Эллипс, симметричный как квадрат

Д.ЗВОНКИН

Введение

Эта статья о том, что из наличия в задаче симметрии иногда можно сразу вывести ответ. Вот несколько совсем простых примеров. Если у числа поменяли знак, а оно при этом не изменилось, то это число – ноль. А если вектор на плоскости повернули на $120°$, но он остался прежним, то, значит, это был нулевой вектор. Или, допустим, эллипс повернули на 90° и получили тот же самый эллипс; вывод: этот эллипс – окружность. Для решения одной из последних задач вам потребуется даже эллипсоид, симметричный как кубик, т.е. сфера. Но начнем с самого простого.

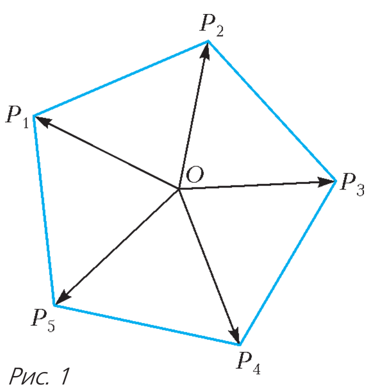

Рис. 1

Задача 1. *На плоскости нарисован правильный пятиугольник с центром O и вершинами* P_1, P_2, P_3, P_4 *и* P_5 *(рис.1). Докажите, что*

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}+\overrightarrow{OP_5}=\vec{0}.$$

Решение. Обозначим сумму

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}+\overrightarrow{OP_5}$$

через $\vec{u}$. Если повернуть плоскость на одну пятую оборота (т.е. на $72°$) вокруг точки O, то вектор $\vec{u}$ тоже повернется на одну пятую оборота. С другой стороны, пятиугольник при таком повороте перейдет сам в себя (только номера вершин изменятся). Следовательно, вектор $\vec{u}$ останется прежним. Итак, вектор $\vec{u}$ не меняется при повороте на $72°$. Значит, $\vec{u}=\vec{0}$.

Задача 2. *Решите задачу 1, заменив в ней пятиугольник на любой правильный n-угольник.*

Задача 3. *Перейдем в три измерения: решите задачу 1, заменив в ней пятиугольник на куб.*

Задачи с аффинными функциями

В предыдущих задачах требовалось найти некоторый вектор, а симметрия позволила доказать, что он на самом деле равен нулю. В следующей серии задач вместо векторов будут использоваться аффинные функции, так что мы должны сначала рассказать, что это такое.

Об аффинных функциях. *Аффинной функцией* от двух переменных x и y называется любая функция вида $f(x, y)=ax+by+c$, где a, b и c – действительные числа. В школе такие функции часто называют линейными, но среди математиков линейными принято называть только функции вида $ax+by$, а если к линейной функции добавить еще число, то такую функцию называют уже аффинной.

Очевидно, что сумма нескольких аффинных функций будет снова аффинной функцией. Графиком аффинной функции является невертикальная плоскость $z=ax+by+c$ в трехмерном пространстве с координатами x, y, z.

Поскольку аффинная функция зависит всего от трех параметров – a, b и c, – она однозначно определяется своими значениями в почти любых трех точках: нужно только, чтобы эти точки не лежали на одной прямой. Геометрически это утверждение означает, что через любые три точки в пространстве проходит ровно одна невертикальная плоскость, если только эти точки не лежат над одной прямой в плоскости Oxy. Например, если известно, что аффинная функция принимает равные значения в трех точках, не лежащих на одной прямой, то эта функция постоянна, т.е. $a=b=0$. График такой функции – горизонтальная плоскость.

Если же аффинная функция непостоянна, то ее график пересекает координатную плоскость Oxy вдоль прямой L с уравнением $ax+by+c=0$. По мере того как точка (x, y) отдаляется от L, значение аффинной функции возрастает (в положительную или в отрицательную сторону) пропорционально удалению от прямой. Умножив нашу аффинную функцию на ненулевую константу, можно добиться, чтобы $a^2+b^2=1$. В этом случае вектор (a, b) будет единичным вектором, перпендикулярным L, а расстояние от точки (x, y) до L будет равно просто $|ax+by+c|$. Более точно, если точка (x, y) лежит с той стороны от прямой, куда смотрит вектор (a, b), то расстояние равно $ax+by+c$, а если с противоположной стороны, то оно равно $-(ax+by+c)$. Это известная из школьной программы формула расстояния от точки до прямой.

Теперь можно переходить к задачам.

Задача 4. *На плоскости нарисован правильный семиугольник. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки P семиугольника до его сторон не зависит от внутренней точки.*

Решение. Пусть (x, y) – координаты точки P. Расстояние от P до любой стороны семиугольника – аффинная функция от x и y (поскольку все внутренние точки лежат с одной и той же стороны от любой стороны семиугольника, модуль в формуле расстояния можно не писать, а вместо этого сразу выбрать правильный знак). Складывая семь аффинных функций (по одной для каждой стороны семиугольника), мы получим снова аффинную функцию. Значит, сумма расстояний от точки (x, y) до сторон семиугольника – аффинная функция от x и y. Теперь мы двумя способами докажем, что эта функция постоянна (выбирайте тот, который вам больше нравится).

Первый способ. Если бы функция не была постоянной, ее график пересекал бы плоскость Oxy вдоль некоторой прямой. При повороте на одну седьмую оборота вокруг центра семиугольника эта прямая, с одной стороны, повернется на одну седьмую оборота, но, с другой стороны, не изменится, так как не изменится сама аффинная функция. Противоречие.

Второй способ. Значения нашей аффинной функции во всех вершинах семиугольника очевидно совпадают. Так как эти вершины не лежат на одной прямой – функция постоянна.

Задача 5. *Решите задачу 4, заменив в ней семиугольник на произвольный правильный n-угольник.*

Задача 6. *Внутри правильного шестиугольника поставили точку P и соединили ее отрезками со всеми вершинами шестиугольника (рис.2). Получившиеся шесть треугольников покрасили в синий и белый цвета – через один. Докажите, что сумма площадей синих треугольников совпадает с суммой площадей белых треугольников.*

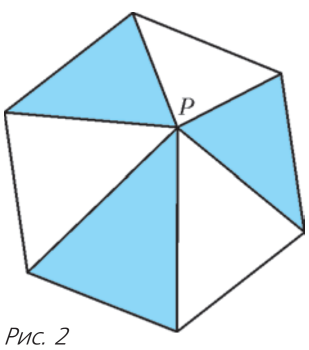

Рис. 2

Решение. Введем на плоскости систему координат так, чтобы начало координат попало в центр шестиугольника. Пусть (x, y) – координаты точки P. Обозначим через $f(x, y)$ разность между суммарной площадью синих треугольников и суммарной площадью белых треугольников. Наша цель – доказать, что $f(x, y) = 0$ для любых x, y.

Пусть AB – фиксированный отрезок на плоскости. Начнем с того, что (ориентированная) площадь треугольника ABP – это снова аффинная функция от x и y. Действительно, она получается из аффинной функции расстояния до прямой AB умножением на постоянный множитель – половину длины отрезка AB.

Функция f – тоже аффинная, поскольку она получается сложением и вычитанием шести аффинных функций. Кроме того, из симметрии очевидно, что $f(0, 0) = 0$. Теперь мы двумя способами докажем, что функция f тождественно равна нулю.

Первый способ. Если бы функция f не была равна нулю, ее график пересекал бы плоскость Oxy вдоль некоторой прямой, проходящей через центр шестиугольника. При повороте на 120° вокруг центра шестиугольника эта прямая, с одной стороны, повернется на 120°, но, с другой стороны, не изменится, так как не изменится сама аффинная функция. Противоречие.

Второй способ. Значения нашей аффинной функции во всех вершинах шестиугольника очевидно совпадают и равны нулю. Так как эти вершины не лежат на одной прямой – функция тождественно равна нулю.

Задача 7. *Докажите, что утверждение задачи 6 останется верным, если заменить в ней 6-угольник на правильный 2n-угольник.*

Замечание. Задачи 4, 5, 6 и 7 являются, на самом деле, разными ипостасями одной и той же задачи. Действительно, расстояние от точки P до стороны AB правильного многоугольника и площадь треугольника ABP отличаются лишь постоянным множителем $l/2$, где l – длина стороны многоугольника. Задачи 4 и 5, например, можно решить, заметив, что если умножить на $l/2$ сумму расстояний от P до сторон многоугольника, то получится площадь многоугольника. А задачу 6 можно решить, заметив, что шестиугольник является пересечением двух треугольников, для каждого из которых сумма расстояний от P до сторон постоянна.

Эти совпадения не случайны: дело в том, что две аффинные функции, обнуляющиеся на одной и той же прямой, всегда отличаются лишь на множитель. В наших задачах мы рассматривали аффинные функции, обнуляющиеся на сторонах правильного многоугольника, а вот множитель выбирали по-разному.

Задача 8. *Внутри правильного октаэдра поставили точку P. Восемь тетраэдров с вершиной в точке P и с основаниями на гранях октаэдра покрасили в синий и белый цвета в шахматном порядке. Докажите, что суммарный объем белых тетраэдров равен суммарному объему синих тетраэдров.*

Пояснение. Правильный *октаэдр* – это многогранник, состоящий из восьми правильных треугольников, причем в каждой вершине сходится по четыре треугольника (рис.3). Например, если в центре каждой

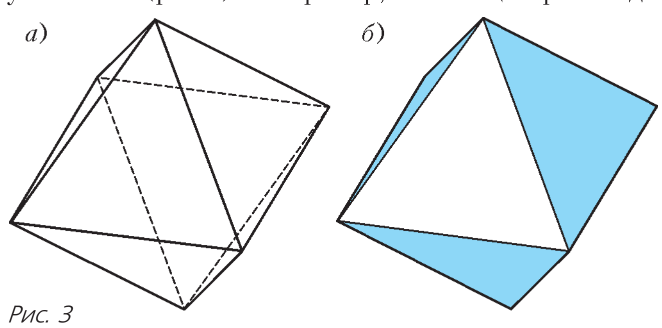

Рис. 3

грани куба поставить по точке и соединить точки на соседних гранях отрезками, то получится октаэдр. *Тетраэдр* – это многогранник, ограниченный четырьмя треугольниками, иначе говоря, это пирамида с треугольным основанием. На рисунке 3 слева изображен октаэдр, а справа его видимые грани покрашены в синий и белый цвета в шахматном порядке.

Указание. Докажите сначала, что объем тетраэдра с фиксированным основанием и с вершиной в точке P с координатами (x, y, z) является аффинной функцией от трех переменных, т.е. имеет вид $ax + by + cz + d$, где a, b, c, d – действительные числа. Из этого следует, что функция $f(x, y, z)$, равная разности объемов синих и белых тетраэдров, тоже аффинная. Из симметрий

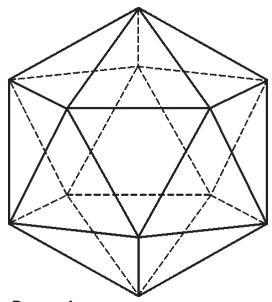

Рис. 4

октаэдра легко вывести, что функция f равна нулю во всех вершинах, а также в центре октаэдра.

Задача 9. *В пространстве нарисован правильный икосаэдр. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки P до его граней не зависит от точки P.*

Пояснение. Правильный *икосаэдр* – это многогранник, состоящий из двадцати правильных треугольников, причем в каждой вершине сходится по пять треугольников (рис.4).

Задачи на квадратичные формы

В следующей серии задач речь пойдет о квадратичных формах, поэтому для начала расскажем немного об их свойствах.

Квадратичной формой от двух переменных x и y называется многочлен от x и y, все члены которого имеют степень ровно два. Иными словами, квадратичная форма – это функция вида $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ для некоторых действительных чисел a, b, c. Очевидно, что сумма квадратичных форм будет снова квадратичной формой.

Для того чтобы как-то представить себе квадратичную форму f, часто бывает удобно нарисовать какую-нибудь ее линию уровня, т.е. кривую $f(x, y) = c$. Например, при $c = 1$ линия уровня квадратичной формы $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)/r^2$ – окружность радиуса r, линия уровня квадратичной формы $f(x, y) = x^2/4 + y^2$ – эллипс с полуосями 1 и 2 (рис.5), линия

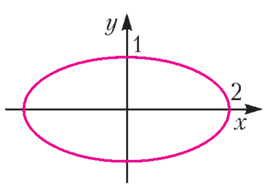

Рис. 5

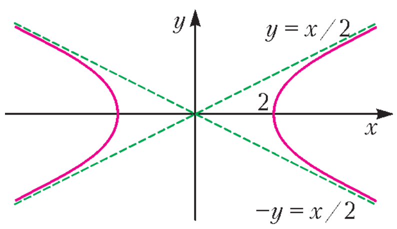

Рис. 6

уровня квадратичной формы $f(x, y) = x^2/4 - y^2$ – гипербола (рис. 6).

Вероятно, самым важным результатом о квадратичных формах является так называемая **теорема о приведении к нормальному виду**: *для любой квадратичной формы f найдутся декартова система координат u, v и два действительных числа* α *и* β *такие, что* $f = \alpha u^2 + \beta v^2$.

Для того чтобы найти такую систему координат, рассмотрим значения квадратичной формы f на точках единичной окружности. Выберем на этой окружности единичный вектор $\vec{e}_1$, на котором значение f максимально, и единичный вектор $\vec{e}_2$, на котором значение f минимально. Оказывается, что векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ перпендикулярны друг другу, а в координатах u, v, соответствующих базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, квадратичная форма f имеет вид $\alpha u^2 + \beta v^2$. Мы не будем здесь этого доказывать.

Если оба числа α и β оказались положительными, то линия уровня при $c = 1$ нашей квадратичной формы – эллипс. Если α и β разных знаков, то линия уровня будет гиперболой. Оси эллипса или гиперболы направлены вдоль векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Если α и β отрицательны, то полезнее рассмотреть линию уровня $f(x, y) = -1$, которая будет эллипсом.

Упражнение. Какие линии уровня при $c = 1$ у квадратичной формы, когда одно из чисел α, β равно нулю? (*Ответ:* пары параллельных прямых.)

Пусть r – какое-нибудь преобразование плоскости, например поворот. Квадратичная форма (как и любая другая функция) называется *инвариантной относительно r*, если ее значение в любой точке P совпадает со значением в точке $r(P)$. Иными словами, применение преобразования r не меняет значений квадратичной формы.

Любая квадратичная форма инвариантна относительно поворота на $180°$. В самом деле, поворот на $180°$ переводит координаты x и y в $-x$ и $-y$. Теперь достаточно заметить, что $(-x)^2 = x^2$, $(-y)^2 = y^2$, а $(-x)(-y) = xy$. Обратите внимание, что из инвариантности квадратичной формы вытекает инвариантность ее линий уровня. Действительно: и эллипс, и гипербола центрально симметричны.

Если квадратичная форма инвариантна относительно какого-нибудь другого поворота, из этого сразу следует, что она имеет вид $\alpha\left(x^2 + y^2\right)$: ни одна гипербола и ни один эллипс, кроме окружности, не переходят в себя при других поворотах.

Пример. Рассмотрим квадратичную форму

$$f(x, y) = 14x^2 - 24xy + 21y^2.$$

Перейдем в декартов базис

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \vec{e}_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Координаты в новом базисе имеют вид

$$u = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y,\ v = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y.$$

Нетрудно проверить, что

$$f(x, y) = 5u^2 + 30v^2.$$

Следовательно, линией уровня $f(x, y) = 1$ является эллипс. Его большая полуось идет вдоль вектора $\vec{e}_1$ и равна $1/\sqrt{5}$, а малая полуось идет вдоль вектора $\vec{e}_2$ и равна $1/\sqrt{30}$.

Задача 10. *На плоскости с началом координат O отмечена точка A с координатами* (a, b). *Кроме того, по плоскости бегает точка P с координатами* (x, y). *Пусть s – расстояние от A до OP, а l – длина OP. Положим* $f(x, y) = s^2 l^2$. *Докажите, что f – квадратичная форма от x, y.*

(Эта задача, сама по себе не особенно интересная, потребуется нам для решения следующей, более красивой задачи.)

Решение. Пусть H – проекция точки A на прямую OP (рис.7). Тогда

$$s^2l^2 = AH^2 \cdot OP^2 = \left(OA^2 - OH^2\right) \cdot OP^2 =$$

$$= OA^2 \cdot OP^2 - \left(\overline{OA} \cdot \overline{OP}\right)^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - (ax + by)^2.$$

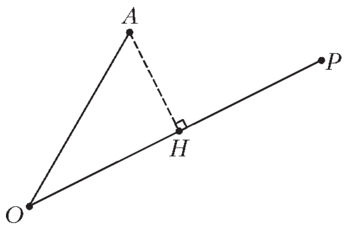

Рис. 7

При фиксированных a, b это квадратичная форма от x, y.

Задача 11. *Через центр O правильного n-угольника на плоскости провели прямую и вычислили сумму квадратов расстояний от вершин n-угольника до прямой. Докажите, что результат не зависит от прямой.*

Решение. Выберем на нашей прямой точку P с координатами (x, y) и домножим сумму квадратов расстояний на OP^2. Согласно предыдущей задаче, у нас получится квадратичная форма $f(x, y)$. При повороте на одну n-ю оборота n-угольник, а следовательно, и квадратичная форма не изменятся. Из этого вытекает, что f имеет вид $f(x, y) = \alpha\left(x^2 + y^2\right)$, а ее линией уровня $f(x, y) = 1$ является окружность.

Вспоминая, что $OP^2 = x^2 + y^2$, мы видим, что сумма квадратов расстояний от вершин n-угольника до прямой равна α, т.е. не зависит от координат точки P.

Для решения следующей задачи нам потребуется одно замечание. Пусть функция $f(x, y)$ – произвольный многочлен степени 2. Тогда f единственным образом раскладывается в сумму квадратичной формы (члены степени 2), линейной функции (члены степени 1) и числа (свободный член). Предположим, что наша функция инвариантна относительно некоторого поворота r вокруг начала координат. Тогда можно утверждать, что каждое из трех описанных выше слагаемых инвариантно само по себе. Это можно доказать разными способами. Проще всего проверить, что операция поворота на угол α:

$$u = (\cos\alpha)\,x + (\sin\alpha)\,y,$$
$$v = (-\sin\alpha)\,x + (\cos\alpha)\,y$$

переводит члены степени 1 в члены степени 1, а члены степени 2 в члены степени 2. На самом деле, мы неявно пользовались этим свойством в предыдущих задачах, когда предполагали, что после поворота вокруг начала координат линейная функция останется линейной, а квадратичная форма останется квадратичной формой.

Задача 12. *На плоскости нарисован правильный n-угольник с центром в начале координат O. Пусть r – радиус его вписанной окружности. Выберем на плоскости точку P такую, что $OP = l$. Докажите, что сумма квадратов расстояний от P до сторон n-угольника равна $n\left(r^2 + \dfrac{l^2}{2}\right)$.*

Решение. Если прямая L на плоскости задана уравнением $ax + by + c = 0$, где $a^2 + b^2 = 1$, то квадрат расстояния от P до L равен $(ax + by + c)^2$. Сумма n функций такого вида будет многочленом второй степени

$$f(x, y) = A + B_x x + B_y y + C_{xx}x^2 + C_{xy}xy + C_{yy}y^2,$$

где A, B_x, B_y, C_{xx}, C_{xy}, C_{yy} – некие действительные числа. Именно такой вид имеет сумма квадратов расстояний от P до сторон n-угольника. Рассмотрим отдельно члены степени 0, 1 и 2 многочлена f.

Свободный член – это константа A.

Члены степени 1 – это сумма $B_x x + B_y y$, т.е. скалярное произведение векторов (x, y) и $\left(B_x, B_y\right)$. Из симметрии следует, что вектор $\left(B_x, B_y\right)$ не меняется при повороте на одну n-ю оборота, т.е. он равен нулю.

Члены степени 2 – это квадратичная форма $C_{xx}x^2 + C_{xy}xy + C_{yy}y^2$. Эта квадратичная форма не меняется при повороте на одну n-ю оборота. Следовательно, ее линия уровня – окружность, а значит, квадратичная форма имеет вид $C\left(x^2 + y^2\right)$.

Итак, мы получили, что $f(x, y) = A + C\left(x^2 + y^2\right)$. Осталось найти числа A и C.

Чтобы найти A, достаточно вычислить $f(0, 0)$, т.е. значение нашей суммы квадратов расстояний для точки $P = O$. Эта сумма, очевидно, равна nr^2, т.е. $A = nr^2$.

Чтобы найти C, посмотрим на вклад каждой стороны n-угольника в коэффициенты C_{xx} и C_{yy}. Пусть прямая, продолжающая одну из сторон n-угольника, задается уравнением $ax + by + c = 0$, причем $a^2 + b^2 = 1$. Тогда у многочлена $(ax + by + c)^2$ коэффициент при x^2 равен $C_{xx} = a^2$, а коэффициент при y^2 равен $C_{yy} = b^2$. Таким образом $C_{xx} + C_{yy} = 1$. Получается, что каждая из n сторон многоугольника дает вклад 1 в сумму $C_{xx} + C_{yy}$, а в конце эта сумма оказывается равной $2C$. Получается, что $C = n/2$.

Итак,

$$f(x, y) = nr^2 + \frac{n}{2}\left(x^2 + y^2\right) = n\left(r^2 + \frac{l^2}{2}\right).$$

Резюмируем еще раз наше решение. Сначала мы установили, что ответ в задаче – некоторый многочлен степени два. У такого многочлена 6 коэффициентов, которые нам нужно было найти. Из симметрии задачи мы вывели, что три из шести параметров равны нулю, а еще два равны друг другу. Оставшиеся два параметра мы честно вычислили.

Для последних двух задач вам потребуется **теорема о приведении квадратичной формы к нормальному виду** в трехмерном пространстве: *для любой квадратичной формы*

$$f(x, y, z) = a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + a_{xy}xy + a_{xz}xz + a_{yz}yz$$

найдутся декартова система координат u, v, w и три действительных числа α, β, γ такие, что $f = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2$.

Из этой теоремы легко вывести, что наличие симметрий накладывает на трехмерные квадратичные формы сильные ограничения:

• если квадратичная форма не меняется при повороте вокруг оси z на угол, отличный от $180°$, то она имеет вид $\alpha\left(x^2+y^2\right)+\beta z^2$;

• если квадратичная форма не меняется при повороте вокруг двух различных осей на углы, отличные от $180°$, то она имеет вид $\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Задача 13. (Из книги В.И.Арнольда «Математические методы классической механики». Эта задача обобщает задачу 11 на трехмерную ситуацию.) *Проведите прямую через центр куба так, чтобы сумма квадратов расстояний от вершин куба до прямой была минимальной. Та же задача – про правильный тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр.*

Задача 14. (Обобщение задачи 12 на трехмерную ситуацию.) *В пространстве дан правильный додекаэдр с центром в точке O, и выбрана некоторая точка P. Расстояние от O до центров граней додекаэдра (т.е. радиус вписанной сферы) обозначим через r; расстояние от O до середин ребер додекаэдра – через* ρ*; расстояние от O до вершин додекаэдра (т.е. радиус описанной сферы) – через R. Наконец, положим OP = l.*

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от P до граней додекаэдра равна $12r^2+4l^2$.

б) Докажите, что сумма квадратов расстояний от P до ребер додекаэдра равна $30\rho^2+20l^2$.

в) Докажите, что сумма квадратов расстояний от P до вершин додекаэдра равна $20R^2+20l^2$.

Выведите аналогичные формулы для правильного тетраэдра, октаэдра, куба и икосаэдра.

Пояснение. Правильный додекаэдр состоит из 12-ти правильных пятиугольников, причем в каждой вершине сходится по три пятиугольника (рис.8). У додекаэдра 30 ребер и 20 вершин.

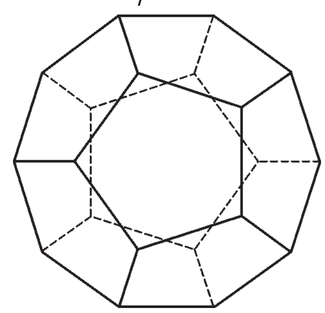

Рис. 8

Попробуйте использовать методы этой статьи для решения задачи М2292,б «Задачника «Кванта».

НАМ ПИШУТ

Катастрофа замечательной точки

Во втором номере «Кванта» за 2012 год опубликована статья В.Протасова и В.Тихомирова «Пространство L_p и замечательные точки треугольника». В ней даны ответы на некоторые интересные вопросы, связанные с так называемой L_p-нормой. Естественно, в статье дается и определение этого понятия (ибо в учебниках для средней школы оно встречается, мягко говоря, не часто).

Пусть дан некоторый треугольник ABC и любая точка M в плоскости этого треугольника. Тогда L_p-нормой расстояний от точки M до вершин треугольника называется величина $\left(MA^p+MB^p+MC^p\right)^{1/p}$. Авторы поставили задачу: для данного остроугольного[1] треугольника ABC и произвольного $p\geq 1$ найти точку M, для которой L_p-норма расстояний от точки M до вершин треугольника *наименьшая*. Они же дали ответ для трех наиболее интересных случаев, соответствующих p = 1, 2 и . Оказалось следующее.

1) При p = 1 искомой является так называемая *точка Торричелли*, т.е. точка внутри треугольника, из которой все стороны видны под углами $120°$. Такая точка единственна для любого остроугольного треугольника.[2]

2) При p = 2 искомая точка – хорошо всем знакомая *точка пересечения медиан* (а иначе – центр тяжести треугольника).

3) Наконец, при p = искомой точкой становится *центр описанной окружности.*[3]

[1] Почему именно остроугольного? Потому что для иных треугольников возникают разные неприятности при рассуждениях. Нас тоже не тянет в них углубляться, так что замнем этот вопрос.

[2] Для треугольников с углом, большим $120°$, точка Торричелли не существует. Может, это и стало одной из причин, по которым авторы ограничились остроугольными треугольниками.

[3] Видимо, здесь кроется вторая причина «остроугольной» ограниченности. Дело в том, что у тупоугольных треугольников центр описанной окружности лежит вне треугольника, и для них указанный ответ неверен.

Как и полагается всякой хорошей статье, количество возникающих при ее прочтении вопросов заметно превосходит число полученных ответов, что стимулирует дальнейшие исследования в этой области. Поэтому при прочтении статьи моментально сами собой сформулировались два вопроса.

Вопрос 1. А что будет при других $p\geq 1$?

Вопрос 2. А почему, собственно, должно быть $p\geq 1$?

Понятно, что всесторонне ответить на них неимоверно трудно.[4] Но хотя бы слегка «пощупать» проблему, сделать нестрогие предварительные выводы и (куда денешься?) задать новые вопросы удалось. О том и пойдет речь.

Итак, замечательная точка M с ростом p от 1 до перемещается от точки Торричелли через центр тяжести к центру описанной окружности. Нет сомнений, что при непрерывном возрастании значения p ее траекторией будет некая кривая. Какая это кривая? Первое, что приходит в голову, – отрезок прямой. И действительно, если треугольник равнобедренный, то этот отрезок лежит на высоте треугольника, являющейся осью его симметрии. Еще более прост ответ для правильного треугольника ABC: при любом $p\geq 1$ наша замечательная точка есть центр треугольника – и ничего больше.

Однако в общем случае (если треугольник ABC не равнобедренный) кривая никак не может быть отрезком прямой, поскольку для таких треугольников точка Торричелли, центр тяжести и центр описанной окружности *не лежат на одной прямой*. Убедиться в этом, в принципе, несложно, хотя возникают весьма громоздкие вычисления.

Нас, конечно, больше интересует общий случай, с неравнобедренным треугольником ABC. Если мы не можем теоретически определить траекторию точки M, то, может, хотя бы *посмотрим* на нее? Зря, что ли, нынче компьютеры на каждом шагу?

Последнее сделать удалось. Для самых разных остроугольных треугольников, длины сторон которых имели

[4] В всяком случае, автору этой заметки.