Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 1



# ЕВКЛИДОВЫ ПЛОСКОСТИ В ОТКРЫТЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

С. В. Буяло

Работа посвящена одному из аспектов связи между топологией и геометрией многообразий неположительной секционной кривизны. Основной результат состоит в следующем.

**Теорема.** *Допустим, что универсальное накрывающее $\tilde{M}$ трехмерного полного риманова многообразия $M$ с секционными кривизнами в промежутке $-1 \leqslant K \leqslant 0$ и радиусом инъективности* $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$ *содержит изометрично и вполне геодезически вложенную евклидову плоскость. Тогда множество $[T^2, M]$ гомотопических классов отображений тора $T^2$ в $M$ содержит такой класс, что для любой полной метрики неположительной секционной кривизны на $M$ существует изометрическое и вполне геодезическое в этой метрике погружение $T^2 \to M$ плоского тора $T^2$ из этого класса.*

## § 1. Введение

**1.1.** *Евклидовой плоскостью* в римановом многообразии $X$ будем называть вполне геодезическое подмногообразие $E \subset X$, изометрическое евклидовой плоскости $E^2$.

Хорошо известна теорема Адамара—Картана о том, что универсальное накрывающее полного риманова многообразия $M$ с неположительными секционными кривизнами диффеоморфно евклидову пространству. Отсюда, в частности, следует, что гомотопический тип многообразия $M$ определяется его фундаментальной группой $\pi_1(M)$. Кроме того, фундаментальная группа предъявляет весьма жесткие требования и к геометрии многообразия $M$. Так, например, если $M$ замкнуто, то $\pi_1(M)$ содержит изоморфную $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ подгруппу тогда и только тогда, когда $M$ содержит изометрично и вполне геодезически погруженный плоский тор $T^2$. В этом случае универсальное накрывающее $\tilde{M}$ содержит евклидову плоскость $E$. Возникает обратный вопрос: как отражается на топологии многообразия $M$ наличие евклидовой плоскости в его универсальном накрывающем? Он интересен также в связи со свойствами геодезического потока на $M$. Известно [1], что замкнутое многообразие $M$ неположительной секционной кривизны удовлетворяет аксиоме видимости (а значит, геодезический поток на $M$ обладает многими свойствами потока на многообразии отрицательной кривизны) тогда и только тогда, когда универсальное накрывающее $\tilde{M}$ не содержит евклидовых плоскостей.

В [2] доказаны следующие утверждения.

*Ключевые слова:* евклидова плоскость, периферический класс.

**Теорема А.** *Если универсальное накрывающее $\tilde{M}$ 3-мерного замкнутого риманова многообразия $M$ неположительной секционной кривизны содержит евклидову плоскость, то фундаментальная группа $\pi_1(M)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.*

**Следствие.** *В условиях теоремы А многообразие $M$ содержит изометрично и вполне геодезически погруженный плоский тор $T^2$.*

В настоящей работе эти результаты переносятся на случай открытых многообразий. При этом условие компактности заменяется формулируемым далее (см. п.1.2) условием на поведение радиуса инъективности многообразия $M$. Оказывается, что и в случае, когда $M$ некомпактно, наличие евклидовой плоскости в его универсальном накрывающем $\tilde{M}$ влечет существенные ограничения как на топологию $M$, так и на каждую полную метрику неположительной кривизны на $M$.

Заметим, что в некомпактном случае фундаментальная группа многообразия строго отрицательной секционной кривизны и конечного объема может содержать подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Однако такое многообразие, конечно, не допускает никаких изометрических и вполне геодезических погружений плоского тора $T^2$. Более того, утверждение, что многообразие $M$ неположительной кривизны содержит изометрично и вполне геодезически погруженный плоский тор, в некомпактном случае не столь содержательно, как в компактном: если $M$ компактно, то от таких торов нельзя избавиться, изменяя метрику (при условии $K \leqslant 0$ неположительности секционных кривизн), для некомпактных $M$ это уже не так даже в классе полных метрик.

**1.2.** Напомним, что в случае, когда секционные кривизны неположительны, значение функции радиуса инъективности $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad}\colon M \to \mathbf{R}$ многообразия $M$ в точки $p$ равно половине длины кратчайшей геодезической петли с вершиной в $p$. Говорят, что радиус инъективности риманова многообразия $M$ стремится к нулю (на бесконечности), $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{p \in M\colon \operatorname{Inj}\operatorname{Rad}(p) \geq \varepsilon\}$ компактно. Справедливы следующие импликации, ни одна из которых не обратима: $M$ компактно $\Rightarrow$ $M$ имеет конечный объем $\Rightarrow \operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$.

**1.3.** В настоящей работе теорема А и ее следствие (см. п.1.1) обобщаются следующим образом.

**1.3.1.Теорема.** *Допустим, что универсальное накрывающее $\tilde{M}$ трехмерного полного риманова многообразия $M$ с секционными кривизнами $K \in [-1, 0]$ и радиусом инъективности $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$ содержит евклидову плоскость. Тогда множество $[T^2, M]$ гомотопических классов отображений тора $T^2$ в $M$ содержит такой класс, что для любой полной метрики неположительной секционной кривизны на $M$ существует изометрическое и вполне геодезическое в этой метрике погружение $T^2 \to M$ плоского тора $T^2$ из этого класса.*

**1.3.2. Замечание.** Подчеркнем, что в заключении теоремы 1.3.1 речь идет о любых полных метриках неположительной кривизны на $M$, в том числе и о таких, для которых $\inf\ K = -\infty$ и $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \not\to 0$. В частности, если выполнены условия теоремы 1.3.1, многообразие $M$ не допускает никаких полных метрик отрицательной секционной кривизны и, более того, метрик, удовлетворяющих аксиоме видимости.

**1.4.** В доказательстве теоремы 1.3.1 важную роль играет понятие периферического класса свободно гомотопных петель, подробно обсуждаемое в § 2.

Класс $\alpha$ свободно гомотопных петель в топологическом пространстве $X$ называется *периферическим*, если для любого компакта $R \subset X$ существует петля из $\alpha$, не пересекающая $R$. Элемент фундаментальной группы $\pi_1(X)$ называется *периферическим*, если его класс свободной гомотопии является периферическим.

Это понятие имеет самостоятельное значение и полезно в других вопросах, например в вопросе о существовании метрик отрицательной кривизны на произведении многообразий. ( Хорошо известно (см. [3]), что если многообразия $X, Y$ *замкнуты* и имеют положительные размерности, то на произведении $X \times Y$ не существует метрик отрицательной секционной кривизны). Так, имеет место

**1.4.1. Теорема.** *Пусть $X$ и $Y$ связные многообразия без края, имеющие положительные размерности. Если фундаментальная группа $\pi_1(X)$ содержит непериферический элемент, а $Y$ компактно, то произведение $X \times Y$ не допускает никакой полной метрики отрицательной секционной кривизны и, более того, метрики, удовлетворяющей аксиоме видимости.*

Доказательство см. в п.2.3.

В п.1.4.2 и 1.4.4 приводятся примеры условий, при которых фундаментальная группа некомпактного многообразия содержит непериферический элемент.

**1.4.2. Пример.** (см. [4]). Пусть $X$ — связная поверхность без края, причем если $X$ некомпактна, то фундаментальная группа $\pi_1(X)$ не является циклической. Тогда группа $\pi_1(X)$ содержит непериферический элемент.

В следующем примере группа $\pi_1(X)$ состоит из периферических элементов.

**1.4.3. Пример.** Пусть $X = \mathbf{R}^1 \times S^1$, $Y = S^1$. На $X \times Y$ существует полная метрика постоянной секционной кривизны -1.

Действительно, представим $X \times Y$ как $\mathbf{R}^1 \times T^2$. Требуемая метрика имеет вид $ds^2 = dt^2 + e^{-2t} ds_0^2$, где $ds_0^2$ — плоская метрика на торе $T^2$.

**1.4.4. Теорема.** *Пусть $X$ — трехмерное полное риманово многообразие с секционными кривизнами в пределах $-1 \leqslant K \leqslant 0$ и радиусом инъективности* $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$. *Тогда группа $\pi_1(X)$ содержит непериферический элемент.*

Доказательство см. в п.3.1.4. По-видимому, в этой теореме ограничение на размерность многообразия $X$ является лишним.

**1.5. Структура работы.** В § 2 более подробно обсуждается понятие периферического класса свободно гомотопных петель, устанавливается условие на фундаментальную группу многообразия (следствие 2.2.6), при котором справедливо заключение теоремы 1.3.1, и доказывается теорема 1.4.1. Упомянутое условие состоит в том, что в фундаментальной группе должна найтись некоторая абелева подгруппа, содержащая непериферический элемент.

В § 3 это условие переформулируется в более геометрических терминах (предложение 3.1) и доказывается теорема 1.4.4. Оставшаяся часть доказательства теоремы 1.3.1 следует работе [2] и излагается в § 4,5.

В этом пункте собраны некоторые необходимые для данной работы сведения, в основном относящиеся к многообразиям неположительной кривизны. Полные доказательства соответствующих утверждений можно найти в [5, 6].

Пусть $M$ — полное многообразие неположительной секционной кривизны, $\pi : \tilde{M} \to M$ — риманово универсальное накрытие.

**1.5.1.** Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ действует изометриями на $\tilde{M}$ как группа $\Gamma$ преобразований накрытия $\pi$. При этом $\tilde{M}/\Gamma = M$, и $\pi : \tilde{M} \to \tilde{M}/\Gamma$— каноническая проекция. Группа $\Gamma$ действует на $\tilde{M}$ дискретно и свободно.

Зафиксируем точку $p \in M$. Тогда каждая точка $x \in \pi^{-1}(p)$ определяет антиизоморфизм $i_x : \pi_1(M,p) \to \Gamma$, при котором изометрия $i_x(\alpha), \alpha \in \pi_1(M,p)$, переводит точку $x$ в $\overline{\alpha}(1) \in \pi^{-1}(p)$, где $\overline{\alpha} : [0,1] \to \tilde{M}, \overline{\alpha}(0) = x$, — такой путь, что $\pi \cdot \overline{\alpha} \in \alpha$. Точкам $x, x' \in \pi^{-1}(p)$ и элементу $\alpha \in \pi_1(M,p)$ соответствуют сопряженные изометрии $i_{x'}(\alpha)$ и $i_{x'}(\alpha) = \gamma \cdot i_x(\alpha) \cdot \gamma^{-1}$, где $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(x) = x'$. Таким образом, если зафиксирована только точка $p$, то элементам из $\pi_1(M,p)$ соответствуют классы сопряженных изометрий из $\Gamma$, а значит, классы свободно гомотопных петель в $M$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами сопряженных изометрий из $\Gamma$. См.[8], п.5.6.2.9.

**1.5.2.** С каждой изометрией $\gamma : \tilde{M} \to \tilde{M}$ связана ее функция смещения $\delta_\gamma : \tilde{M} \to \mathbf{R}$, $\delta_\gamma(x) = d(x, \gamma x)$, где $d$ — расстояние в $\tilde{M}$. Изометрия $\gamma$ называется *параболической*, если функция $\delta_\gamma$ не достигает своего инфимума на $\tilde{M}$. Если $\delta_\gamma$ достигает своего инфимума на $\tilde{M}$ и он положительный, то изометрия $\gamma$ называется *гиперболической*. Функция $\delta_\gamma$ выпукла, поэтому множество $\mathrm{MIN}(\gamma) = \{x \in M : \delta_\gamma(x) = \inf \delta_\gamma\}$ выпукло. Для гиперболической изометрии $\gamma$ оно непусто и изометрично метрическому произведению вида $D \times \mathbf{R}$, причем $\gamma$ действует на $D \times \mathbf{R}$ как (id, сдвиг). Заметим, что при сопряжении тип изометрии не меняется.

**1.5.3.** Два геодезических луча $h, h' : [0, \infty) \to \tilde{M}$ называются *асимптотическими* друг другу, если $\sup\limits_{t \geq 0} d(h(t), h'(t)) < \infty$. Классы эквивалентности этого отношения называются *точками в бесконечности* и образуют *абсолют* $\tilde{M}(\infty)$. Имеется естественная топология на $\tilde{M} \cup \tilde{M}(\infty)$, в которой любая изометрия $\tilde{M} \to \tilde{M}$ продолжается до гомеоморфизма $\tilde{M} \cup \tilde{M}(\infty) \to \tilde{M} \cup \tilde{M}(\infty)$.

Параболическая изометрия $\gamma : \tilde{M} \to \tilde{M}$ имеет такую неподвижную точку $z \in \tilde{M}(\infty)$, что любой луч $h \in z$ минимизирует функцию $\delta_\gamma$ (см.[5], п.6.6(1) и 3.9).

## § 2. Периферические классы свободно гомотопных петель

**2.1. Определение периферического класса петель и короткое обсуждение приведены в п.1.4.** Свойство класса свободной гомотопии петли быть или не быть периферическим, очевидно, сохраняется при гомеоморфизмах. Пример полуоткрытого кольца $\{z \in \mathbf{C} : 1 \leqslant |z| < 2\}$ и окружности

$\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ показывает, что это свойство не обязано сохраняться при гомотопической эквивалентности. Очевидно, если $X$ компактно, то любой элемент группы $\pi_1(X)$ непериферический. Обратно, если $X$ связно и тривиальный элемент из $\pi_1(X)$ непериферический, то $X$ компактно.

**2.2.** Пусть теперь $M = \tilde{M}/\Gamma$ — полное многообразие неположительной секционной кривизны, $\Gamma = \pi_1(M)$, $\pi : \tilde{M} \to M$ — каноническая проекция. Так как при сопряжении тип изометрии не меняется, то можно говорить о параболических и гиперболических элементах фундаментальной группы $\pi_1(M)$ и классах свободно гомотопных петель (см. 1.5).

**2.2.1.** Будем говорить, что геодезическая $h : [0, \infty) \to M$ *покидает любой компакт*, если для любого компакта $R \subset M$ найдется такое $t_R \geq 0$, что $h(t) \notin R$ при всех $t > t_R$.

**2.2.2. Лемма.** *Пусть $\alpha : \tilde{M} \to \tilde{M}$ — параболическая изометрия, $h : [0, \infty) \to \tilde{M}$ — какой-либо луч, минимизирующий функцию смещения: $\inf\limits_{t \geq 0} \delta_\alpha \circ h(t) = \inf \delta_\alpha$. Тогда геодезическая $\pi \circ h : [0, \infty) \to M$ покидает любой компакт.*

**Доказательство.** Функция $\delta_\alpha$ выпукла, поэтому $\inf\limits_{t \geq 0} \delta_\alpha \circ h(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \delta_\alpha \circ h(t)$. Если допустить, что утверждение неверно, то найдется последовательность чисел $t_i \to \infty$, для которой все точки $\pi \circ h(t_i)$ лежат в фиксированном компакте в $M$. Не ограничивая общности, считаем, что последовательность $\pi \circ h(t_i)$ сходится к некоторой точке $p \in M$. Тогда $\lim\limits_{i \to \infty} d(h(t_i), \pi^{-1}(p)) = 0$, и найдется последовательность изометрий $\gamma_i \in \Gamma$, для которой $\lim\limits_{i \to \infty} d(\gamma_i \circ h(t_i), x_0) = 0$ для некоторой точки $x_0 \in \pi^{-1}(p)$. Так как $\delta_{\gamma_i \alpha \gamma_i^{-1}}(\gamma_i^x) = \delta_\alpha(x)$ при всех $x \in \tilde{M}$, то $\inf \delta_{\gamma_i \alpha \gamma_i^{-1}} = \inf \delta_\alpha$ и

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma_i \alpha \gamma_i^{-1}}(x_0) &\leqslant \delta_{\gamma_i \alpha \gamma_i^{-1}}(\gamma_i \circ h(t_i)) + 2d(\gamma_i \circ h(t_i), x_0) = \\ &= \delta_\alpha \circ h(t_i) + 2d(\gamma_i \circ h(t_i), x_0). \end{aligned}$$

Так как $\lim\limits_{i \to \infty} \delta_\alpha \circ h(t_i) = \inf \delta_\alpha$, то величина $\delta_{\gamma_i \alpha \gamma_i^{-1}}(x_0)$ ограничена. Поэтому благодаря дискретности действия группы $\Gamma$ считаем, не ограничивая общности, что $\gamma_i \alpha \gamma_i^{-1} = \alpha'$ для всех достаточно больших $i$. Так как при сопряжении тип изометрии не меняется, то $\alpha'$ — параболическая изометрия. С другой стороны, $\inf \delta_{\alpha'} = \inf \delta_\alpha = \lim\limits_{i \to \infty} \delta_\alpha \circ h(t_i) \geq \delta_{\alpha'}(x_0)$. Это противоречит определению параболической изометрии. Лемма 2.2.2 доказана.

**2.2.3. Лемма.** *Допустим, что элемент $\gamma \in \pi_1(M)$ сохраняет неподвижной такую точку $z \in \tilde{M}(\infty)$, что для некоторого луча $h \in z$ геодезическая $\pi \circ h$ покидает любой компакт в $M$. Тогда элемент $\gamma$ периферический.*

**Доказательство.** Так как $\gamma(z) = z$, то функция смещения $\delta_\gamma$ ограничена вдоль луча $h$ и в силу выпуклости $\delta_\gamma \circ h(t) \leqslant \delta_\gamma \circ h(0)$ для всех $t \geq 0$. Каждый геодезический отрезок $[h(t), \gamma \circ h(t)] \subset \tilde{M}$ проектируется в $M$ в петлю длины $\delta_\alpha \circ h(t)$ из свободного гомотопического класса $\gamma \in \pi_1(M)$. Допустим, что все петли из класса $\gamma$ пересекают компакт $R \subset M$. Тогда, очевидно, все вершины $\pi \circ h(t), t \geq 0$, таких петель лежат в $\frac{1}{2}\delta_\gamma \circ h(0)$-окрестности компакта $R$. Это противоречит тому предположению, что геодезическая $\pi \circ h$ покидает любой компакт. Лемма 2.2.3 доказана.

Из 2.2.2 и 2.2.3 вытекает

**2.2.4. Следствие.** *Любой нетривиальный элемент $\alpha \in \pi_1(M)$, коммутирующий с каким-либо непериферическим элементом $\gamma \in \pi_1(M)$, является гиперболическим. В частности. любой параболический элемент является периферическим.*

**Доказательство.** Функция смещения $\delta_\alpha$ является $\gamma$-инвариантной, то есть $\delta_\alpha(\gamma x) = \delta_\alpha(x)$ для всех $x \in \tilde{M}$. Если допустить, что $\alpha$ — параболический, то, согласно [5, п. 3.9], изометрия $\gamma$ сохраняет неподвижной такую точку $z \in \tilde{M}(\infty)$, что любой луч, ее представляющий, минимизирует функцию $\delta_\alpha$. Из 2.2.2 и 2.2.3 теперь следует, что $\gamma$ — периферический элемент. Это противоречит условию. •

Таким образом, любой непериферический элемент $\alpha \in \pi_1(M)$ является гиперболическим. Более того, из 2.2.4 следует, что абелева подгруппа $A \subset \pi_1(M)$, содержащая непериферический элемент, состоит из гиперболических элементов (за исключением тривиального) в любой полной метрике неположительной секционной кривизны на $M$.

Абелеву подгруппу $A \subset \pi_1(M)$, которая в любой полной метрике неположительной секционной кривизны на $M$ состоит из гиперболических элементов, будем называть *существенно гиперболической.*

**2.2.5.** Если группа $\Gamma = \pi_1(M)$ содержит абелеву подгруппу $A$, изоморфную $\mathbf{Z}^k$ и состоящую из гиперболических элементов, то, согласно [5], п.7.1, [6], гл.9, универсальное накрывающее $\tilde{M}$ содержит изометрично и вполне геодезически вложенное евклидово пространство $E^k \subset \tilde{M}$ , инвариантное для $A$. Поэтому многообразие $M$ содержит изометрично и вполне геодезически погруженный плоский тор $T^k = E^k/A$, $i : T^k \to M$. Так как элементам группы $\pi_1(M)$ соответствуют классы сопряженных элементов в группе $\Gamma$, то ясно, что образ $i_*(\pi_1(T^k))$ индуцированного гомоморфизма $i_* : \pi_1(T^k) \to \pi_1(M)$ сопряжен с $A$.

Если $A$ состоит из гиперболических элементов в какой-либо другой полной метрике неположительной кривизны на $M$, то, поскольку $M$ есть пространство типа $K(\pi, 1)$, соответствующее погружение тора $T^k \to M$ гомотопно $i$. Тем самым подгруппа $A \subset \pi_1(M)$ определяет такой элемент множества $[T^k, M]$ гомотопических классов отображений тора $T^k$ в $M$, который содержит изометрическое и вполне геодезическое погружение плоского тора $T^k$ в $M$ в любой полной метрике неположительной кривизны на $M$, в которой $A$ состоит из гиперболических элементов.

**2.2.6. Следствие.** *Допустим, что абелева подгруппа $A \subset \pi_1(M)$ ранга $k$ содержит непериферический элемент. Тогда $A$ — существенно гиперболична и множество $[T^k, M]$ содержит такой класс, что многообразие $M$, снабженное любой полной метрикой неположительной секционной кривизны, допускает изометрическое и вполне геодезическое погружение $T^k \to M$ плоского тора $T^k$ из этого класса.*

Это вытекает из 2.2.4 и 2.2.5. •

**2.3. Доказательство теоремы 1.4.1.** Будем считать, что группа $\pi_1(Y)$ нетривиальна и группы $\pi_1(X)$, $\pi_1(Y)$ не содержат элементов конечного порядка, а $X$ некомпактно (иначе утверждение тривиально). Пусть $\alpha \in \pi_1(X)$ — непериферический элемент. Тогда $\alpha \neq 1$, и его образ $(\alpha, 1)$ при гомоморфизме включения $\pi_1(X) \to \pi_1(X \times Y)$ является также непериферическим. (Действительно, пусть $R$ такой компакт в $X$, что любая петля из класса свободной гомотопии $\alpha$ пересекает $R$. Тогда $R \times Y$ — компакт в $X \times Y$, и любая петля из класса свободной гомотопии $(\alpha, 1)$ пересекает $R \times Y$). Таким образом, в группе $\pi_1(X \times Y)$ имеется подгруппа, изоморфная $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ и содержащая непериферический элемент. Как вытекает из п.2.2.4 и 2.2.5, универсальное риманово накрывающее $\tilde{X} \times Y$ содержит евклидову плоскость для любой полной метрики неположительной секционной кривизны на $X \times Y$. Поэтому, согласно [1],$X \times Y$ не допускает метрик, удовлетворяющих аксиоме видимости, и, в частности, полных метрик отрицательной кривизны. Теорема 1.4.1 доказана.

## § 3. Существенно гиперболические подгруппы

Напомним (п.2.2.4), что абелева подгруппа $A \subset \pi_1(M)$ является *существенно гиперболической*, если она содержит непериферический элемент.

**3.1. Предложение.** *Пусть $M$ — трехмерное полное риманово многообразие с секционными кривизнами в пределах $-1 \leqslant K \leqslant 0$ и* $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$. *Тогда любая подгруппа в $\pi_1(M)$ вида $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, состоящая из гиперболических элементов, содержит непериферический элемент и, следовательно, является существенно гиперболической.*

Доказательство этого предложения опирается на следующий результат, полученный в [7].

**3.1.1. Теорема.** *Пусть $M$, как в* 3.1, *и пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Обозначим через $[\mathcal{F}, M]_\varepsilon$ совокупность всех гомотопических классов, каждый из которых содержит изометрическое и вполне геодезическое вложение $F \to M$ плоского тора или плоской бутылки Кляйна диаметра $< \varepsilon$ ( $[\mathcal{F}, M]_\varepsilon$ может быть пустой). Выберем в каждом классе из $[F, M]_\varepsilon$ по одному такому вложению и разрежем $M$ вдоль всех выбранных вложений. (Образы этих вложений обязательно дизъюнктны). Тогда внутренность каждой компоненты связности $M_0$ получившегося после разрезания многообразия диффеоморфна внутренности компактного многообразия $W_0 \subset M_0$ с краем. При этом каждая компонента края у $W_0$ несжимаема и является тором или бутылкой Кляйна.* •

**3.1.2.** Под разрезанием многообразия $M$ вдоль вложения $i : F \to M$ понимается взятие метрического пополнения у дополнения $M \backslash i(F)$. Присоединенные при этом точки образуют или связное, если $i$ одностороннее, или состоящее из двух компонент, если $i$ двустороннее, многообразие $F'$, двулистно накрывающее $i(F)$. Можно считать, что та часть $F'$, которая попадает в $M_0$, является одной из компонент края $\partial W_0$. При этом, конечно, край $\partial W_0$ не обязан состоять только из такого сорта компонент.

Из несжимаемости следует, что вложение $\partial W_0 \to W_0$ индуцирует на каждой компоненте $B$ мономорфизм $\pi_1(B) \to \pi_1(W_0) = \pi_1(M_0)$. При этом образ состоит из гиперболических элементов, если $B$ является одновременно компонентой края $\partial M_0$, т.е. соответствует некоторому классу из $[F, M]_\varepsilon$. В противном случае, согласно [7], п.8.18, он обязательно содержит параболические элементы.

**3.1.3. Доказательство предложения 3.1.** Переходя при необходимости к двулистному ориентирующему накрывающему, считаем, что многообразие $M$ ориентируемо. Пусть $H \subset \pi_1(M)$ — подгруппа вида $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, состоящая из гиперболических элементов. Тогда $\tilde{M}$ содержит евклидову плоскость $E$, инвариантную для $H$ (см.п.2.2.5). При этом, если $E'$ — другая инвариантная для $H$ евклидова плоскость в $\tilde{M}$, то $E$ и $E'$ параллельны и ограничивают в $\tilde{M}$ подмножество, изометричное $E^2 \times [0, a]$, где $a$ — расстояние между $E$ и $E'$. Так как $M$ ориентируемо, то любая изометрия из группы $\Gamma = \pi_1(M)$ сохраняет ориентацию у $\tilde{M}$. Поэтому если подгруппа $H' \subset \Gamma$ вида $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ сохраняет $E'$, то $H'$ сохраняет и $E$. Из этого нетрудно вывести, что существует единственная максимальная подгруппа в $\Gamma$ вида $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, содержащая $H$. Не ограничивая общности, считаем, что $H$ максимальна.

Обозначим через $\varepsilon_0 = \inf\{\inf \delta_\gamma : \gamma \in H \backslash \mathrm{id}\}$ величину самого короткого нетривиального смещения в группе $H$. Многообразие $M$ содержит изометрично и вполне геодезически погруженный плоский тор $T = E/H$, соответствующий классу сопряженных с $H$ подгрупп в $\Gamma$. Каждому классу из $[\mathcal{F}, M]_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (см.3.1.1), соответствует класс сопряженных в $\Gamma$ подгрупп, причем эти подгруппы изоморфны $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ в случае, когда $F$ — тор, или содержат подгруппу $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ индекса 2 в случае, когда $F$ — бутылка Кляйна. Выберем число $\varepsilon < \varepsilon_0$ так, чтобы

1) соответствующие образующие у $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ для каждого класса из $[\mathcal{F}, M]_\varepsilon$ имели минимальное смещение меньше $\varepsilon_0$ ;

2) поверхности, выбранные, как в 3.1.1, в каждом классе $[\mathcal{F}, M]_\varepsilon$ для разрезания, не пересекали образа тора $T = E/H$ в $M$.

Разрежем $M$, как в 3.1.1, по $[\mathcal{F}, M]_\varepsilon$ и выберем ту компоненту связности $M_0$, которая содержит тор $T$. Пусть компактное подмногообразие $W_0 \subset M_0$ — такое же, как в 3.1.1. Можно считать, что $T \subset W_0$.

Допустим, что элемент $\gamma \in H$, $\gamma \neq \mathrm{id}$, является периферическим. Тогда существует такая гомотопия $h : S^1 \times [0,1] \to M$, что петля $h(S^1 \times 0) \subset T$ представляет $\gamma$, а $h(S^1 \times 1) \subset M \backslash W_0'$, где $W_0'$ — образ $W_0$ при естественном отображении $W_0 \to M$. Покажем, что петля $h(S^1 \times 0)$ свободно гомотопна петле, лежащей на одной из компонент края $\partial W_0$. Каждая компонента связности множества $\mathrm{cl}(M_0 \backslash W_0)$ деформационно ретрагируется на соответствующую компоненту края $\partial W_0$, поэтому утверждение очевидно в случае, когда $h(S^1 \times 1) \subset M_0$.

Теперь можно считать, что петля $h(S^1 \times 1)$ не задевает $M_0$ и что гомотопия $h$ гладкая и трансверсальна к краю $\partial W_0'$ (см.[8], п.3.4.6.6 и п.3.4.7.7). Тогда прообраз $h^{-1}(\partial W_0') \subset S^1 \times (0,1)$ является замкнутым гладким 1-мерным подмногообразием. Если допустить, что прообраз $h^{-1}(\partial W_0')$ стягиваем в $S^1 \times [0,1]$, то найдется путь $s : [0,1] \to S^1[0,1]$, $s(0) \in S^1 \times 0$, $s(1) \in S^1 \times 1$, не задевающий $h^{-1}(\partial W_0')$. Тогда путь $h \circ s : [0,1] \to M$ начинается в $h \circ s(0) \in W_0'$, кончается в $h \circ s(1) \in M \backslash W_0'$ и не задевает $\partial W_0'$. Это невозможно, поэтому в $h^{-1}(\partial W_0')$ имеется компонента, гомотопная основанию $S^1 \times 0$ цилиндра $S^1 \times [0,1]$, т.е. в классе $\gamma$ свободно гомотопных петель имеются петли, лежащие на $\partial W_0$.

Допустим, что все элементы некоторой подгруппы $H'$ конечного индекса в $H$ являются периферическими. Так как число компонент у $\partial W_0$ конечно, то найдется пара независимых в $H'$ элементов $\gamma_1$, $\gamma_2$, уходящих, как выше, на одну и ту же компоненту $B \subset \partial W_0$. Так как $\gamma_1$, $\gamma_2$ гиперболические и независимые, то подгруппа $\pi_1(B) \subset \pi_1(M)$ (см. 3.1.2) не может содержать параболических элементов. Поэтому $B \subset \partial M_0$ является изометрично и вполне геодезически вложенным в $M$ плоским тором диаметра $< \varepsilon$ . Тогда в $\tilde{M}$ найдется евклидова плоскость $E'$, накрывающая $B$ при проекции $\pi : \tilde{M} \to M$ и инвариантная для группы $H'$. Плоскость $E'$ параллельна $E$, и группа $H$ сохраняет $E'$, а значит, по выбору числа $\varepsilon < \varepsilon_0$ не является максимальной. Это противоречие доказывает предложение 3.1. •

**3.1.4. Доказательство теоремы 1.4.4.** Согласно предложению 3.1, можно считать, что группа $\pi_1(M)$ не содержит подгрупп вида $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ , состоящих из гиперболических элементов. Тогда по теореме 3.1.1 многообразие $M$ диффеоморфно внутренности компактного трехмерного многообразия $W$ с краем, причем все компоненты края $\partial W$ являются несжимаемыми торами или бутылками Кляйна.

Допустим, что все элементы из $\pi_1(M)$ являются периферическими. Тогда $W$ — тотально периферическое многообразие, и, согласно [9], существует компонента $B \subset \partial W$, для которой естественный гомоморфизм $\pi_1(B) \to \pi_1(W)$ сюръективен. Поэтому группа $\pi_1(M) = \pi_1(W)$ содержит изоморфную $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ подгруппу $H$ индекса $\leqslant 2$. Согласно предположению, в $H$ имеется параболический элемент. Поэтому действие $H$ на $\tilde{M}$ сохраняет некоторую точку $z \in \tilde{M}(\infty)$, а это противоречит условию $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$. Теорема 1.4.4 доказана.

В силу предложения 3.1 и следствия 2.2.6 для доказательства теоремы 1.3.1 достаточно доказать, что группа $\pi_1(M)$ содержит подгруппу вида $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, состоящую из гиперболических элементов. Эта оставшаяся часть доказательства следует работе [2]. Изменения касаются двух обстоятельств: наличия параболических изометрий и условия $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$ вместо условия компактности. Не ограничивая общности, в дальнейшем считаем, что 3-многообразие $M$ ориентируемо. Через $\Gamma$, как обычно, обозначаем группу скольжений универсального накрытия $\pi : \tilde{M} \to M$.

## § 4. Инвариантные плоскости

**4.1. Предложение.** *Допустим, что $\gamma(E) = E$ для некоторой нетривиальной изометрии $\gamma \in \Gamma$ и евклидовой плоскости $E \subset \tilde{M}$ . Тогда группа $\Gamma$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ и состоящую из гиперболических изометрий.*

Доказательство заканчивается в п.4.1.4.

**4.1.1.** Так как изометрия $\gamma$ сохраняет евклидову плоскость $E$, то $\gamma$ — гиперболическая изометрия. Обозначим через $\Gamma_A$ подгруппу в $\Gamma$, сохраняющую множество $A = \mathrm{MIN}(\gamma)$ и его расщепление $A = D \times \mathbf{R}$. Пусть $p : A \to D$ —

проекция на первый сомножитель, гомоморфизм $q : \Gamma_A \to \Gamma_D$ — проекция действия группы $\Gamma_A$ на $D$. Его ядро содержит подгруппу, порожденную $\gamma$, а значит, действует на сомножителе $\mathbf{R}$ равномерно. Поэтому, согласно [5], п.12.8(в), группа $\Gamma_D$ действует на $D$ дискретно. Переходя к подгруппе конечного индекса, можно считать, что группа $\Gamma_A$ действует на $A = D \times \mathbf{R}$ изометриями вида ($\gamma'$, сдвиг), а группа $\Gamma_D$ сохраняет ориентацию $D$. Если группа $\Gamma_D$ содержит гиперболическую изометрию $h'$, то любая изометрия $h \in q^{-1}(h')$ является гиперболической и коммутирует с изометрией $\gamma$. Поэтому изометрии $\gamma, h$ порождают в $\Gamma$ подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z} \oplus Z$ и состоящую из гиперболических изометрий. Это есть утверждение предложения 4.1. Поэтому считаем, что группа $\Gamma_D$ не содержит гиперболических изометрий. Будет показано, что это предположение приводит к противоречию.

Согласно [4], группа $\Gamma_D$ является циклической. Можно считать, что сужение $\gamma|E$ — сдвиг. Тогда $E \subset A$ и выпуклое множество $D$ содержит такую геодезическую $c : \mathbf{R} \to D$, что $c(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} = E$. Фиксируя точку $r_0 \in \mathbf{R}$, считаем, что $c$ —геодезическая в $A$ вида $(c(t), r_0)$.

**4.1.2.** Предположим, что геодезическая $\pi \circ c|[0,\infty) : [0,\infty) \to M$ пересекает какой-либо фиксированный компакт в $M$ при сколь угодно больших $t > 0$. Тогда для некоторой последовательности чисел $t_i \to \infty$ последовательность точек $\pi \circ c(t_i)$ сходится к некоторой точке $p_0 \in M$. Это означает, что существует такая последовательность попарно различных изометрий $\gamma_i \in \Gamma$, что точки $\gamma_i \circ c(t_i)$ сходятся к некоторой точке $x \in \pi^{-1}(p_0)$. Все отрезки $m_i = [c(t_i)\gamma \circ c(t_i)]$ имеют одинаковую длину $\delta = \min \delta_\gamma$. Поэтому можно считать, что их образы $\gamma_i(m_i)$ сходятся к отрезку $m = [xy]$. Тогда последовательность точек $\gamma_i \gamma \gamma_i^{-1}(x)$ сходится к точке $y$. Дискретность действия группы $\Gamma$ влечет, что $\gamma_i \gamma \gamma_i^{-1} = \gamma_j \gamma \gamma_j^{-1}$ для всех достаточно больших $i, j$. Фиксируя один из таких индексов $i$ и полагая $h_j = \gamma_i^{-1}\gamma_j$, получаем, что:

**4.1.3.** В группе $\Gamma$ существует последовательность попарно различных изометрий $h_j$, коммутирующих с изометрией $j$. При этом последовательность точек $h_j \circ c(t_j)$ сходится к точке $x_i = \gamma_i^{-1}(x)$, которую можно считать за счет выбора индекса $i$, сколь угодно близкой к точке $c(t_i)$, лежащей на прямой $c$.

Так как изометрии $h_j$ коммутируют с $\gamma$, то $h_j \in \Gamma_A$. Поэтому геодезические $h_j \circ c$ лежат в $A$ и параллельны сомножителю $D$. Группа $\Gamma_D$ содержит последовательность попарно различных изометрий $h'_j = q(h_j)$, для которой последовательность точек $h'_j \circ c(t_j)$ сходится к точке $x'_i = p(x_i)$, которую можно считать за счет выбора индекса $i$, сколь угодно близкой к прямой $c \subset D$. При этом $t_j \to \infty$ при $j \to \infty$.

Так как группа $\Gamma_D$ циклическая, то изометрии $h'_j$ либо все эллиптические с общей неподвижной точкой $d_0 \in D$, либо все параболические с общей неподвижной точкой $z \in D(\infty)$ и сохраняющие любую орисферу с центром в $z$ ([5], п.3.9 и 6.6(1)). Но условие $h'_j \circ c(t_j) \to x'_i$ противоречит тому, что $d(h'_j \circ c(t_j), d_0) \to \infty$; а значит, и $d(h'_j \circ c(t_j), x'_i) \to \infty$ при $j \to \infty$, если $h'_j$ эллиптические. Поэтому группа $\Gamma_D$ состоит из параболических изометрий. Она действует равномерно на любой орисфере с центром в $z$. Согласно условию, точки $c(t_j)$ прямой $c$ неограниченно приближаются при $j \to \infty$ к орисфере $S_i \subset D$ с центром в $z$, проходящей через точку $x'_i$. Так как орисфера — граница выпуклого множества (оришара) и на $S_i$ группа $\Gamma_D$ действует равномерно, то это означает, что орисфера $S_i$ является прямой (асимптотической к прямой $c$ в направлении $t \to +\infty$). Это, очевидно, невозможно.

**4.1.4.** Таким образом, геодезическая $\pi \circ c : \mathbf{R} \to M$ покидает любой компакт в $M$ в обоих направлениях $t \to \pm\infty$.

Для $t \in \mathbf{R}$ обозначим через $\alpha_t$ петлю $\pi([c(t)\gamma\circ(t)])$. Изометрия $\gamma$ действует на евклидовой плоскости $E \subset \tilde{M}$ как сдвиг, а прямая $c \subset E$. Поэтому все петли $\alpha_t, t \in \mathbf{R}$, имеют одинаковую длину $\delta = \min \delta_\gamma$. Рассмотрим, что происходит при $t \to +\infty$ (рассуждения для $t \to -\infty$ аналогичны).

Согласно теореме 3.1.1 (считаем, что совокупность $[F, M]_\varepsilon$ пуста для любого $\varepsilon > 0$), многообразие $M$ содержит компактное подмногообразие $W$ с краем, каждая компонента которого несжимаема и является тором (по предположению $M$ ориентируемо), а само $M$ диффеоморфно внутренности $W$. Согласно условию, для всех достаточно больших $t > 0$ точка $\pi \circ c(t)$ лежит вместе с петлей $\alpha_t$ в некоторой компоненте связности дополнения $M \backslash W$. Поэтому петля $\alpha_t$ свободно гомотопна некоторой петле на соответствующей компоненте — торе $T_+ \subset \partial W$. Пусть $H_+$ — та подгруппа в $\Gamma$ из класса сопряженных с подгруппой $\pi_1(T_+) \subset \pi_1(M)$, которая содержит изометрию $\gamma$. Группа $H_+$ изоморфна $\pi_1(T_+) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, поэтому $H_+ \subset \Gamma_A$. Можно считать, что группа $H_+$ содержит параболические изометрии. Поэтому циклическая группа $\Gamma_D \supset q(H_+)$ состоит из параболических изометрий множества $D$.

Так как геодезическая $\pi \circ c$ покидает любой компакт в $M$, а радиус инъективности $\operatorname{Inj Rad} \to 0$, то найдутся такие последовательности чисел $t_i \to +\infty$ и изометрий $\gamma_i \in H_+$, что $\delta_{\gamma_i} \circ (t_i) \to 0$ и тем более $\delta_{\gamma_i'}(p \circ c(t_i)) \to 0$ при $i \to \infty$, где $\gamma_i' = q(\gamma_i)$. Заметим, что изометрии $\gamma_i'$ нетривиальны, так как ядро гомоморфизма $q : \Gamma_A \to \Gamma_D$ действует дискретно сдвигами на сомножителе $\mathbf{R}$ разложения $A = D \times \mathbf{R}$. Так как выпуклое множество $D$ двумерно, то это возможно лишь в случае, когда функция смещения $\delta_{\gamma_0}$ образующей $\gamma_0 \in \Gamma_D$ ограничена вдоль геодезической $c \subset D$ (как и прежде, отождествляем $c$ и $p \circ c$) при $t \to +\infty$. Аналогичное рассуждение показывает, что $\delta_{\gamma_i}$ ограничена и при $t \to -\infty$. Таким образом, функция смещения $\delta_{\gamma_0}$ параболической изометрии $\gamma_0$ постоянна на прямой $c \subset D$. Для двумерного многообразия $D$ это, очевидно, невозможно. Предложение 4.1 доказано.

**4.2. Предложение.** *Если $\tilde{M}$ содержит пару пересекающихся евклидовых плоскостей $E_1, E_2$, то группа $\Gamma$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ и состоящую из гиперболических изометрий.*

**Доказательство.** Согласно 4.1, достаточно доказать существование изометрии $\gamma \in \Gamma \backslash \mathrm{id}$, сохраняющей некоторую плоскость в $\tilde{M}$. Можно считать, что $\tilde{M}$ неплоское, так как иначе либо $M$ конечнолистно накрывается плоским тором, либо $\operatorname{Inj Rad} \not\to 0$. Рассмотрим множество $A \subset \tilde{M}$, составленное из всевозможных прямых в $\tilde{M}$, параллельных прямой $E_1 \cap E_2$. Ясно, что $A$ выпукло, изометрично произведению $D \times \mathbf{R}$ и $E_1 \cup E_2 \subset A$. Поэтому $\dim A = 3$, и точка $d_0 \in D$, где $E_1 \cap E_2 = d_0 \times \mathbf{R}$, является внутренней в $D$.

**4.2.1.** Обозначим через $\Gamma_A$ подгруппу в $\Gamma$, сохраняющую множество $A$ и его расщепление $D \times \mathbf{R}$. Изометрии $h \in \Gamma_A$ действуют на $A = D \times \mathbf{R}$ как

$(h_1, h_2)$. Можно считать, что $h_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ является сдвигом. Действительно, в противном случае $h_2$ обращает ориентацию прямой $\mathbf{R}$, и существует такое $t_0 \in \mathbf{R}$, что $h_2(t_0) = t_0$. Поэтому $h_1 : D \to D$ не имеет неподвижных точек, а так как $M$ ориентируемо, то $h_1$ также обращает ориентацию у $D$, а значит, является гиперболической изометрией. Пусть $l \subset D$ — инвариантная для $h_1$ прямая. Тогда $h(l \times t_0) = l \times t_0$, и изометрия $h$ сохраняет плоскость $l \times \mathbf{R}$.

**4.2.2.** Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая нетривиальная изометрия $\gamma \in \Gamma_A, h = (h_1,$ сдвиг$)$, что $\delta_{h_1}(d_0) < \varepsilon$, в частности, $\Gamma_A \neq \{\mathrm{id}\}$. Можно считать, что круг $D_\varepsilon \subset D$ радиуса $\varepsilon$ с центром в $d_0$ не задевает $\partial D$. Так как $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$, то множество $D_\varepsilon \times \mathbf{R} \subset \tilde{M}$ отображается в $M$ проекцией $\pi : \tilde{M} \to M$ неинъективно. Поэтому существует такая изометрия $h \in \Gamma \setminus \mathrm{id}$, что $h(D_\varepsilon \times \mathbf{R}) \cap D_\varepsilon \times \mathbf{R} \neq \emptyset$. Если допустить, что прямая $h(d_0 \times \mathbf{R})$ непараллельна $d_0 \times \mathbf{R}$, то она (при достаточно малом $\varepsilon$) пересекает $E_1 \cup E_2$. Тогда $\tilde{M}$ плоское, так как в нем найдутся три плоскости, пересекающиеся в одной точке. Поэтому $h(d_0 \times \mathbf{R}) \| d_0 \times \mathbf{R}$, а значит, $h \in \Gamma_A$. Таким образом, $h = (h_1,$сдвиг$)$, и ясно, что $\delta_{h_1}(d_0) < \varepsilon$.

**4.2.3.** Так как $\Gamma_A$ действует на $A$ изометриями вида $(h_1,$ сдвиг$)$, то коммутант $H = [\Gamma_A, \Gamma_A]$ действует на $A$ изометриями вида $(h_1, \mathrm{id})$. Поэтому $H$ действует на $D$ дискретно, свободно и сохраняет ориентацию у $D$. Если $H$ — нециклическая группа, то, согласно [4], существует гиперболическая изометрия $h \in H$. Эта изометрия сохраняет плоскость $l \times \mathbf{R} \subset \tilde{M}$, где $l \subset D$ — инвариантная для $h$ прямая. Поэтому либо $H = \{\mathrm{id}\}$ и группа $\Gamma_A$ абелева, либо $H = \mathbf{Z}$ состоит из параболических изометрий. Пусть $h \in H$ — образующая. Так как коммутант — нормальная подгруппа, то $hgh^{-1} = g^{\pm 1}$ для любого $h \in \Gamma_A$. В любом случае $h^2 g h^{-2} = g$. Поэтому централизатор $Z_H$ подгруппы $H$ в $\Gamma_A$ является нормальной подгруппой индекса $\leqslant 2$.

**4.2.4.** Допустим, что $\Gamma_A$ содержит гиперболическую изометрию $h = (h_1,$ сдвиг$)$. Тогда, рассуждая, как в [2, лемма 6], получаем, что ее ось $m$ параллельна прямой $d_0 \times \mathbf{R}$, $h_1$ является поворотом вокруг точки $m_0, m = m_0 \times \mathbf{R}$, на угол иррационально кратный $\pi$, и $m = \mathrm{MIN}\ (h)$. Так как орбиты $h_1$ плотны на окружностях с центром в $m_0$, а $D$ содержит прямые, то $\partial D = \emptyset$. Поэтому $A = \tilde{M}$, $\Gamma_A = \Gamma$. Согласно 4.2.4, группа $\Gamma$ либо абелева, либо $[\Gamma, \Gamma] = \mathbf{Z}$ состоит из параболических изометрий. Если $\Gamma$ абелева, то она сохраняет прямую $m = \mathrm{MIN}\ (h)$, а значит, $\Gamma = \mathbf{Z}$, что противоречит условию $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$.

Пусть $[\Gamma, \Gamma] = \mathbf{Z}$. Тогда, согласно 4.2.3, изометрия $h^2$ коммутирует с образующей $g \in [\Gamma, \Gamma]$. Поэтому $g(m) = m$, что противоречит параболичности $g$.

**4.2.5.** Остается рассмотреть случай, когда $\Gamma_A$ состоит из параболических изометрий. Пусть $\Gamma_A \to \Gamma_D$ — проекция действия группы $\Gamma_A$ на $D, Z'_H \subset \Gamma_D$ — образ подгруппы $Z_H$(см. п.4.2.3). Ясно, что любой элемент из ядра гомоморфизма $\Gamma_A \to \Gamma_D$ сохраняет плоскости $E_1$ и $E_2$. Поэтому считаем, что $\Gamma_A \to \Gamma_D$ — изоморфизм. Так как некоторый нетривиальный элемент $h \in \Gamma_D$ коммутирует со всеми элементами из $Z'_H$, то $h$ обладает такой неподвижной точкой $z \in D(\infty)$, что подгруппа $Z'_H$ сохраняет $z$ и все ее орисферы в $D$.

Так как элементы из $\Gamma_D$ не имеют неподвижных точек на $D$, а индекс $Z'_H$ в $\Gamma_D$ конечен, то, согласно 4.2.2, орбита точки $d_0$ при действии группы $Z'_H$ плотна на проходящей через эту точку орисфере точки $z$. Так как через $d_0$ проходят две прямые, лежащие в $D$, то $\partial D = \oslash$. Поэтому $A = \tilde{M}, \Gamma_A = \Gamma$. Таким образом, группа $\Gamma$ содержит нормальную подгруппу $\Gamma'$ индекса $\leqslant 2$, в центре которой есть параболическая изометрия. Тогда группа $\Gamma'$ сохраняет некоторую точку $z' \in \tilde{M}(\infty)$ и все ее орисферы в $\tilde{M}$. Это противоречит условию $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \not\to 0$. Предложение 4.2 доказано.

В дальнейшем считаем, что в $\tilde{M}$ нет пересекающихся евклидовых плоскостей и нет евклидовых плоскостей, инвариантных при каких-либо изометриях $\Gamma \backslash \mathrm{id}$. Будет показано, что это предположение приводит к противоречию.

## § 5. Замыкание множества точек евклидовых плоскостей в $\tilde{M}$

Обозначим через $X$ множество точек всех евклидовых плоскостей в $\tilde{M}$.

**5.1.Лемма.** *Если $X$ всюду плотно в $\tilde{M}$, то группа $\pi_1(M)$ свободная абелева.*

Эта лемма доказана в [2], лемма 7 в случае, когда $M$ замкнуто. При этом замкнутость $M$ использовалась лишь для вывода, что в группе $\Gamma = \pi_1(M)$ существует хотя бы одна гиперболическая изометрия. В нашем случае, т.е. когда только $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$, существование гиперболической изометрии в $\Gamma$ следует из п.1.4.4 и 2.2.4.

**5.1.1. Следствие.** *Если $X$ всюду плотно в $\tilde{M}$, то $\tilde{M}$ плоское, а $M$ - тор.*

**Доказательство.** Абелева группа $\Gamma$, содержащая параболическую изометрию, сохраняет некоторую точку $z \in \tilde{M}(\infty)$, что противоречит условию $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$. Поэтому $\Gamma$ состоит из гиперболических изометрий. Условие $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$ влечет, что $\Gamma$ изоморфна $\mathbf{Z}^3, \tilde{M}$ — плоское, а $\tilde{M}/\Gamma$ — компакт. Утверждение доказано.

**5.2.** Остается рассмотреть случай, когда множество $X$ не является всюду плотным в $\tilde{M}$. В работе [2] рассуждения в этой части не использовали компактность многообразия $M$, а опирались только на конечность его объема. Ввиду этого изменения, связанные с переходом к условию $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad} \to 0$ не очень значительны. Они и описываются ниже.

Пусть точка $x_0 \in \tilde{M} \backslash X$ внутренняя из дополнения к $X$, $D$ — пересечение всех замкнутых полупространств, определяемых евклидовыми плоскостями в $\tilde{M}$ и содержащих точку $x_0$. В силу условия теоремы 1.3.1 край $\partial D$ непуст. Ясно, что каждая его компонента является евклидовой плоскостью и что множество $D$ точно инвариантно относительно $\Gamma$, т.е. для всех $\gamma \in \Gamma$ либо выполняется $\gamma(D) = D$, либо $D$ и $\gamma(D)$ не имеют общих внутренних точек. Напомним некоторые факты, установленные в [2].

**5.2.1.** Для любой евклидовой плоскости $P \subset \tilde{M}$ определена метрическая проекция $\pi_P : \tilde{M} \to P$, $d(x, \pi_P(x)) = d(x, P)$. Сужение $\pi_P : Q \to P$ на любую другую евклидову плоскость $Q \subset \tilde{M}$ является топологическим вложением, и функция $f : Q \to \mathbf{R}$, $f(x) = d(x, P)$, выпукла.

**5.2.2.** Любой шар в $\tilde{M}$ радиуса $\rho \leqslant \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ с центром внутри $D$ пересекает не более двух компонент края $\partial D$.

**5.2.3.** Для компоненты $P$ края $\partial D$ обозначим через $U_\varepsilon^+(P)$ ту часть метрической $\varepsilon$-окрестности $P$ в $\tilde{M}$, которая лежит по ту же сторону от $P$, что и множество $D$. Для двух евклидовых плоскостей $P$, $Q \subset \tilde{M}$ обозначим через $\Omega_\varepsilon(P,Q) \subset Q$ множество $f^{-1}([0,\varepsilon])$, где функция $f : Q \to \mathbf{R}$, как в 5.2.1, и положим $T_\varepsilon(P,Q) = U\{[x,\pi_P(x)] : x \in \Omega_\varepsilon(P,Q)\}$.

Пусть $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. В дальнейшем евклидовы плоскости $P$ и $Q$ — компоненты края $\partial D$.

**5.3. Лемма.** *Пусть положительные числа $\varepsilon$, $\delta$ таковы, что $\varepsilon+2\delta \leqslant \varepsilon_0$. Тогда*

(1) *сужение $\pi : T_\varepsilon(P,Q) \to M$ универсального накрытия $\pi$ взаимно-однозначно;*

(2) *в любой точке $p \in \pi(T_\varepsilon(P,Q))$ радиус инъективности* $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad}(p) \geq \delta$.

**Доказательство.** Если $\pi : T_\varepsilon(P,Q) \to M$ не взаимно-однозначно, то найдутся нетривиальная изометрия $\gamma \in \Gamma$ и точка $x \in T_\varepsilon(P,Q) \cap \gamma(T_\varepsilon(P,Q))$. Поэтому расстояние от точки $x$ до плоскостей $P$, $Q$, $\gamma(P)$, $\gamma(Q)$ не превосходит $\varepsilon < \varepsilon_0$. Согласно 5.2.2, либо $\gamma(P) = P$, либо $\gamma(P) = Q$ и $\gamma(Q) = P$. В любом случае $\gamma^2(P) = P$. Так как $\gamma^2 \neq \mathrm{id}$, то это противоречит предположению о том, что в $\tilde{M}$ нет инвариантных для изометрий из $\Gamma$ евклидовых плоскостей. Утверждение (1) доказано.

Если в некоторой точке $p \in \pi(T_\varepsilon(P,Q))$ выполняется $\operatorname{Inf}\operatorname{Rad}(p) < \delta$, то найдутся такая нетривиальная изометрия $\gamma \in \Gamma$ и точка $x \in \pi^{-1}(p) \cap T_\varepsilon(P,Q)$, что $\delta_\gamma(x) < 2\delta$. Расстояния точки $x$ до плоскостей $P$ и $Q$ не превосходят $\varepsilon < \varepsilon_0$; с другой стороны, $d(x,\gamma P) \leqslant \delta_\gamma(x) + d(\gamma x, \gamma P) < 2\delta + \varepsilon \leqslant \varepsilon$ аналогично $d(x,\gamma Q) \leqslant \varepsilon_0$. Как и выше, получаем противоречие с предположением о евклидовых плоскостях в $\tilde{M}$. Лемма 5.3 доказана.

**5.4. Лемма.** *Допустим, что в $U_{\varepsilon'}^+(P)$ нет точек евклидовых плоскостей, отличных от $P$. Тогда*

(1) *сужение $\pi : U_\varepsilon^+(P) \to M$ универсального накрытия $\pi$ взаимно-однозначно для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon'/2]$;*

(2) *в любой точке $p \in \pi(U_\varepsilon^+(P) \setminus U_\sigma^+(P))$ радиус инъективности* $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad}(p) \geq \delta$, *как только $2(\varepsilon+\delta) \leqslant \varepsilon'$, $2\delta \leqslant \sigma < \varepsilon$.*

**Доказательство.** Согласно условию $U_{\varepsilon'}^+(P) \subset D$. Если $\varepsilon \leqslant \varepsilon'/2$ и отображение $\pi : U_\varepsilon^+(P) \to M$ не взаимно-однозначно, то найдутся нетривиальная изометрия $\gamma \in \Gamma$ и точка $x \in U_\varepsilon^+(P) \cap \gamma(U_\varepsilon^+(P))$. Так как в $\tilde{M}$ нет пересекающихся евклидовых плоскостей и инвариантных при $\gamma$ евклидовых плоскостей, а через внутренние точки $D$ плоскости не проходят, то точка $x$ лежит внутри $D$ и внутри $\gamma(D)$. Так как $D$ точно инвариантно, то $\gamma(D) = D$. Поэтому плоскость $\gamma(P)$ лежит по ту же сторону от плоскости $P$, что и множество $D$. Теперь $d(P,\gamma(P)) \leqslant d(x,P) + d(x,\gamma(P)) < 2\varepsilon \leqslant \varepsilon'$. Это противоречит предположению о том, что в $U_{\varepsilon'}^+(P)$ нет точек евклидовых плоскостей, отличных от $P$. Утверждение (1) доказано.

Предположим теперь, что в некоторой точке $p \in \pi(U_\varepsilon^+(P) \setminus U_\sigma^+(P))$ выполняется $\operatorname{Inj}\operatorname{Rad}(p) < \delta$. Тогда, как и в 5.3, находим нетривиальную изометрию $\gamma \in \Gamma$ и точку $x \in \pi^{-1}(p) \cap (U_\varepsilon^+(P) \setminus U_\sigma^+(P))$ с $\delta_\gamma(x) < 2\delta$. Так как точка $x$ не принадлежит множеству $U_\sigma^+(P)$, а $\sigma \geq 2\delta$, то точка $\gamma x$ лежит по ту же сторону от плоскости $P$, что и множество $D$. Согласно (1), $\gamma x \notin U_\varepsilon^+(P)$, поэтому и плоскость $\gamma(P)$ лежит по ту же сторону от $P$. Однако $d(P,\gamma(P)) \leqslant d(P,x)+\delta_\gamma(x)+d(\gamma x,\gamma(P)) < 2(\varepsilon+\delta) \leqslant \varepsilon'$, что противоречит предположению о множестве $U_{\varepsilon'}^+(P)$. Лемма 5.4 доказана.

Напомним, что евклидовы плоскости $P$, $Q \subset \tilde{M}$ называются *расходящимися* (см.[2]), если функция $f : Q \to \mathbf{R}$, $f(x) = d(x,P)$, собственная ( т.е. прообраз $f^{-1}(K)$ любого компакта $K \subset \mathbf{R}$ компактен).

**5.5. Лемма.** *Допустим, что для компонент $P$, $Q$ края $\partial D$ расстояние $d(P,Q) < \varepsilon_0$. Тогда евклидовы плоскости $P$ и $Q$ расходятся.*

**Доказательство.** Выберем числа $\varepsilon > d(P,Q)$ и $\delta > 0$ так, чтобы $\varepsilon + 2\delta \leqslant \varepsilon_0$. Если плоскости $P$ и $Q$ не расходятся, то, согласно ([2],лемма 10), множество $T_\varepsilon(P,Q)$ имеет бесконечный объем. Согласно лемме 5.3, множество $\pi(T_\varepsilon(P,Q))$ также имеет бесконечный объем и лежит в множестве $\{p \in M : \operatorname{Inj Rad}(p) \geq \delta\}$. Это противоречит условию $\operatorname{Inj Rad} \to 0$. Лемма 5.5 доказана.

**5.6. Лемма.** *Существует такая последовательность $P_i$ компонент края $\partial D$, расходящихся с компонентой $P$, что $d(P,P_i) \to 0$ при $i \to \infty$.*

**Доказательство.** Допустим, что для некоторого $\varepsilon' > 0$ множество $U_\varepsilon^+(P)$ не содержит точек плоскостей, отличных от $P$. Выберем положительные числа $\varepsilon$, $\delta$, $\sigma$ так, чтобы $2(\varepsilon+\delta) \leqslant \varepsilon'$ и $2\delta \leqslant \sigma < \varepsilon$. Множество $U_\varepsilon^+(P)\backslash U_\sigma^+(P)$ имеет, очевидно, бесконечный объем. Поэтому, согласно лемме 5.4, множество $\pi(U_\varepsilon^+(P)\backslash U_\sigma^+(P))$ имеет бесконечный объем и лежит в множестве $\{p \in M : \operatorname{Inf Rad}(p) \geq \delta\}$. Это противоречит условию $\operatorname{Inf Rad} \to 0$. Если евклидовы плоскости $P$ и $Q$ расходятся, то расстояние $d(P,Q) > 0$. Утверждение теперь вытекает из леммы 5.5. •

**5.7. Завершение доказательства теоремы 1.3.1.** Пусть евклидовы плоскости $P$, $P_i$, как в лемме 5.6. Выберем положительные числа $\varepsilon$, $\delta$, так, чтобы $\varepsilon + 2\delta \leqslant \varepsilon_0$, и обозначим $T_i = T_\varepsilon(P,P_i)$. Согласно [2], лемма 13, $\operatorname{Vol}(T_i) \to \infty$ при $i \to \infty$, а согласно 5.3, $\operatorname{Vol}(\pi(T_i)) = \operatorname{Vol}(T_i)$ и $\pi(T_i) \subset \{p \in M : \operatorname{Inj Rad}(p) \geq \delta\}$. Это противоречит условию $\operatorname{Inj Rad} \to 0$. Поэтому наше предположение о плоскостях неверно, и теорема 1.3.1 следует из предложений 4.1, 4.2, 3.1 и следствия 2.2.6.

**Замечание.** Эта работа была уже завершена, когда автору стало известно о статье [10], посвященной аналогичным вопросам. Результаты из [10] относятся к вещественно-аналитической ситуации и не пересекаются с результатами настоящей работы.

## Список литературы


[1] Eberlein P., *Geodesic flow in certain manifolds without conjugate points*, Trans. Amer. Math. Soc. **167** (1972), 151–170.

[2] Буяло С. В., *Евклидовы плоскости в трехмерных многообразиях неположительной кривизны*, Мат. заметки **43** (1988), 103–114.

[3] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, Мир, М, 1971, с. 344.

[4] Буяло С. В., *Замкнутые геодезические на двумерных орбиобразиях неположительной кривизны*, Алгебра и анализ **1**, вып. 3 (1989), 89–109.
[5] Ballmann W., Cromow M., Schroeder V., Manifolds of nonpositive curvature, Birkhäuser, Boston, 1985, p. 226.
[6] Cheeger J., Ebin D., Comparison theorems in riemannian geometry, vol. 9, North-Holland Math. Library, 1975.
[7] Буяло С. В., *Теорема конечности для трехмерных многообразий неположительной кривизны*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ (1991).
[8] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, Наука, М., 1977.
[9] Brin M., Johannson K., Scott P., *Totally peripheral 3-manifolds*, Pacif. J. Math. **118** (1985), 37–51.
[10] Schroeder V., *Existence of immersed tori in manifolds of nonpositive curvature*, J. reine angew. Math. **390** (1988), 32–46.

Поступило 20 сентября 1989 г.

Российский государственный
педагогический университет им. А. И. Герцена
191186, Ленинград, наб. р. Мойки, 48