



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бабич, Метод Адамара и асимптотика  
спектральной функции дифференциального  
оператора второго порядка,  
*Матем. заметки*, 1980, том 28,  
выпуск 5, 689–694

<https://www.mathnet.ru/mzm6399>

Использование Общероссийского математического портала  
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны  
с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

24 апреля 2025 г., 07:10:01



## МЕТОД АДАМАРА И АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. М. Бабич

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область  $\mathbf{R}^n$ , в которой задан эллиптический дифференциальный оператор

$$\begin{aligned}
 -Lu &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) + a(x)u, \\
 \frac{1}{g} &= \det(g^{ij}), \quad x = (x^1, x^2, \dots, x^n).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Будем считать, что граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  дважды непрерывно дифференцируема, а коэффициенты берутся из  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ). Пусть  $\varphi_m(x)$  — нормированные собственные функции оператора

$$\begin{aligned}
 L\varphi_m &= k_m^2 \rho(x) \varphi_m, \quad \text{Im } \varphi_m = 0, \\
 \rho(x) &> 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \\
 \int_{\Omega} \rho(x) \varphi_m^2(x) dx &= 1, \quad \rho(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}),
 \end{aligned} \tag{2}$$

соответствующие какому-либо классическому однородному краевому условию. Мы требуем, чтобы все собственные числа  $k_m^2$  были неотрицательны. Наша цель — построить асимптотическое (при  $k \rightarrow \infty$ ) разложение спектральной функции

$$\theta(x, y, k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k_m < k} \varphi_m(x) \varphi_m(y) \tag{3}$$

оператора  $L$ .

Схема решения этой задачи хорошо известна (см., например, [1]). Ссылки на более ранние работы имеются в [2]. В статье [3] содержится новый интересный подход к изучению спектральной функции. Получение асимптотического разложения сводится к детальному исследованию особенностей фундаментального решения задачи Коши для гиперболического уравнения, соответствующего уравнению (1). Это исследование можно проводить методом интегральных уравнений типа Вольтерра [4], что сопряжено с громоздкой аналитической техникой. Однако в данной задаче можно обойтись без столь сложных построений, если использовать модернизированный вариант метода Адамара и связанное с ним коротковолновое разложение решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде (см. [5], [6], [7, гл. 6 ч. II]). Сама идея применить метод Адамара при изучении спектральной функции не нова (см. [8]), однако в работе [8] получен лишь главный член асимптотического разложения, между тем, рассуждая иначе, чем Бюро, можно в простой форме получить все асимптотическое разложение (остаточный член мал в среднем). Это асимптотическое разложение выражается через решение дифракционной задачи о фокусировке волны в точку.

Имеет место формула

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} d_k \theta(x, y, k) = h(x, y, t) + h(x, y, -t), \quad (4)$$

которую следует понимать в смысле обобщенных функций. Здесь  $h$  — решение смешанной задачи

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= -Lh, \quad t > 0, \\ h \xrightarrow{t \downarrow 0} \frac{1}{\rho(y)} \delta(x-y); \quad \frac{\partial h}{\partial t} \xrightarrow{t \downarrow 0} 0; \quad h|_{t < 0} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

соответствующее тем же однородным краевым условиям, что и  $\varphi_m$ . (См. [1, формула 2.16].)

При малых  $t$

$$h(x, y, t) = \partial v(x, y, t) / \partial t,$$

где  $v$  — фундаментальное решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -Lv \quad (t > 0), \\ v \xrightarrow{t \downarrow 0} 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \xrightarrow{t \downarrow 0} \frac{1}{\rho(y)} \delta(x-y). \end{aligned} \quad (6)$$

Известно, что при малых  $t$  и  $y \in \Omega$  имеет место разложение Адамара

$$v(x, y, t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x, y) \frac{(t^2 - \tau^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)} \Big|_{\lambda=(1-n)/2+j}; \quad (7)$$

здесь  $v_j(x, y)$  — гладкие функции  $x$  и  $y$ ,  $\tau$  — геодезическое расстояние, определяемое римановой метрикой

$$ds^2 = \rho(x) \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad (g_{ij}) = (g^{ij})^{-1}, \quad (8)$$

$\Gamma$  — гамма-функция, обобщенная функция  $(t^2 - \tau^2)_+^\lambda / \Gamma(\lambda + 1)$  при  $\text{Re } \lambda > 0$  понимается как «обычная» функция, а на остальные  $\lambda$  распространяется с помощью аналитического продолжения. Функции  $v_j$  можно последовательно находить, формально подставляя разложение (7) в уравнение (6) и приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях  $t^2 - \tau^2$ . Функции  $v_j$  находятся однозначно с помощью интегрирования рекуррентных линейных обыкновенных уравнений вдоль геодезических, соответствующих метрике (8) и исходящих из точки  $x = y$ . Роль начальных условий играет требование конечности  $v_j(x, y)$  при  $x = y$  ( $j > 0$ ) и равенство

$$v_0(y, y) = \frac{\rho^{\frac{n-2}{2}}(y)}{2 \sqrt{\det(g^{ij}(y))} \pi^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Разложение (7) представляет собой асимптотику  $v(x, y, t)$  по гладкости<sup>1)</sup>. Это разложение замечательно тем, что оно характеризует сингулярности  $v$  на волновом фронте как вблизи точки  $x = y$ , так и при удалении от этой точки. Открытие Адамаром разложения (7) является уникальной находкой. Уникальной в том смысле, что подобного простого и естественного разложения не удастся построить ни для сколько-нибудь общих систем уравнений (в частности, для системы динамических уравнений тео-

<sup>1)</sup> То есть для любого  $N = 1, 2, 3, \dots$  имеет место равенство

$$v = \sum_{j=0}^N v_j \frac{(t^2 - \tau^2)_+^{j - \frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(j - \frac{n-3}{2}\right)} + R_N,$$

где остаточный член  $R_N$  имеет столько же непрерывных производных, сколько их имеет первый отброшенный член.

рпп упругости), ни для уравнений высших порядков. Разложение Адамара (7) дает (по-видимому, тоже уникальную) возможность выписать в простой и общей форме полный асимптотический ряд для спектральной функции эллиптического оператора второго порядка. К сожалению, как разложение Адамара, так и асимптотические формулы для спектральной функции относятся лишь к случаю строго внутренней подобласти. Асимптотические формулы для спектральной функции, справедливые вблизи границы области, требуют несравненно более громоздкой аналитической техники склеивания формальных асимптотических разложений (см. [9]). Как показано в работе [1],

$$\frac{d\theta(x, y, k)}{dk} \sim \frac{-ik}{\pi} u(x, y, k) + \frac{ik}{\pi} u(x, y, -k) \quad (9)$$

(см. [1, формула (2.36)]). В том случае, когда точка  $y$  находится в строго внутренней подобласти области  $\Omega$ , под  $u(x, y, k)$  следует понимать ряд

$$u(x, y, k) \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x, y) f_{\frac{n-2}{2}+j}(k, \tau), \quad (10)$$

$$f_p(k, \tau) = i \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i p} \left(\frac{2\tau}{k}\right)^p H_p^{(1)}(k\tau);$$

здесь  $H_p^1$  — функция Ханкеля. Разложение (10) является формальным решением задачи о точечном источнике колебаний в неоднородной среде:  $Lu + k^2 \rho u = -\delta(x - y)$  (см. [5]). Формула (9) показывает, что асимптотика  $d\theta(x, y, k)/dk$  представляет собой решение задачи о фокусировке: второе слагаемое соответствует «волне», сходящейся в точку  $x = y$ , первое — «волне», расходящейся из этой точки. Их формул (9) и (10) вытекает следующее асимптотическое разложение:

$$\frac{d\theta(x, y, k)}{dk} \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x, y) g_{\frac{2-n}{2}+j}(k, \tau), \quad (11)$$

$$g_p(k, \tau) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\tau}{k}\right)^p J_{-p}(k\tau), \quad (12)$$

здесь  $J_{-p}$  — функция Бесселя.

Остаточный член

$$R_r(x, y, k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\theta(x, y, k)}{dk} - \sum_{j=0}^r v_j g_{\frac{2-n}{2}+j}(k, \tau)$$

мал в среднем (см. [1, формула (2.38)])

$$\int_0^k \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)^r R_r(x, y, v) dv \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^k \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)^r dv \left[ \theta(x, y, v) - \int_0^v \sum_{j=0}^r v_j g_{\frac{2-n}{2}+j} dv \right] = O(k^{n-r-1}). \quad (13)$$

Интересно, что интегралы от  $g_p(v, \tau)$  легко вычисляются, ибо

$$g_p(k, \tau) = \frac{\partial}{\partial k} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\tau}{k}\right)^{p-1} J_{1-p}(k\tau) \right]. \quad (14)$$

При  $r = 0$  соотношения (13) и (14) дают известную формулу

$$\theta(x, y, k) = W(x, y) \frac{\rho^{\frac{n-2}{2}}(y)}{\sqrt{\det(g^{ij})}} \left(\frac{k}{2\pi\tau}\right)^{n/2} J_{n/2}(k\tau) + O(k^{n-1}). \quad (15)$$

Здесь  $W(x, y)$  — гладкая функция, равная единице при  $x = y$ .

Ленинградское отделение Математического  
института АН СССР

Поступило  
18.VII.1977

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б а б и ч В. М., Л е в и т а н Б. М., Задача о фокусировке и асимптотика спектральной функции оператора Лапласа — Бельтрами, Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 78 (1978), 3—19.
- [2] Л е в и т а н Б. М., Асимптотическое поведение спектральной функции эллиптического уравнения, Успехи матем. наук., 26, № 6 (1971), 151—212.
- [3] А л и м о в Ш. А., И л ь и н В. А., Н и к и ш и н Е. М., Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, Успехи матем. наук, 31, № 1 (1977), 107—130.
- [4] С у в о р ч е н к о в а Г. А., Применение метода Соболева к изучению связи спектра эллиптического дифференциального оператора второго порядка и геометрий многообразия без края, Диф. уравнения, 11, № 2 (1975), 358—365.
- [5] Б а б и ч В. М., О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5, № 5 (1965), 949—911.
- [6] А д а м а р Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М., «Наука», 1978

- [7] Курант Р., Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1968.
- [8] Bureau F. J., Asymptotic Representation of the spectral function of self adjoint elliptic operators of the second order with variable coefficients II, J. Math. Analysis Appl., 4 (1962), 181—192.
- [9] Баби́ч В. М., Левита́н Б. М., Задача о фокусировке и асимптотика спектральной функции оператора Лапласа — Бельтрами, Докл. АН СССР, 230, № 5 (1976), 1017—1020.