В.А.Лифшиц

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ ЗАПОЛНЕНИЙ *)

Существуют две различные точки зрения на перспективы исследований в области конструктивного анализа. Согласно одной из них, конструктивный анализ может рассчитывать в будущем только на роль д о п о л н е н и я к обычному (классическому) анализу, на роль теории вычислимых функций, дополняющей общую теорию функций. Согласно другой точке зрения, конструктивный анализ сможет в будущем с пользой з а м е н и т ь классический анализ в приложениях к естествознанию и технике (см. раздел I.2 работы [I], Приложение к работе [2] , пп.2,4 тезисов доклада [3]). По мнению автора, вопросы, рассмотренные в настоящей заметке, могут представить интерес именно со второй из этих двух точек зрения.

В настоящее время некоторые обстоятельства еще мешают сделать конструктивный анализ легко доступным тем лицам, которые не изучали классического анализа. Одно из этих обстоятельств состоит в следующем. Классический анализ нередко служит важным источником эвристических соображений для математиков, изучающих конструктивный анализ и ведущих исследования в этой области. Как известно, математик, развивающий ту или иную конструктивную теорию, как правило, в значительной степени использует в качестве ориентира понятия и теоремы соответствующей классической теории. С другой стороны, как показывает опыт исследований в области конструктивного анализа, в некоторых случаях удобно интуитивно представлять себе систему $\mathcal{R}$ конструктивных вещественных чисел как бы "вложенной в систему классических вещественных чисел", систему $\mathcal{C}$ конструк-

*) Результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике I октября 1970 г.

тивных комплексных чисел - "вложенной в систему классических комплексных чисел", и т.п.

Исследование, результаты которого изложены ниже, имело целью найти путь, позволяющий заменить использование такого рода интуитивных представлений строгими рассмотрениями, допустимыми в конструктивной математике. Мы опишем метод исследования отображений конструктивных метрических пространств (в частности, функций вещественной и комплексной переменной) в рамках конструктивного анализа, основанный на рассмотрении расширений этих пространств, которые, если так можно выразиться, обладают в отношении указанных пространств в том или ином отношении теми же свойствами, что и их классические пополнения. Этим расширениям (которые мы будем называть з а п о л н е н и я м и) в ряде случаев можно придать некоторый геометрический смысл (см. п.3), так что исследование свойств функций, связанных с понятием заполнения, может представить интерес и само по себе. Необходимо отметить, что еще в книге Г.Вейля "Континуум" рассматривались конструктивно определенные системы математических объектов, сходные с заполнениями пространства вещественных чисел; мысль о целесообразности рассмотрения такого рода систем высказывалась также Э.Бишопом в конце книги[4].

В формулируемых ниже определениях и теоремах используются некоторые понятия конструктивной теории множеств, конструктивной теории топологических пространств и конструктивной теории равномерных пространств. В литературе имеются изложения основ этих теорий (определение конструктивного множества приводится в § 7 работы Н.А.Шанина [5], топологические и равномерные пространства рассматривались Фан Динь Зиеу в [6], [7] в связи с исследованиями по конструктивному функциональному анализу, а также Э.Бишопом в гл. 3 книги[4]). Однако эти изложения по разным причинам неудобны для наших целей; с другой стороны, из-за недостатка места мы не можем привести здесь все необходимые определения в нужной форме [ж)]. Поэтому мы лишь отметим ниже (п.I) основные отличия этих теорий от их классических прототипов; читатель сможет составить себе представление об идеях предлагаемого метода, руководствуясь опытом обращения с соответствующими классическими понятиями (см., например,[8]) и пониманием общего характера особенностей конструктивной математики.

I. В теории топологических пространств различаются *точка прикосновения* множества A в топологическом пространстве X (такая точка $x \in X$, что всякая окрестность точки x пересекается с A) и *точка, неотделимая от* A (такая точка $x \in X$, что не существует окрестности точки x, пересечение которой с A было бы пусто). Множество $\overline{A}$ всех точек прикосновения множества A мы будем называть *замыканием* множества A; множество $\overset{\vdash\!\dashv}{A}$ всех точек, неотделимых от A, будем называть *полным замыканием* множества A. Если $\overline{A}=X$, мы говорим, что A *всюду плотно*; если $\overset{\vdash\!\dashv}{A}=X$, мы говорим, что A *нигде не имеет пробелов*.

О равномерном пространстве X будем говорить, что X *имеет непроблемную равномерную структуру*, если для каждого окружения $\mathcal{U}$ пространства X существует окружение $\mathcal{V}$ этого пространства, такое что для любых точек $x, y \in X$, если неверно, что $\langle x,y \rangle \notin \mathcal{U}$, то $\langle x,y \rangle \in \mathcal{V}$. (Это условие несколько слабее, чем требование, чтобы каждое окружение $\mathcal{U}$ было непроблемным множеством, т.е. чтобы для утверждений типа $\langle x, y \rangle \in \mathcal{U}$ было допустимо доказательство "от противного". [жж)] Все метризуемые пространства удовлетворяют указанному условию).

ж) В подробном изложении, которое в настоящее время готовится к печати, содержится детальное построение основ общей топологии в рамках конструктивной математики. Определения, касающиеся метрических пространств, множеств на плоскости и функций комплексной переменной, см. в [4] .

жж) Термин "непроблемное множество" был введен в статье И.Д. Заславского [9] , где он употребляется в несколько ином смысле.

2. З а п о л н е н и е м метрического пространства X мы будем называть произвольное отделимое[*)] равномерное пространство X^* с непроблемной структурой, такое что (а) $X \subset X^*$, (б) равномерная структура, индуцированная в X равномерной структурой пространства X^*, совпадает с равномерной структурой, индуцированной метрикой пространства X, (б) X нигде не имеет пробелов в пространстве X^*. Каждое метрическое пространство можно рассматривать как свое собственное (т р и в и а л ь н о е) заполнение; другим примером заполнения произвольного метрического пространства X может служить его п о п о л н е н и е $\tilde{X}$. Если X^* – заполнение метрического пространства X, то произвольное подпространство пространства X^*, содержащее X, также есть заполнение пространства X; мы будем называть его п о д з а п о л н е н и е м заполнения X^*. Если X^* – заполнение метрического пространства X^*, $A \subset X$, то полное замыкание A в X^* есть заполнение подпространства A пространства X; об этом заполнении мы будем говорить, что оно и н д у ц и р о в а н о заполнением X^*.

С точки зрения приложений представляют интерес нетривиальные $(X \neq X^*)$ заполнения полных сепарабельных метрических пространств[**)]. Можно доказать, что (1) всякое нетривиальное заполнение полного сепарабельного метрического пространства неметризуемо, и (2) полное сепарабельное метрическое пространство не может быть всюду плотным в своем нетривиальном заполнении.

Укажем один общий способ построения заполнения (вообще говоря, нетривиального) произвольного метрического пространства X. Последовательность точек $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства X будем называть B-ф у н д а м е н т а л ь н о й, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное k, такое что для любых $n_1 < \ldots < n_k$

[*)] Мы называем топологическое пространство о т д е л и м ы м, если всякие две его точки, которые не могут быть заключены в непересекающиеся окрестности, совпадают. (Это как раз то условие, которое нужно для доказательства единственности предела).

[**)] Существование таких заполнений есть обстоятельство, не имеющее прямого аналога в классической математике.

$$\min_{1 \leq i < k} \rho(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) < \varepsilon .$$

(Это условие, сформулированное Э.Бишопом [4] , стр.109, несколько слабее, чем условие Коши[ж)] : всякая монотонная ограниченная последовательность вещественных чисел является B-фундаментальной). Множество $B(X)$ всех B -фундаментальных последовательностей[жж)] с естественным образом определенными равенством и равномерной структурой становится заполнением пространства X , если отождествить каждую точку $x \in X$ с последовательностью $x, x, \ldots$.

Заметим, что каковы бы ни были метрические пространства X , Y , каждое равномерно непрерывное отображение X в Y может быть продолжено до равномерно непрерывного отображения $B(X)$ в $B(Y)$.

3. Каждое заполнение произвольного метрического пространства X обладает фундаментальной системой окружений, которая более удобна, чем другие, поскольку она весьма просто связана с метрикой пространства X . Пусть X^* - заполнение пространства $X, \varepsilon > 0$; посредством F_ε обозначим множество всех пар $\langle \xi, \xi' \rangle$ точек пространства X^* , таких что существует вещественное $\varepsilon_1 > 0$, окрестность u точки ξ и окрестность u' точки ξ' , такие что (а) $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и (б) каковы бы ни были точки $x \in X \cap u$, $x' \in X \cap u'$, имеет место неравенство $\rho(x, x') < \varepsilon_1$. Можно показать, что множества F_ε образуют фундаментальную систему окружений пространства X^* .

Для произвольных точек $\xi, \xi' \in X^*$ и произвольного $\varepsilon > 0$ мы будем писать

$$\rho(\xi, \xi') \prec \varepsilon \qquad \text{и} \qquad \rho(\xi, \xi') \succcurlyeq \varepsilon$$

вместо, соответственно,

$$\langle \xi, \xi' \rangle \in F_\varepsilon \qquad \text{и} \qquad \langle \xi, \xi' \rangle \notin F_\varepsilon$$

ж) Классически оно эквивалентно условию Коши.

жж) Подразумевается, что элементами множества $B(X)$ являются п а р ы , состоящие из B -фундаментальной последовательности и алгорифма, перерабатывающего каждое $\varepsilon > 0$ в соответствующее k (ср. замечания перед предложением 4 и определением 7 из [4] , гл. 2).

(Выражению $\rho(\xi,\xi')$ самому по себе мы не придаем никакого смысла). Если $\xi,\xi'\in X$, то $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\rho(\xi,\xi')<\varepsilon$. Хотя символы ρ и $\prec$ в записи $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon$ нельзя понимать как обозначения метрики и отношения порядка, свойства выражений такого типа во многом напоминают свойства обыкновенных неравенств (с чем и связано удобство предлагаемой записи). В самом деле, (а) если $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon$, $\varepsilon<\varepsilon'$, то $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon'$; (б) если $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon$, то существует такое $\varepsilon'>0$, что $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon'$ и $\varepsilon'<\varepsilon$; (в) если $\varepsilon'<\varepsilon$ и неверно, что $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon'$, то $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon$; (г) $\rho(\xi,\xi)\prec\varepsilon$; (д) если для любого $\varepsilon>0$ $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon$, то $\xi=\xi'$; (е) $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\rho(\xi',\xi)\prec\varepsilon$; (ж) если $\rho(\xi,\xi')\prec\varepsilon_1$, $\rho(\xi',\xi'')\prec\varepsilon_2$, то $\rho(\xi,\xi'')\prec\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

Если открытый шар S в метрическом пространстве X и точка $\xi\in X^*$ таковы, что $\rho(x,\xi)\prec r$ (x – центр, r – радиус шара S), будем говорить, что шар S п о к р ы в а е т точку

Пусть пространство X есть подпространство евклидова пространства размерности $\leqslant 3$. Тогда с пространством X мы можем во многих случаях связать наглядные геометрические образы, представляя себе точки пространства X как "точки" реального пространства. В этих случаях можно связывать аналогичные наглядные представления и с произвольным заполнением пространства X, представляя себе точку ξ заполнения как "точку" реального пространства, расположенную внутри тех "шаров" в реальном пространстве, которые соответствуют открытым шарам пространства X, покрывающим ξ. В частности, заполнения подпространств пространства R вещественных чисел удобно представлять себе как прямолинейно расположенные множества точек; в подтверждение этого заметим, что каждое такое заполнение может быть естественным образом упорядочено. Пусть, например, X есть отрезок $[0,1]$. Заполнение $B(X)$ пространства X можно представлять себе как "реальный отрезок"; тогда X нужно представлять себе как "реальный отрезок с дырками", наподобие того, как обычно представляют себе множество всех рациональных чисел отрезка $[0.1]$. Использование такого рода представлений не исключает, конечно, возможности представлять себе пространство X

как "реальный отрезок без дырок" в тех случаях, когда мы не нуждается в использовании заполнений.ж)

4. С точки зрения приложений представляют интерес лишь такие заполнения метрических пространств, которые в каком-то смысле "содержат достаточно много элементов". Этому выражению можно придавать разный смысл; в соответствии с этим можно было бы говорить о "разных типах" приложений метода заполнений. Здесь мы ограничиваемся приложениями одного типа, основанного на определяемом ниже понятии б о р е л е в а з а п о л н е н и я . Это понятие ориентировано на конструктивизацию некоторых рассуждений из классического анализа, основанных на возможности выделения конечного подпокрытия из произвольного открытого покрытия компактного пространства (точнее, таких рассуждений, в которых рассматривается некоторое семейство открытых множеств, и показывается, что никакая его конечная часть не является покрытием пространства, из чего делается вывод о существовании точки, не принадлежащей объединению рассматриваемого семейства жж)).

О множестве A в метрическом пространстве X и множестве σ открытых шаров этого пространства мы будем говорить, что A п о г р у ж е н о в σ , если A вполне содержится жжж) в объединении конечного числа шаров из σ . Заполнение X^* метрического пространства X будем называть б о р е л е в ы м , если, каковы бы ни были вполне ограниченное множество $A\subset X$ и счетное жжжж) множество

ж) Возникающую здесь ситуацию интересно сравнить с ситуацией, возникающей при использовании методов нестандартного анализа А.Робинсона [10].

жж) Примерами рассуждений такого типа могут служить доказательства достижимости супремума непрерывной функции на компактном пространстве и существования точки сгущения у бесконечной последовательности точек компактного пространства.

жжж) Говорят, что множество A в п о л н е с о д е р ж и т с я в множестве B , если существует $\varepsilon>0$,такое что ε -окрестность множества A содержится в B .

жжжж) Множество мы называем с ч е т н ы м , если оно является объединением некоторой последовательности своих конечных подмножеств.

жество σ открытых шаров пространства X, такие что A не погружено в σ и существует точка $\xi \in X^*$, неотделимая от A и не покрытая ни одним шаром из σ.

Если некоторое подзаполнение заполнения X^* борелево, то и X^* борелево. Заполнение, индуцированное борелевым заполнением, борелево.

<u>Основная теорема</u>. Каково бы ни было метрическое пространство X, заполнение $B(X)$ борелево.

5. Следующее утверждение можно рассматривать как конструктивный аналог теоремы, утверждающей, что непрерывная вещественная функция на компактном пространстве принимает значение, равное ее супремуму.

<u>Теорема I</u>. Если f – равномерно непрерывная вщественная функция на вполне ограниченном метрическом пространстве X, X^* – борелево заполнение пространства X, то существует точка $\xi \in X^*$, такая что

$$\lim_{x \to \xi,\, x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} f(x) \tag{I}$$

Другим аналогом упомянутой теоремы классического анализа является следствие теоремы I, которое легко вывести из нее с помощью Основной теоремы:

<u>Следствие</u>. Какова бы ни была равномерно непрерывная вещественная функция f на вполне ограниченном метрическом пространстве X, существует точка $\xi \in B(X)$, такая что

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in X} f(x),$$

где f^* – продолжение функции f до равномерно непрерывного отображения $B(X)$ в $B(R)$.

Известно, что равномерно непрерывная вещественная функция, определенная на сегменте, может не принимать значения, равного ее супремуму – [9], теорема 5.5. Таким образом, точка ξ из теоремы I, вообще говоря, не принадлежит пространству X. Формулируемые ниже теоремы, конструктивизирующие и обобщающие на случай произвольного компактного метрического пространства результаты Д. Лакомба [II], показывают, что при определенных условиях супремум достигается, и функции, не достигающие супремума, являются "экзотическими" и в других отношениях.

Теорема 2. Если f - равномерно непрерывная вещественная функция на компактном метрическом пространстве X, X^* - борелево заполнение пространства X, и точка $\xi \in X^*$, удовлетворяющая условию (I), единственна, то $\xi \in X$.

Теорема 3. Если f - равномерно непрерывная вещественная функция на компактном метрическом пространстве X, не принимающая значения $\sup_{x \in X} f(x)$, то каково бы ни было борелево заполнение X^* пространства X, множество всех точек $\xi \in X^*$, для которых имеет место (I), есть непустое замкнутое множество, не содержащее ни внутренних, ни изолированных точек.

Следующее достаточное условие достижимости супремума формулируется без помощи понятия заполнения, но может быть легко доказано с помощью теорем I,2 и Основной теоремы. (Оно, вероятно, может быть доказано и непосредственно, но доказательство с помощью заполнений кажется более геометричным). Равномерно непрерывную вещественную функцию f на вполне ограниченном метрическом пространстве будем называть функцией с размытым супремумом, если существует $\varepsilon > 0$, такое что множество

$$\{ x' \in X \mid f(x') > \sup_{x \in X} f(x) - \delta \}$$

не является ε -малым*) ни при каком $\delta > 0$.

<u>Теорема 4.</u> Всякая равномерно непрерывная вещественная функция f на компактном метрическом пространстве X, не являющаяся функцией с размытым супремумом, принимает на X значение $\sup_{x \in X} f(x)$.

6. Рассмотрим теперь некоторые приложения метода заполнений к теории функций комплексной переменной. Э.Бишопу принадлежит теорема ([4], гл. 5, теорема 7), позволяющая при определенных условиях утверждать конечность множества нулей функции f, дифференцируемой на компактном множестве K (и даже указать для нее разложение

$$f(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n) g(z), \tag{2}$$

где g - функция, дифференцируемая на K и такая, что $\inf_{z \in K} |g(z)| > 0$). С помощью этой теоремы Э.Бишоп легко доказывает, например, "основную теорему алгебры". Она не позволяет, однако, получить ответ на многие простые вопросы, касающиеся нулей дифференцируемых функций (например, на такой вопрос: существует ли не равная тождественно 0 целая функция, имеющая бесконечно много нулей в ограниченной части плоскости ?). С помощью Основной теоремы можно доказать, что если функция f определена и дифференцируема на связном открытом множестве U, и множество нулей функции f на компактном множестве K, вполне содержащемся в U, не является конечным, то f тождественно равна 0 на U. Из этого утверждения и упомянутой выше теоремы Э.Бишопа о нулях дифференцируемой функции можно вывести следующую теорему.

<u>Теорема 5.</u> Если функция f комплексной переменной, определенная и дифференцируемая

---

*) Множество A в метрическом пространстве мы называем ε -малым, если для любых точек $x, y \in A$ имеет место неравенство $\rho(x, y) < \varepsilon$.

ренцируемая на связном открытом множестве $\mathcal{U}$, не равна тождественно 0 на компактном множестве K, вполне содержащемся в $\mathcal{U}$, то существуют точки $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{U}$ (возможно, $n=0$) и функция g, определенная и дифференцируемая на $\mathcal{U}$, такие что для всех $z \in \mathcal{U}$ имеет место равенство (2) и $\inf\limits_{z \in K} |g(z)| > 0$.

Из этой теоремы нетрудно вывести, что если целая функция не равна тождественно 0, то ее нули могут быть расположены в последовательность, стремящуюся к ∞.

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 6. Если функция f определена и дифференцируема в некоторой ε-окрестности компактного множества K и не обращается на K в 0, то

$$\inf_{z \in K} |f(z)| > 0.$$

7. В дополнение к сказанному выше о приложениях понятия заполнения можно высказать предположение, что знакомство с идеей заполнения (хотя и не в самой общей форме и, возможно, без точных определений) может быть полезно уже на первых шагах изучения математического анализа в конструктивном варианте. В частности, понимание того, что вещественная прямая R может быть расширена до пространств вроде $B(R)$, по мнению автора, способствует уяснению геометрического смысла таких фактов, как опровержимость конструктивных аналогов теоремы о сходимости ограниченной монотонной последовательности, леммы Бореля о покрытиях, теоремы Гейне о равномерной непрерывности функций, непрерывных в каждой точке

сегмента, и пр.[ж)]

В заключение автор выражает благодарность участникам Ленинградского семинара по конструктивной математике за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цейтин Г.С. Исследования по конструктивному анализу (конструктивные вещественные числа и точечно-определенные функции). Автореферат докт.дисс., Л., 1968.
2. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1962, 67, 15-294.
3. Цейтин Г.С., Заславский И.Д., Шанин Н.А. Особенности конструктивного математического анализа. Международный конгресс математиков (Москва, 1966), Тезисы докладов по приглашению, М., 1966, 171-176.
4. Bischop E. Foundations of constructive analysis, N.Y., 1967.
5. Шанин Н.А. О конструктивном понимании математических суждений. "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1958, 52, 226-311.
6. Фань Динь Зиеу. Конструктивные локально выпуклые линейные топологические пространства. "Докл. АН СССР", 1965, 162,4, 766-769.
7. Фан Динь Зиеу. О замкнутых и открытых множествах в конструктивных топологических пространствах. "Труды Матем.ин-та АН СССР", 1967, 93, 250-256.
8. Bourbaki N. Topologie generale. Chapitre 1. Structures topologiques. Chapitre 2. Structures uniformes. P., 1961 [Русск. перев.: Н.Бурбаки. Общая топология. Основн. структуры, М, 1968.

ж) В связи с этим нужно еще раз подчеркнуть следующее: автор исходит из предположения о том, что в будущем теория функций в конструктивном варианте будет изучаться лицами незнакомыми с ее классическим изложением. А тогда использование наглядных представлений, связанных с "погружением" пространства R в его "классическое пополнение", станет невозможным.

9. Заславский И.Д. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. "Труды Матем.ин-та АН СССР", I967, 67, 385-457.

IO. Robinson A. Non-standard analysis. North-Holland Publ.Comp., I965.

II. Lacombe D. Les ensembles récursivement ouvert ou fermés, et leurs applications à l'analyse récursive. "Comptes rendus Acad. sci.", I957, 245, I3, I040-I043.