноменологическом построении модели развитой турбулентности важно исследовать поведение флуктуаций скорости

---

[30]) Критическая точка не обязательно должна быть точкой бифуркации.

[31]) Эта завышенная оценка следует из теории K41, не учитывающей наличие когерентных структур в инерционном интервале. Новейшие исследования показывают, что на малых масштабах в турбулентном течении присутствуют пучки тонких и весьма интенсивных вихревых нитей. Поэтому число степеней свободы может быть гораздо меньше, чем $\mathrm{Re}^{9/4}$.

диссипации турбулентной энергии и некоторых других положительных мелкомасштабных характеристик, – к проблеме перемежаемости. Режим временной перемежаемости, связанный с резкими флуктуациями большой амплитуды, свойственен любым динамическим диссипативным системам при переходе их от квазипериодического движения к хаосу (см., например, [30]).

5.1. Гидродинамическая перемежаемость. В основе гидродинамической перемежаемости лежит неустойчивость организованных пространственно-временных структур турбулентного поля (интенсивных флуктуаций скорости и температуры, локализованных в координатном пространстве (см. [12-13])) и связанный с этим случайный каскадный процесс порождения все меньших вихрей скорости и макроструктурных неоднородностей температуры.

В теории развитой турбулентности фундаментальную роль играет экспериментальный закон конечной диссипации энергии, утверждающий, что в пределе бесконечно большого числа Рейнольдса ($\nu \to 0$) средние значения скорости диссипации турбулентной энергии $\bar{\varepsilon}$ и скалярной диссипации $\bar{\varepsilon}_T$ стремятся к конечным и положительным пределам, $\lim\limits_{\nu\to 0}\bar{\varepsilon}(\nu) = \bar{\varepsilon} > 0$, $\lim\limits_{\chi\to 0}\bar{\varepsilon}_T(\nu) = \bar{\varepsilon}_T > 0$. Именно это обстоятельство было положено в основу гипотез теории K41 для локально однородной и изотропной турбулентности. Вместе с тем, результаты многочисленных экспериментов свидетельствуют о том, что в турбулентном потоке существуют крайне нерегулярные распределения градиентов скорости и температуры, когда области с чрезвычайно малыми значениями градиентов (нетурбулентная жидкость, для которой $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon_T \approx 0$) нерегулярным образом перемежаются с областями, в которых значения градиентов очень велики ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon_T > 0$). Этот феномен, получивший название внутренняя перемежаемость, был впервые исследован в [33] (см., также [34]). Особенно ярко выражена внутренняя перемежаемость при очень больших числах Рейнольдса, т.е. когда внешний масштаб турбулентности L достаточно велик по отношению к ее внутреннему масштабу η (например, в звездах, океане, атмосфере). Своеобразие турбулентного течения проявляется еще и в том, что эти области хаотически перемещаются в пространстве, а значения $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ и $\varepsilon_T(\mathbf{x},t)$ в них зависят, вообще говоря, от Re. Укажем еще одно любопытное свойство асимптотического поведения величин ε и ε_T. Поскольку осредненные величины $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varepsilon}_T$ не зависят от числа Рейнольдса, а коэффициенты эксцесса этих величин по данным разных авторов (см. [21]), по-видимому, неограниченно растут с увеличением Re, то отсюда вытекает следующая аномальная особенность: скалярная диссипация и диссипация энергии происходит в объеме, который стремится к нулю при $\mathrm{Re} \to \infty$. Возникает вопрос, каким образом можно интерпретировать эти результаты. В теории глобальной турбулентности предполагается (см., например, [35]), что движение жидкости заставляет вихревые трубки растягиваться, а растягиваемый вихрь должен сплющиваться, превращаясь в вихревой лист, чтобы сохранить фиксированный объем при увеличивающейся длине. Вслед за тем вихревые листы свертываются в бесконечно сложные фрактальные структуры. Турбулентность включает в себя множество фрактальных аспектов. Самый важный вывод Мандельброта состоит в том, что области диссипации, которые часто называют опорными, т.е. пространственные множества, на которых концентрируется турбулентное рассеяние, могут быть смоделированы фракталами, причем размерности Хаусдорфа-Безиковича для подобных областей лежат где-то в районе 2.5-2.6, но, вероятно, не превышает 2.66.

Имея в виду макромоделирование развитой турбулентности, далее будем различать два вида перемежаемости[32)] – внешнюю, относящуюся к подсистеме осредненного движения, и внутреннюю, относящуюся к подсистеме турбулентного хаоса. В случае внешней перемежаемости пространственно-временное распределение параметра $\langle\varepsilon(\mathbf{x},t)\rangle$ оказывается очень неравномерным – «турбулентные пятна», в которых $\langle\varepsilon(\mathbf{x},t)\rangle \gg 0$ чередуются с ламинарными облас-

---

[32)] Здесь используется терминология не совсем совпадающая с общепринятой.

тями, в которых $<\varepsilon(\mathbf{x},t)>=0$ (аналогично ведет себя и параметр $<\varepsilon_T(\mathbf{x},t)>$). В частности, колебания границ турбулентных следов, турбулентных струй, турбулентных пограничных слоев связаны с проявлением подобной перемежаемости. Внешнюю перемежаемость турбулентного течения удобно моделировать в рамках инвариантной теории турбулентности с привлечением эволюционного уравнения для осредненной скорости диссипации (см., например, [6]). С другой стороны, внутри элементарного объема $d\mathbf{x}$ подсистемы турбулентного хаоса пространственно-временные распределения диссипации турбулентной энергии ε и скалярной диссипации ε_T также весьма неравномерны: одни подобласти объема $d\mathbf{x}$ (опорные) характеризуются высокой степенью диссипации энергии и температурных неоднородностей, тогда как в других по сравнению с первыми диссипация практически отсутствует. Кроме того, существуют подобласти, в которых диссипация энергии и скалярная диссипация намного превышают средние значения.

В силу сказанного, диссипация турбулентной энергии ε или родственные ей величины (квадратичные по градиентам скорости и температуры) могут служить индикатором перемежаемости [17]. Следует отметить, что статистические модели случайного каскада, в которых перемежаемость турбулентности в инерционном интервале описывается в терминах пульсаций ε, в настоящее время развиты во многих работах отечественных и зарубежных ученых (см., например, [19],[21], [36-37]). Разработаны и другие подходы к моделированию гидродинамической перемежаемости, основанные, в частности, на понятии о странных аттракторах [38]. Существуют к тому же теории, в которых предпринята попытка объяснить взаимосвязь перемежаемости турбулентности «космической жидкости» и распределение (происхождение) галактик или звездную перемежаемость.

5.2. Мультифрактальная модель перемежаемости Колмогорова (К61). Флуктуации величин ε и ε_T в развитой турбулентности, вызванные изменениями гидродинамических характеристик осредненного движения, в частности, изменением чисел Re и Pe, оказывают, очевидно, влияние на статистические свойства структурных функций произвольного порядка для пространственных разностей скоростей или температур (и их спектры), являющиеся, как известно, основным математическим средством количественного изучения случайного каскада. По этой причине явные выражения для них, полученные в рамках теории К41, не могут быть вполне универсальными. Знаменитое «казанское замечание» Ландау (см., например, [14]) относительно гипотез теории К41 касалось именно этого влияния. В связи с этой критикой, концепция Колмогорова о случайном каскаде была уточнена в работе Обухова [17], который предложил отказаться от условия $\bar{\varepsilon} = \mathrm{const}$ в области G (с центром в точке $\mathbf{x}$ и характерным масштабом $\Lambda << L$) и исходить из того, что статистические свойства турбулентности определяются не теоретико-вероятностным средним значением $\bar{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ случайной величины ε, а зависят от значений диссипации $\varepsilon_r(\mathbf{x},t)$, осредненной по некоторому объему V_r с характерным размером r (получаемые результаты слабо зависят от формы области осреднения), малым по сравнению с типичным масштабом неоднородности осредненного течения, $r << \Lambda$. Если в качестве области осреднения, лежащей в пределах G, выбрать шар радиуса r (в нашем случае в качестве величины r можно выбрать характерный размер вихревых мезоструктур), то

$$\varepsilon_r(\mathbf{x},t) = \frac{3}{4\pi r^3} \int\limits_{|\mathbf{r}^*|\le r} d\mathbf{r}^* \, \frac{1}{2} \nu \sum\nolimits_{i,j} \left(\partial u_i''(\mathbf{x}+\mathbf{r}^*)/\partial x_j + \partial u_j''(\mathbf{x}+\mathbf{r}^*)/\partial x_i\right)^2. \quad (42)$$

Возможные статистические флуктуации скорости диссипации $\varepsilon_r(\mathbf{x},t)$ требуют следующего уточнения понятия физического ансамбля, по которому осуществляется теоретико-вероятностное осреднение гидродинамических уравнений [21]: статистический ансамбль, параметрически зависящий от ε_r (так называемый «чистый» ансамбль), позволяет рассчитать лишь условные средние значения любых гидродинамических параметров (относящихся к мгновенному движению среды), $\overline{f(\mathbf{x},\varepsilon_r(t))}^0 = \int f(\mathbf{x},\varepsilon_r)P(\varepsilon_r^0|\varepsilon_r,t)d\varepsilon_r$, определяемых при некотором фиксированном значении величины $\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 = \mathrm{const}$. Однако на практике всегда приходится иметь дело с некоторым «смешанным» ансамблем, в котором величина ε_r^0 изменяется согласно некоторому общему статистическому закону $W_1(\varepsilon_r^0,t)$. Поэтому для вычисления безусловных средних значений этих параметров необходимо осреднение условного среднего соответствующего момента по возможным значениям параметра ε_r^0. Величины подобных средних могут, вообще говоря, различаться для разных типов течений и, в частности, зависеть от числа Re.

Как известно, используя параметр $\varepsilon_r(\mathbf{x},t)$, Колмогоров [18] построил усовершенствованную модель случайного каскада в терминах флуктуаций локально усредненной диссипации. Для этой цели он переформулировал первую и вторую гипотезы подобия (установив, так называемые, уточненные гипотезы, в которых величина $\bar{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ была заменена на $\varepsilon_r(\mathbf{x},t)$) и, кроме этого, дополнил их еще и третьей гипотезой, постулирующей (при большом отношении масштабов $L:r$) нормальное распределение плотности вероятности величины $\ln\varepsilon_r$ и линейность зависимости дисперсии $\sigma^2{}_{\ln\varepsilon_r}$ от $\ln(L/r)$:

$$W_1(\varepsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon_r\sigma_{\ln\varepsilon_r}}\exp\left[-\frac{\ln^2(\varepsilon_r/m_{\ln\varepsilon_r})}{2\sigma^2_{\ln\varepsilon_r}}\right], \tag{43}$$

где $\sigma^2_{\ln\varepsilon_r} = \overline{(\ln\varepsilon_r - \overline{\ln\varepsilon_r})^2} = \mu\ln(L/\mathrm{r})$ — дисперсия величины $\ln\varepsilon_r$; $m_{\ln\varepsilon_r} = \exp(\overline{\ln\varepsilon_r})$ — медиана распределения, ($\ln m_{\ln\varepsilon_r} = \ln\bar{\varepsilon} - \sigma^2_{\ln\varepsilon}/2$, $\overline{\varepsilon_r} = \bar{\varepsilon}$); μ — универсальная постоянная, $\mu = 0{,}2$. Часто предполагают, что эта формула дает и плотность распределения вероятностей неосредненной диссипации, если $r\approx\eta$ [39]. Из приведенной формулы следует, что при $r = \eta$,

$$\lim_{\mathrm{Re}\to\infty}\int_{k(\varepsilon)}^{\infty} W_1(\varepsilon_r)d\varepsilon_r = 0 \tag{44}$$

при любом сколь угодно малом (но фиксированном) значении k. Отсюда вытекает, что при Re→∞ диссипация энергии сосредотачивается в области, объем которой стремится к нулю.

Как можно интерпретировать эти результаты? По-видимому, наиболее точно и вместе с тем просто отражает существо дела изложенная выше модель внутренней перемежаемости. Повторим еще раз основной результат достигнутый в этой области: при Re→∞ диссипация энергии сосредоточена на множестве точек, которое с топологической точки зрения является поверхностью. Эта поверхность имеет бесконечную площадь и является столь «запутанной», что ее можно рассматривать как фрактал, для которого размерность Хаусдорфа-Безиковича лежат где-то в районе 2.5-2.6 [35].

Распределение (43) позволило рассчитать важные статистические свойства стационарной турбулентности, в частности, моменты $\overline{\varepsilon_r{}^n}$:

$$\overline{\varepsilon_r{}^n} = \int_0^\infty \varepsilon_r{}^n W_1(\varepsilon_r)d\varepsilon_r = (\overline{\varepsilon_r})^n\exp\left[\tfrac{1}{2}n(n-1)\sigma^2_{\ln\varepsilon_r}\right] = F_n(\mathbf{x},t)(\bar{\varepsilon})^n(r/L)^{-\mu n(n-1)/2}$$

(коэффициенты $F_n(\mathbf{x},t)$ зависят от макроструктуры турбулентного течения). Отсюда для структурной функции n-го порядка $\overline{\mathrm{V}^n} \sim \overline{\varepsilon^{n/3}}\cdot r^{n/3}$ (где $\mathrm{V} \equiv u''(\mathbf{x}) - u''(\mathbf{x}+\mathbf{r})$), следует выражение

$\overline{\mathrm{V}^{n}} \sim F_n(\mathbf{x},t)(\bar{\varepsilon})^{n/3}(r/L_0)^{-\mu n(n-1)/6}(r)^{n/3}$, которое, в случае n=2, оказывается близким к пределам точности имеющихся экспериментальных данных, а в применении к структурным функциям высших порядков сильно отличается от зависимости, предсказываемой теорией К41 для изотропной турбулентности, но в то же время неплохо согласуется с имеющимися экспериментальными данными. Аналогичным образом была поправлена теория локальной структуры пульсационных полей температуры и концентрации химически активной примеси, перемешиваемых турбулентностью (см., например, [21]).

Перспективы. Теория Колмогорова-Обухова позволяет, вообще говоря, усовершенствовать полуэмпирические подходы к описанию развитой турбулентности, к примеру, термодинамические методы, используемые для замыкания осредненных уравнений гидродинамики на уровне моментов первого порядка (см., например, [2], [6], [23]). До последнего времени, в полуэмпирических моделях подобного рода определяющие соотношения носили исключительно локальный характер. В частности, в градиентных соотношениях (7) для компонент тензора напряжений Рейнольдса $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$ коэффициенты тензора турбулентной вязкости обычно задавались выражениями, включающими диссипацию и кинетическую энергию (или локальный внешний масштаб) турбулентности, которые были вычислены в той же пространственно-временной точке $(\mathbf{x},t)$, т.е. без учета влияния глобального числа Рейнольдса Re или других характеристик осредненного движения на характер этой функциональной связи [40]. Для наилучшего описания различных течений значения эмпирических постоянных в соотношениях для коэффициентов турбулентного обмена следует варьировать, поэтому подобные теории не нуждаются во введении перемежаемости. В то же время, перемежаемость, как ясно из сказанного, является некоторым признаком нелокального крупно-мелкомасштабного взаимодействия, которое не учитывается в полуэмпирических теориях для одноточечных моментов. Таким образом, теория К61 в полуэмпирических моделях турбулентности до настоящего времени никак не применялась. Рассмотренный в представленной работе модифицированный термодинамический подход, позволяющий использовать диссипацию турбулентной энергии в осредненных гидродинамических уравнениях движения в качестве индикатора перемежаемости, является основой для разработки более точного и универсального описания развитой турбулентности. Однако детальный анализ феноменологического моделирования внутренней перемежаемости (связанной со скоростью и температурой) в инерционном интервале и тем самым разработка методики определения коэффициентов турбулентного обмена в зависимости от параметров, управляющих режимом течения жидкости в целом, лежит вне рамок настоящей работы.

Заключение. Кратко суммируем основные результаты. Использование концепции разделения течения на осредненное, для описания осредненных больших («надсеточных») вихревых структур, и собственно турбулентное (хаос), включающее ансамбль мелкомасштабных вихрей, позволило построить феноменологическую макроскопическую модель развитой стационарно-неравновесной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытой системе. Включение в модель флуктуирующего хаоса набора случайных внутренних параметров для описания когерентных мезоструктур («подсеточные вихри»), таких как вихревые кольца, вихревые трубки, вихревые слои и т.п., дало возможность получить методами статистической неравновесной термодинамики кинетическое уравнение Фоккера-Планка в конфигурационном пространстве [3]. Это уравнение предназначено для определения временной эволюции плотностей распределения условных вероятностей характеристик, относящихся к вихревым и температурным образованиям малых масштабов, а также для анализа стохастических процессов перехода из одного стационарно-неравновесного состояния турбулентного хаоса в другое в результате последовательной потери устойчивости гидродинамической системой при изменении параметров, управляющих режимом течения.

В настоящей работе рассмотрен также альтернативный метод для исследования механизмов подобного перехода, основанный на стохастических уравнениях ланжевеновского типа, тесно связанных с выведенным кинетическим уравнением. С использованием детерминистских динамических уравнений проанализирована фундаментальная проблема разрабатываемого подхода – возможность существования асимптотически устойчивых стационарно-неравновесных состояний турбулентного хаоса. Предложен обобщенный неравновесный термодинамический потенциал для внутренних переменных и показано, что он является функцией Ляпунова для неравновесно-стационарных состояний ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса.

Хотя проблема развитой турбулентности с формальной точки зрения относится к теории диссипативных динамических систем, потенциальные возможности этой теории (бифуркации, показатели Ляпунова, странные аттракторы, фрактальная размерность аттракторов и т.д.), разрабатываемые в основном для систем с малым числом степеней свободы, оставались до последнего времени практически не использованы для развитой турбулентности, характеризуемой очень большим числом возбужденных макроскопических степеней свободы. Нами предложен комбинированный стохастико-термодинамический подход к моделированию турбулентности, когда фазовым пространством физического ансамбля служит не бесконечномерное пространство состояний турбулизованной жидкости, каждая точка которого отвечает определенному распределению случайных полей скорости и температуры, а пространство конфигураций двух или трех измерений, отвечающее внутреннему строению подсистемы турбулентного хаоса. Такой подход, по нашему убеждению, отвечает более продуктивному применению методов исследования динамических систем – одного из быстро развивающихся направлений нелинейной динамики, включающего в себя эволюцию хаотических движений и формирование упорядоченных диссипативных структур. Вместе с тем, следует признать, что построить предложенным способом эффективную математическую модель развитой турбулентности с учетом когерентных образований пока невозможно, поскольку не определены их топологические свойства, другими словами, представляют ли они собой извилистую разветвленную кривую – вихревую трубку или волнистую слоистую поверхность – вихревой лист, или вихри Бюргерса и т.п. А это, в свою очередь, не позволяет описать подобные вихревые структуры малых масштабов адекватным набором внутренних параметров.

Двойственный характер необратимых процессов, приводящий к отсутствию порядка вблизи равновесия и к упорядоченности вдали от равновесия, наглядно проявляется при анализе современных проблем турбулентности макромира во всем многообразии пространственно-временных масштабов, от вопросов происхождения и нелинейной эволюции Вселенной, звездной и планетной космогонии, до процессов в газовых оболочках небесных тел и формирования экосистем, в которых возможны случайные каскадные процессы образования разномасштабных вихрей. С попыткой построить более полные и отвечающие реальным природным процессам модели указанных сложных явлений и нацелена данная работа. При последующем анализе этих конкретных явлений в задачах численного моделирования, разрабатываемый термодинамический подход к описанию структурированной турбулентности, несомненно, получит свое дальнейшее уточнение и развитие.

Благодарность. Я выражаю самую глубокую признательность чл.-корр. РАН М.Я. Марову за постоянную поддержку и многочисленные полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya.* Methods of nonequilibrium thermodynamics for description of multicomponent turbulens gas mixture//Arch.Mech., 1985, v.37, № 1-2, p. 3-19.
2. *Колесниченко А.В., Маров М.Я.* Турбулентность многокомпонентных сред. – М.: Наука, 1999, 336с.

3. *Колесниченко А.В.* Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности// Математическое моделирование, 2004, т.16, №1, с. 37-66.
4. *Колесниченко А.В.* Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрогеофизических систем. В сб. «Современные проблемы механики и физики космоса». – М.: Физматлит, 2003, с.123-162.
5. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986, 310 с.
6. *Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V.* Mechanics of turbulence of multicomponent gases. , Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers, 2001, 375 p.
7. *Белоцерковский О.М., Опарин А.М.* Численный эксперимент в турбулентности: От порядка к хаосу. – М.: Наука, 2000, 223 с.
8. *Blackadar A.K.* Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system//J. Meteorology, 1955, v.12, p.165-175.
9. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. – М.: Иностр. Лит., 1960, 160 с.
10. *Onsager L.* Statistical hydrodynamics// Nuovo Cimento (Supplement), 1949, v.6. p.279-287.
11. *Druden H.I.* Recent Advances in the Mechanic of Boundary Layes Flow//Adv. Appl. Mech., 1948, v.1, p.1-40.
12. *Crow S.C., Champagne F.H.* Orderly structures in jet turbulence//J. Fluid Mech., 1971, v.48. p.547-591.
13. *Brown G. L., Roshko A.* On density effects and large structures in turbulent mixing layers// J. Fluid Mech., 1974, v.64, p.775-816.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц В.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1988, 733 с.
15. *Монин А.С., Полубаринова-Кочина П.Я., Хлебников В.И.* Космология, гидродинамика, турбулентность: А.А. Фридман и развитие его научного наследия. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 326 с.
16. *Колесниченко А.В.* Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред// Проблемы современной механики (к юбилею Л.И. Седова)/ Ред. Григоряна С.С. – М.: МГУ, 1998, с. 52-74.
17. *Obukhov A.M.* Some specific features of atmospheric turbulence// J. Fluid Mech., 1962,.v.13, Pt.1. p.77-81.
18. *Колмогоров А.Н.* Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса//Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout - sept. 1961/ На рус. и фр. яз. Paris. 1962, p. 447-458.
19. *Фриш У.* Турбулентность. Наследие Колмогорова. – М.: Фазис, 1998, 343 с.
20. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. – М.: Издательская группа «Прогресс», 1994, 240 с.
21. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т.2. С-Пб: Гидрометеоиздат, 1996, 742 с.
22. *Мюнстер А.* Химическая термодинамика. – М.: Едиториал УССР, 2002, 295с.
23. *Кайзер Дж.* Статистическая термодинамика неравновесных процессов. – М.: Мир, 1990, 607 с.
24. *Пригожин И. Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – М.: Мир, 2002, 461с.
25. *де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика– М.: Мир, 1964, 456 с.
26. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985, 419 с.
27. *Кляцкин В.И., Татарский В.И.* Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики// Успехи физических наук, 1973, т.110, вып.4, с. 499-517.
28. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1998, 480 с.
29. *Graham R.* Stochastic Methods in Nonequilibrium Thermodynamics.–In: Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology. Proc. of the Workshop, bielefeld, Fed, Rep. Of Germany, October 5-11, 1980/ Eds. Arnold L., Lefever R. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verlag. 1981., p.202-212.
30. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. – Череповец: «Меркурий-ПРЕСС», 2000, 366 с.
31. *Marsden J.E., McCracren M.* The Hopf Bifurcation and its Applications//Applied Math. Sci., v.19. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

32. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований. 2002, 656 с.
33. *Batchelor G.K., Townsend, A.A.* The nature of turbulent motion at high wave number. Pr. of the Royal society of London, 1949, v.A199, p. 238-255.
34. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. – М.: Ин. лит., 1955, 197 с.
35. *Mandelbrot B.B.* Intermittent turbulence in self- similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrie// J. Fluid mech., 1974, v.62, №2, p. 401-416.
36. *Новиков Е.А., Стюарт Р.У.* Перемежаемость турбулентности и спектр флюктуаций диссипации энергии// Изв. АН СССР. сер. Геофизики, 1964, №3, с. 408-413.
37. *Frisch U., Sulem P.L., Nelkin M.* A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence// J. Fluid Mech., 1978, v.87, p.719-736.
38. Странные аттракторы: Сборник статей. Пер. с анг./Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. – М.: Мир, 1981, 253 с.
39. *Frenkiel F.N., Klebanoff P.S.* On the log-normality of the small-scale structure of turbulence// Bound. Layer Meteorol., 1975, v.8. №2, p.173-200.
40. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т.1. – С-Пб.: Гидрометеоиздат, 1992, 694 с.

Поступила в редакцию 22.12.03.