А. М. Дуллиев, Один частный случай метода последовательных приближений для решения автономных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 408–410

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 408–410

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.928

ОДИН ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

© 2005 г. А. М. Дуллиев

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$d\xi/dt = \varepsilon\Xi_1(\xi) + \varepsilon^2(\Xi_2^*(\xi) + \Xi_2^{**}(\xi)), \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, ξ – точка n-мерного евклидова пространства $\mathbf{E}^n$, $\Xi_1(\xi)$, $\Xi_2^*(\xi)$, $\Xi_2^{**}(\xi)$ – вещественные векторные функции, действующие из $\mathbf{E}^n$ в $\mathbf{E}^n$. Предположим, что начальное условие можно представить в виде $\xi(0) = \xi_{01} + \varepsilon\xi_{02}$.

Такие уравнения могут возникать, например, в результате использования методов осреднения [1–3]. Как правило, для решения систем подобного вида используется метод последовательных приближений по степеням малого параметра ε [1, 4–8], в котором решение, гарантирующее погрешность порядка $o(\varepsilon)$ на интервале $\Delta t \sim 1/\varepsilon$, ищется в виде $\xi = \xi_1 + \varepsilon\xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 определяются из уравнений

$$d\xi_1/dt = \varepsilon\Xi_1(\xi_1), \tag{2}$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\partial\Xi_1(\xi_1(t))}{\partial\xi_1}\xi_2 + \Xi_2^*(\xi_1(t)) + \Xi_2^{**}(\xi_1(t))\right) \tag{3}$$

с соответствующими начальными условиями $\xi_1(0) = \xi_{01}$ и $\xi_2(0) = \xi_{02}$.

Однако на практике часто возникает такая ситуация, что удается найти общее решение системы

$$d\eta/dt = \varepsilon\Xi_1(\eta) + \varepsilon^2\Xi_2^*(\eta). \tag{4}$$

Тогда, как показано ниже, если в линейной неоднородной системе дифференциальных уравнений первого порядка (3) $\xi_1(t)$ заменить на $\eta(t)$ – решение системы (4), а также исключить в ней второе слагаемое, стоящее в скобках, то при определенных условиях погрешность в определении решения уравнения (1) будет также иметь порядок $o(\varepsilon)$.

2. Описание и обоснование метода. Пусть Ω – ограниченная выпуклая область пространства $\mathbf{E}^n$, в которой определены функции $\Xi_1(\xi)$, $\Xi_2^*(\xi)$, $\Xi_2^{**}(\xi)$ и содержится начальная точка $\xi(0)$. В этой области функция Ξ_1 имеет сильную производную, которая удовлетворяет по ξ условию Липшица с постоянной C_1, а функции Ξ_2^*, Ξ_2^{**} удовлетворяют условию Липшица с общей постоянной C_2.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\partial\Xi_1(\eta(t))}{\partial\eta}\zeta + \Xi_2^{**}(\eta(t))\right). \tag{5}$$

Потребуем, чтобы кривая $\eta(t) + \varepsilon\zeta(t)$, где $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ – решения систем (4) и (5) с начальными условиями $\eta(0) = \xi_{01}$ и $\zeta(0) = \xi_{02}$ соответственно, в течение времени Δt $(0 \le t \le K/\varepsilon)$ оставалась вместе со своей ρ-окрестностью в области Ω. Тогда в силу сделанных предположений справедливо следующее

Утверждение. *Для любого $K > 0$ существует такое значение ε_0, что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для всех $t \in [0, K/\varepsilon]$ выполняется неравенство $\|\xi(t,\varepsilon) - \eta(t,\varepsilon) - \varepsilon\zeta(t,\varepsilon)\| \le o(\varepsilon)$ и решение системы (1) $\xi(t,\varepsilon)$ не выходит из области Ω, причем $\eta(0,\varepsilon) = \xi_{01}$, $\zeta(0,\varepsilon) = \xi_{02}$.*

Доказательство. Введем медленное время $\tau = \varepsilon t$. Изменению t от 0 до K/ε соответствует изменение τ от 0 до K. Обозначим производную по медленному времени точкой, тогда исходные уравнения (1), (4), (5) запишутся соответственно в виде

$$\dot\xi = \Xi_1(\xi) + \varepsilon(\Xi_2^*(\xi) + \Xi_2^{**}(\xi)), \quad \dot\eta = \Xi_1(\eta) + \varepsilon\Xi_2^*(\eta), \quad \dot\zeta = \frac{\partial\Xi_1(\eta(\tau))}{\partial\eta}\zeta + \Xi_2^{**}(\eta(\tau)).$$

Пусть $\|x\| = [\sum_{i=1}^n x_i^2]^{1/2}$ – норма точки x из $\mathbf{E}^n$, $\|A\|_1 = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$ – норма линейного оператора в пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{E}^n, \mathbf{E}^n)$ всех линейных непрерывных операторов, преобразующих $\mathbf{E}^n$ в себя.

Сначала оценим величину $\|\zeta\|$. Поскольку функции Ξ_1', Ξ_2^{**} удовлетворяют условию Липшица (здесь и далее знаком штрих обозначается сильная производная), то существуют такие вещественные $M_1, M_2 \ge 0$, что в области Ω выполняются неравенства $\|\Xi_1'\|_1 \le M_1$, $\|\Xi_2^{**}\| \le M_2$. Тогда $\|\dot\zeta\| \le$ $\le M_1\|\zeta\| + M_2$. Решая уравнение $\dot x = M_1 x + M_2$ с начальным условием $x(0) = \zeta(0) = \zeta_0$, получаем оценку $\|\zeta\| \le \|\zeta_0\| e^{M_1\tau} + \int_0^\tau M_2 e^{M_1(\tau-\bar\tau)}\,d\bar\tau$, которая на интервале от 0 до K принимает вид

$$\|\zeta\| \le (\|\zeta_0\| + (M_2/M_1)K)e^{M_1K} = M_3.$$

Далее выберем вместо ξ новую переменную $\theta = \xi - \varepsilon\zeta$. Дифференцируя ее по τ, получаем

$$\dot\theta = \Xi_1(\theta) + \varepsilon\Xi_2^*(\theta) + \varepsilon[\Xi_2^*(\xi) - \Xi_2^*(\theta) + \Xi_2^{**}(\xi) - \Xi_2^{**}(\eta)] - \varepsilon\Xi_1'(\eta)\zeta + \Xi_1(\xi) - \Xi_1(\theta).$$

Рассмотрим разность

$$\dot\theta - \dot\eta = \Xi_1(\theta) - \Xi_1(\eta) + \varepsilon(\Xi_2^*(\theta) - \Xi_2^*(\eta)) + \varepsilon[\Xi_2^*(\xi) - \Xi_2^*(\theta) + \Xi_2^{**}(\xi) - \Xi_2^{**}(\eta)] - \varepsilon\Xi_1'(\eta)\zeta + \Xi_1(\xi) - \Xi_1(\theta). \quad (6)$$

Из условия утверждения вытекает, что $\Xi_1(\xi)$ можно представить в виде $\Xi_1(\xi) = \Xi_1(\theta) + \Xi_1'(\theta)\varepsilon\zeta + o(\varepsilon\zeta)$, где $\|o(\varepsilon\zeta)\|/\|\varepsilon\zeta\| \to 0$ при $\|\varepsilon\zeta\| \to 0$. Следовательно, равенство (6) можно записать в виде

$$\dot\theta - \dot\eta = \Xi_1(\theta) - \Xi_1(\eta) + \varepsilon(\Xi_2^*(\theta) - \Xi_2^*(\eta)) + \varepsilon[\Xi_2^*(\xi) - \Xi_2^*(\theta) + \Xi_2^{**}(\xi) - \Xi_2^{**}(\eta)] - \varepsilon(\Xi_1'(\theta) - \Xi_1'(\eta))\zeta + o(\varepsilon\zeta). \quad (7)$$

Очевидно, что для доказательства утверждения достаточно оценить величину $\|\theta - \eta\|$. Оценим правую часть равенства (7), учитывая липшицевость функций Ξ_1', Ξ_2^{**}.

Согласно сделанным предположениям, в области Ω к функции Ξ_1 можно применить формулу Лагранжа:

$$\|\Xi_1(\theta) - \Xi_1(\eta)\| \le \sup_{0\le t\le 1} \|\Xi_1'(\theta + t(\eta - \theta))\|\,\|\theta - \eta\| = C_3\|\theta - \eta\|. \quad (8)$$

Аналогично получаем оценки

$$\|\Xi_2^*(\theta) - \Xi_2^*(\eta)\| \le C_2\|\theta - \eta\|, \quad (9)$$

$$\|(\Xi_1'(\theta) - \Xi_1'(\eta))\zeta\| \le \|\Xi_1'(\theta) - \Xi_1'(\eta)\|_1\,\|\zeta\| \le C_1\|\theta - \eta\|\,\|\zeta\| \le C_1M_3\|\theta - \eta\|, \quad (10)$$

$$\|\Xi_2^{**}(\xi) - \Xi_2^{**}(\eta)\| \le C_2\|\xi - \eta\|.$$

Как следует из метода последовательных приближений [6, 7], в силу ограниченности функции $\Xi_2^{**}(\xi)$ существует такое $\varkappa = \mathrm{const} > 0$, что для любого $K > 0$ найдется ε_1 такое, что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ выполняется неравенство $\|\xi - \eta\| \le \varkappa\varepsilon$ на интервале от 0 до K. Построим функцию $\alpha_1(\varepsilon) =$ $= C_2e^{qK}\varkappa\varepsilon/q$, где $q = (C_3 + a(C_2 + C_1M_3)) > 0$, $a > 0$ – некоторая постоянная, и выберем $\varepsilon_1 \le a$ таким образом, чтобы для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ имела место оценка $\varepsilon\alpha_1(\varepsilon) \le \rho/3$. Тогда

$$\|\Xi_2^{**}(\xi) - \Xi_2^{**}(\eta)\| \le \alpha_1(\varepsilon)q/e^{qK}. \quad (11)$$

Найдется такая функция $\tilde\alpha_2(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ и такое $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, что для любых $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ справедливо неравенство $\|o(\varepsilon\zeta)\| < \tilde\alpha_2(\varepsilon)\varepsilon\|\zeta\| \le \tilde\alpha_2(\varepsilon)\varepsilon M_3$. Построив функцию $\alpha_2(\varepsilon) = M_3e^{qK}\tilde\alpha_2(\varepsilon)/q$ и взяв ε_2 такое, что $\varepsilon\alpha_2(\varepsilon) \le \rho/3$, получим оценку

$$o(\varepsilon\|\zeta\|) \le \varepsilon\alpha_2(\varepsilon)q/e^{qK}. \quad (12)$$

Имеем $\|\Xi_2^*(\xi) - \Xi_2^*(\theta)\| \le C_2\|\xi - \theta\| = C_2\varepsilon\|\zeta\| \le \varepsilon C_2M_3$. Введем функцию $\alpha_3(\varepsilon) = \varepsilon C_2M_3e^{qK}/q$ и зафиксируем $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$ так, чтобы $\varepsilon\alpha_3(\varepsilon) \le \rho/3$ при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_3$, тогда

$$\|\Xi_2^*(\xi) - \Xi_2^*(\theta)\| \le \alpha_3(\varepsilon)q/e^{qK}. \quad (13)$$

Из перечисленных оценок (8)–(13), учитывая, что $\varepsilon \le a$, вытекает неравенство $\|\dot\theta - \dot\eta\| \le q\|\theta - \eta\| + r$, где $r = \varepsilon\omega(\varepsilon)q/e^{qK}$, $\omega(\varepsilon) = \alpha_1(\varepsilon) + \alpha_2(\varepsilon) + \alpha_3(\varepsilon)$, $\omega(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$. Поскольку $\theta(0) - \eta(0) = 0$, то $\|\theta - \eta\| \le$ $\le \int_0^\tau re^{q(\tau-\bar\tau)}\,d\bar\tau$, откуда следует, что на интервале от 0 до K справедливы неравенства $\|\theta - \eta\| \le \varepsilon\omega(\varepsilon)$, $\|\theta - \eta\| \le \rho$, которые и завершают доказательство утверждения.

Замечание. Очевидно, в условии утверждения можно отказаться от предположения об ограниченности области Ω, но тогда нужно потребовать равномерной ограниченности функций Ξ_1, Ξ_1', Ξ_2^*, Ξ_2^{**}.

Несколько изменив условия утверждения, можно получить лучшее приближение. Предположим, что выполнены все условия утверждения и, сверх того, функция $\Xi_1(\xi)$ имеет в области Ω равномерно ограниченную вторую производную. Тогда в дополнение к полученному результату нетрудно убедиться в том, что найдется такое $L = \text{const} > 0$, при котором имеет место оценка

$$\|\xi(t,\varepsilon) - \eta(t,\varepsilon) - \varepsilon\zeta(t,\varepsilon)\| \le L\varepsilon^2.$$

3. Пример. Пусть задано уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon a + \varepsilon^2(\xi + \sin\xi)$$

с начальным условием $\xi(0) = 0$, где $\xi \in (\alpha;\beta) \subset \mathbf{R}$, $a = \text{const}$. Очевидно, что функции $\Xi_1(\xi) = a$, $\Xi_2^*(\xi) = \xi$, $\Xi_2^{**}(\xi) = \sin\xi$ удовлетворяют условию утверждения. Тогда уравнение (4) с начальным условием $\eta(0) = 0$ запишется в виде

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon a + \varepsilon^2\eta.$$

После того как найдено его решение $\eta(t) = (a/\varepsilon)(e^{\varepsilon^2 t} - 1)$, можно найти уравнение (5)

$$\frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon \sin\left[\frac{a}{\varepsilon}(e^{\varepsilon^2 t} - 1)\right], \quad \zeta(0) = 0,$$

решением которого будет функция

$$\zeta(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\mathrm{Si}\left(\frac{a}{\varepsilon}e^{\varepsilon^2 t}\right) - \mathrm{Si}\,\frac{a}{\varepsilon}\right)\cos\frac{a}{\varepsilon} - \left(\mathrm{Ci}\left(\frac{a}{\varepsilon}e^{\varepsilon^2 t}\right) - \mathrm{Ci}\,\frac{a}{\varepsilon}\right)\sin\frac{a}{\varepsilon}\right],$$

где $\mathrm{Si}(x)$ и $\mathrm{Ci}(x)$ – интегральные синус и косинус соответственно. В итоге приближенное решение исходного уравнения имеет вид

$$\xi \approx \frac{a}{\varepsilon}(e^{\varepsilon^2 t} - 1) + \left(\mathrm{Si}\left(\frac{a}{\varepsilon}e^{\varepsilon^2 t}\right) - \mathrm{Si}\,\frac{a}{\varepsilon}\right)\cos\frac{a}{\varepsilon} - \left(\mathrm{Ci}\left(\frac{a}{\varepsilon}e^{\varepsilon^2 t}\right) - \mathrm{Ci}\,\frac{a}{\varepsilon}\right)\sin\frac{a}{\varepsilon}.$$

Таким образом, предлагаемый в работе видоизмененный метод малого параметра позволяет вычислять приближенное решение системы (1) с погрешностью порядка $o(\varepsilon)$ на интервале $\Delta t \sim 1/\varepsilon$. Следует отметить, что остается открытым вопрос, насколько лучшее приближение будет давать этот метод по сравнению с методом, основанным на стандартной схеме (2), (3). Представляется перспективным использование данного метода в задаче исследования эволюции орбит искусственных спутников Земли, обусловленной 1) несимметричностью гравитационного поля Земли в предположении, что на изменение орбиты влияют возмущения порядков ε и ε^2; 2) действием притяжения Луны и Солнца, имеющим порядок ε^2.

Автор благодарен Г.В. Можаеву за многочисленные ценные советы и указания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., 1971.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.
3. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1981.
4. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1982.
5. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.
6. *Кузьмина Р.П.* Метод малого параметра в регулярно возмущенной задаче Коши. М., 1991.
7. *Кузьмина Р.П.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 2. С. 352–353.
8. *Горощёня А.Б., Веснина А.А.* Введение в асимптотические методы теории дифференциальных уравнений. Омск, 1975.

Казанский государственный технический
университет им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию
29.10.2003 г.